Кафедра математики и моделирования
Старший преподаватель Г.В. Аверкова
Курс «Высшая математика»

# Тема 3 «Векторное произведение двух векторов»

Определение, физический смысл, вывод формулы векторного произведения через координаты перемножаемых векторов, геометрический смысл модуля векторного произведения. Смешанное произведение трех векторов: определение, геометрический смысл, вывод формулы через координаты перемножаемых векторов, условие компланарности трех векторов.

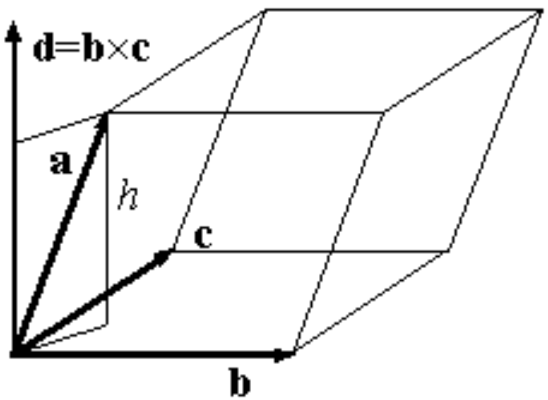
# Цели и задачи

- Цели:
  – Рассмотреть основные понятия по теме «Векторное произведение двух векторов»
- Задачи:
  – Ввести понятие векторного произведения двух векторов, рассмотреть его свойства и геометрический смысл
  – Рассмотреть понятие смешанного произведения трех векторов, его свойства и геометрический смысл

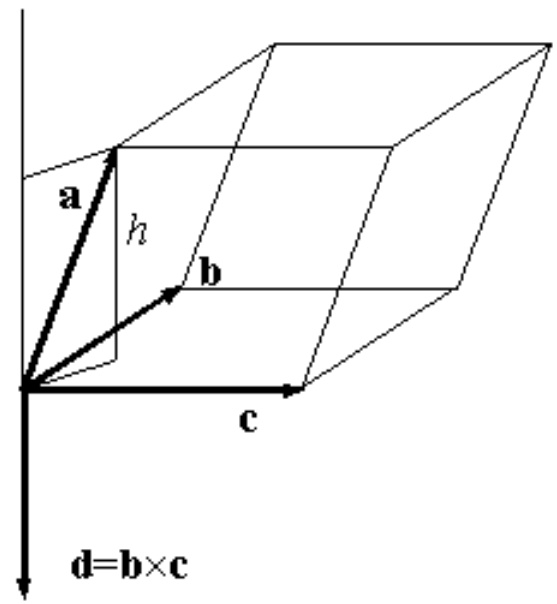
# Теоретический материал

Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Тройка некомпланарных векторов называется правой, если наблюдателю из их общего начала обход концов векторов в указанном порядке кажется совершающимся по часовой стрелке; в противном случае задана левая тройка.




Правая тройка векторов $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$




Левая тройка векторов $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$

# Теоретический материал

Векторным произведением ненулевых и неколлинеарных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$ такой, что выполняются условия:

1) длина вектора $\overline{c}$ равна произведению длин векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ на синус угла между ними, т.е.

$$|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \sin(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) \quad ;$$

2) вектор $\overline{c}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

3) векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют правую тройку векторов.

# Теоретический материал

## Свойства векторного произведения двух векторов

1) $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$

2) $(k\overline{a})\times\overline{b}=k(\overline{a}\times\overline{b})=\overline{a}\times(k\overline{b})$

3) $(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$

4) $\overline{a}\times\overline{a}=\overline{0}$

5) два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору.

# Теоретический материал

Если заданы координаты векторов

$$\overline{a} = \{a_x, a_y, a_z\},$$

$$\overline{b} = \{b_x, b_y, b_z\},$$

то их векторное произведение определяется как

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\}$$

# Теоретический материал

Геометрический смысл векторного произведения:

площадь параллелограмма, образованного парой векторов,

равна модулю их векторного произведения,

а площадь треугольника –

половине модуля их векторного произведения, т.е.

$$S = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right|$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right|$$

# Теоретический материал

Смешанным произведением векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется скалярное произведение вектора $\bar{a}$ на векторное произведение векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c})$$

Если заданы координаты векторов, то их смешанное произведение равно определителю третьего порядка, каждая строка которого состоит из координат соответствующего вектора, т.е.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

# Теоретический материал

Свойства смешанного произведения трех векторов

1) $\overline{a}(\overline{b}\times\overline{c})=(\overline{a}\times\overline{b})\overline{c}$

2) $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a}=\overline{c}\,\overline{a}\,\overline{b}=-\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c}=-\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b}=-\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}$

3) три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю;

4) три вектора образуют правую (левую) тройку тогда и только тогда, когда смешанное произведение этих векторов в соответствующем порядке больше (меньше) нуля.

# Теоретический материал

## Геометрический смысл смешанного произведения

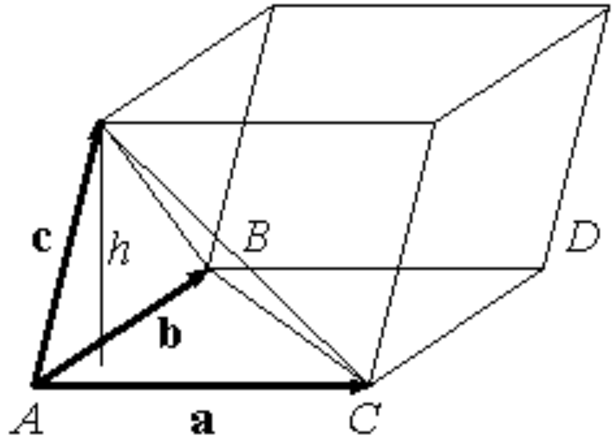
Объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах равен их смешанному произведению, взятому со знаком + (плюс), если векторы образуют правую тройку, и со знаком – (минус) – в случае левой тройки, т.е.

$$V = \pm \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \left| \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} \right|$$

# Теоретический материал

Объем пирамиды, образованной тройкой векторов, равен одной шестой их смешанного произведения, взятого с соответствующим знаком, т.е.

$$V_{пир} = \pm\frac{1}{6}\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \frac{1}{6}\left|\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right|$$



# Ключевые понятия

- Компланарные векторы
- Правая тройка векторов
- Левая тройка векторов
- Векторное произведение
- Смешанное произведение

# Контрольные вопросы

- Определение правой (левой тройки векторов)
- Векторное произведение
- Свойства векторного произведения
- Геометрический смысл векторного произведения
- Смешанное произведение
- Свойства смешанного произведения
- Геометрический смысл смешанного произведения
- Условие компланарности векторов

# Дополнительная литература