

Кафедра математики и моделирования
Старший преподаватель Г.В. Аверкова
Курс «Высшая математика»

Тема 3 «Векторное произведение двух векторов»

Определение, физический смысл, вывод формулы векторного произведения через координаты перемножаемых векторов, геометрический смысл модуля векторного произведения. Смешанное произведение трех векторов: определение, геометрический смысл, вывод формулы через координаты перемножаемых векторов, условие компланарности трех векторов.



Цели и задачи

- Цели:

- Рассмотреть основные понятия по теме «Векторное произведение двух векторов»

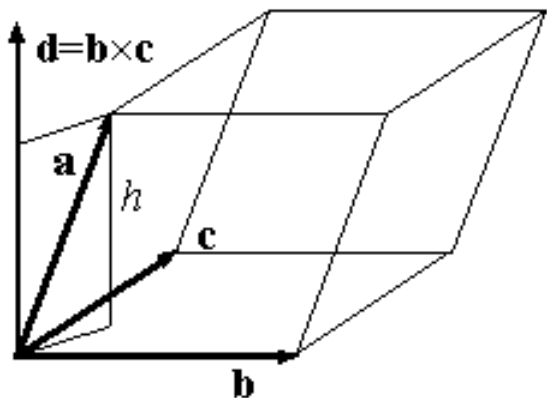
- Задачи:

- Ввести понятие векторного произведения двух векторов, рассмотреть его свойства и геометрический смысл
- Рассмотреть понятие смешанного произведения трех векторов, его свойства и геометрический смысл

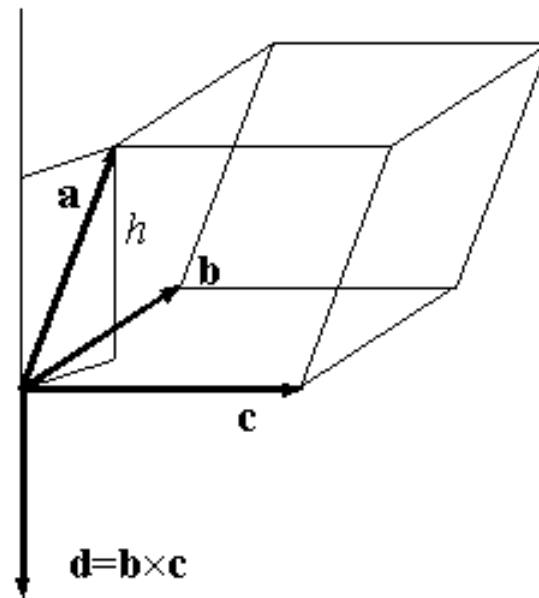
Теоретический материал

Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Тройка некопланарных векторов называется правой, если наблюдателю из их общего начала обход концов векторов в указанном порядке кажется совершающимся по часовой стрелке; в противном случае задана левая тройка.



Правая тройка векторов \bar{a} , \bar{b} , \bar{c}



Левая тройка векторов \bar{a} , \bar{b} , \bar{c}

Теоретический материал

Векторным произведением ненулевых и неколлинеарных векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ такой, что выполняются условия:

- 1) длина вектора \vec{c} равна произведению длин векторов \vec{a} и \vec{b} на синус угла между ними, т.е.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \quad ;$$

- 2) вектор \vec{c} перпендикулярен векторам \vec{a} и \vec{b} ;

- 3) векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} образуют правую тройку векторов.

Теоретический материал

Свойства векторного произведения двух векторов

$$1) \quad \bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$$

$$2) \quad (k\bar{a}) \times \bar{b} = k(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \times (k\bar{b})$$

$$3) \quad (\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$$

$$4) \quad \bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$$

5) два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору.

Теоретический материал

Если заданы координаты векторов

$$\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\},$$

$$\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\},$$

то их векторное произведение определяется как

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\}$$

Теоретический материал

Геометрический смысл векторного произведения:
площадь параллелограмма, образованного парой векторов,
равна модулю их векторного произведения,
а площадь треугольника –
половине модуля их векторного произведения, т.е.

$$S = |\bar{a} \times \bar{b}|$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\bar{a} \times \bar{b}|$$

Теоретический материал

Смешанным произведением векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} называется скалярное произведение вектора \vec{a} на векторное произведение векторов \vec{b} и \vec{c} :

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$$

Если заданы координаты векторов, то их смешанное произведение равно определителю третьего порядка, каждая строка которого состоит из координат соответствующего вектора, т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Теоретический материал

Свойства смешанного произведения трех векторов

1) $\bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}$

2) $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}$

3) три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю;

4) три вектора образуют правую (левую) тройку тогда и только тогда, когда смешанное произведение этих векторов в соответствующем порядке больше (меньше) нуля.

Теоретический материал

Геометрический смысл смешанного произведения

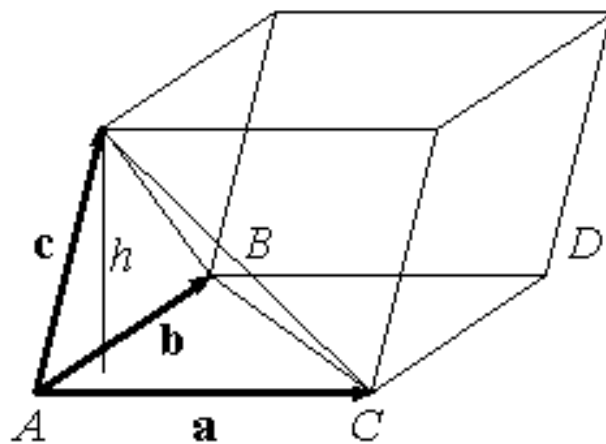
Объем параллелепипеда, построенного на трех некопланарных векторах равен их смешанному произведению, взятому со знаком + (плюс), если векторы образуют правую тройку, и со знаком – (минус) – в случае левой тройки, т.е.

$$V = \pm \bar{a} \bar{b} \bar{c} = |\bar{a} \bar{b} \bar{c}|$$

Теоретический материал

Объем пирамиды, образованной тройкой векторов, равен одной шестой их смешанного произведения, взятого с соответствующим знаком, т.е.

$$V_{\text{пир}} = \pm \frac{1}{6} \bar{a} \bar{b} \bar{c} = \frac{1}{6} |\bar{a} \bar{b} \bar{c}|$$



Ключевые понятия

- Компланарные векторы
- Правая тройка векторов
- Левая тройка векторов
- Векторное произведение
- Смешанное произведение

Контрольные вопросы

- Определение правой (левой тройки векторов)
- Векторное произведение
- Свойства векторного произведения
- Геометрический смысл векторного произведения
- Смешанное произведение
- Свойства смешанного произведения
- Геометрический смысл смешанного произведения
- Условие компланарности векторов

Дополнительная литература
