

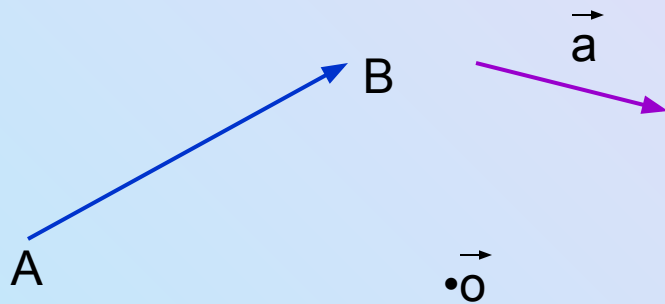
# Векторы (повторение)



Учитель математики МБОУ «Школа№14»  
г.Яровое Алтайского края  
Пономарева Екатерина Викторовна



**Вектором называется направленный отрезок.**



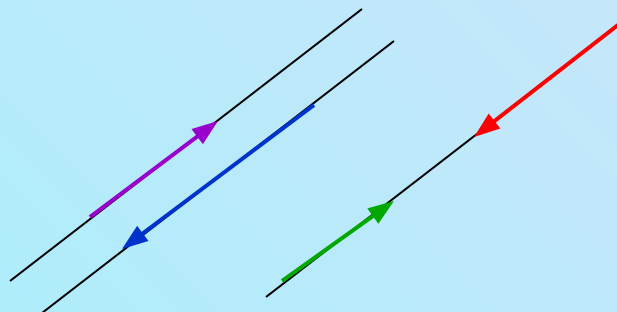
**Векторы обозначаются:**

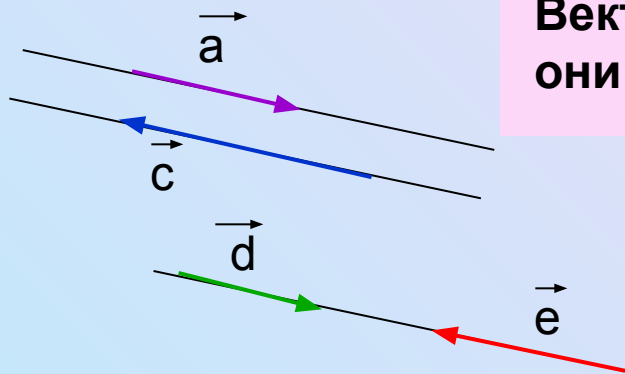
$\vec{AB}$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{0}$

Вектор  $\vec{0}$ - нулевой.  $|\vec{0}|=0$

**Модулем вектора называется длина содержащего его отрезка.  
 $|\vec{AB}|=AB$**

**Ненулевые векторы называются коллинеарными, если они лежат либо на одной, либо на параллельных прямых.**





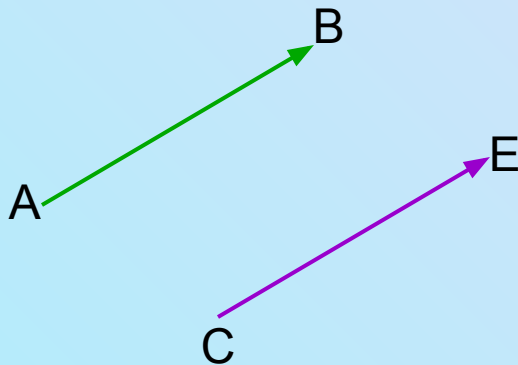
**Векторы называются сонаправленными, если они коллинеарны и направлены в одну сторону.**

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{d} \quad \vec{e} \uparrow\uparrow \vec{c}$$

**Векторы называются противоположно направленными, если они коллинеарны и направлены в противоположные стороны.**

$$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c} \quad \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{e} \quad \vec{c} \uparrow\downarrow \vec{d}$$

**Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.**



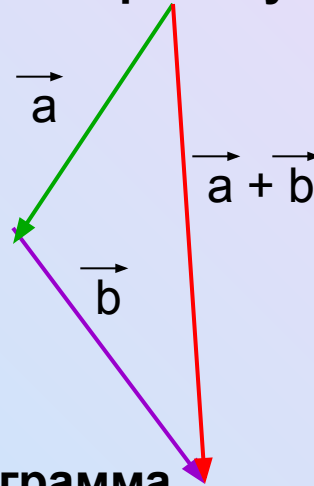
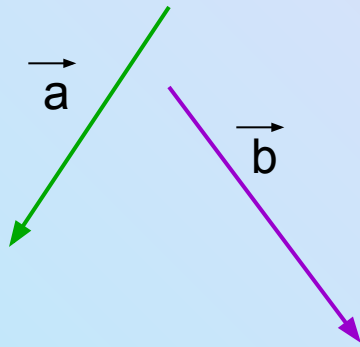
$$\vec{AB} = \vec{CE}, \text{ если}$$

$$\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CE}, |\vec{AB}| = |\vec{CE}|$$

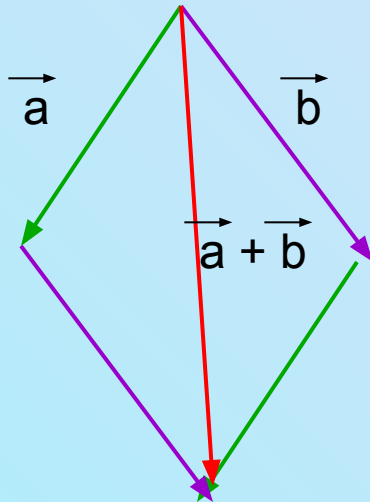


# Сложение и вычитание векторов

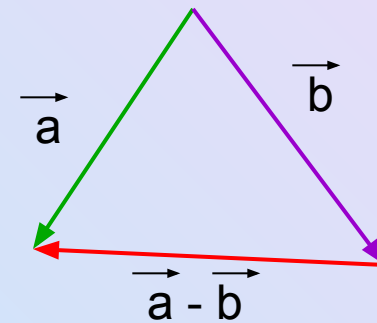
## 1. Сложение по правилу треугольника



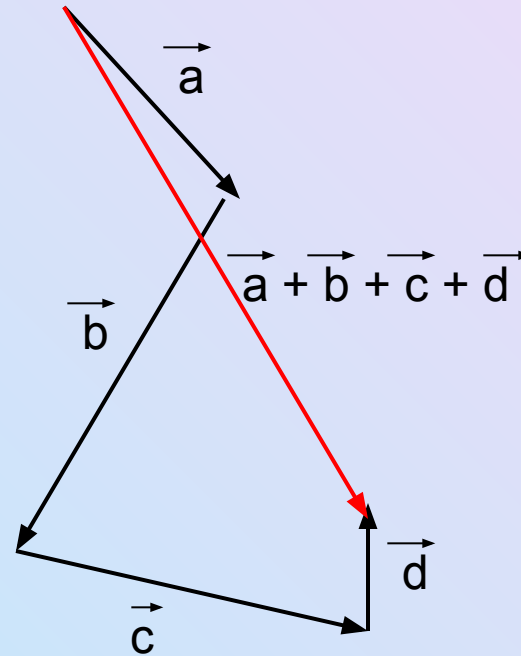
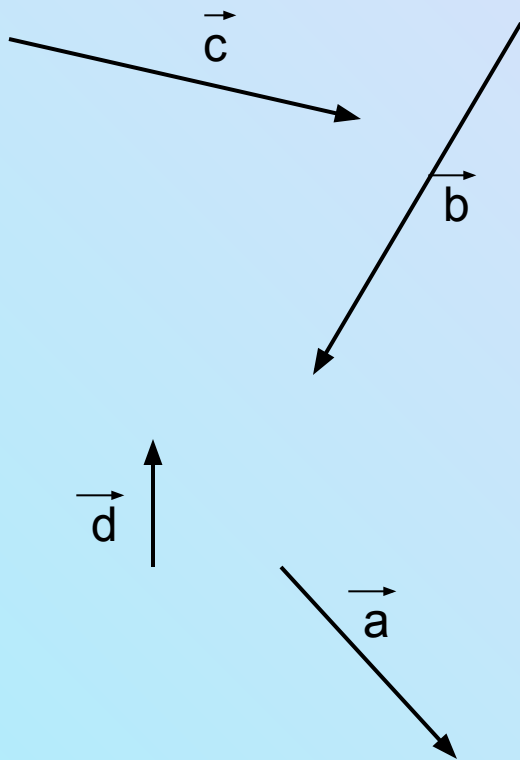
## 2. Сложение по правилу параллелограмма



## 3. Правило вычитания

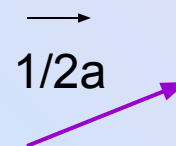
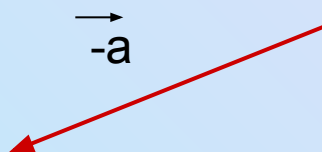
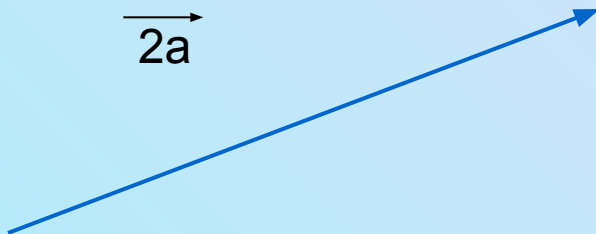
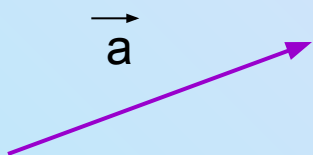


# Правило сложения нескольких векторов



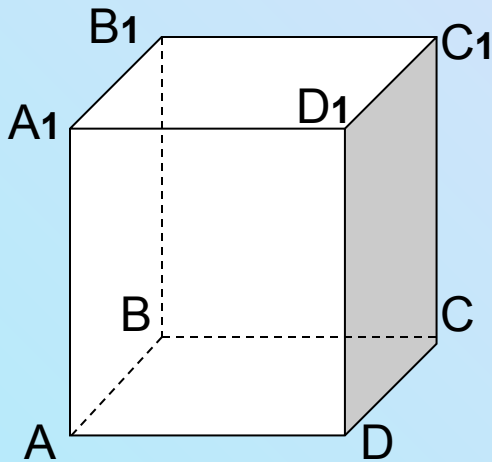
# Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора  $\vec{a}$  на число  $k$  называется такой вектор  $\vec{b}$  Длина которого равна  $|k| \cdot |\vec{a}|$ , причем векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены при  $k \geq 0$  и противоположно направлены при  $k \leq 0$ .



# Порешаем!

Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  - параллелепипед.  
Упростите выражение:  $\vec{C_1 D} - \vec{D A} + \vec{C D} + \vec{D_1 A_1} + \vec{A B_1} + \vec{C C_1}$



Решение:

Воспользуемся свойствами сложения векторов

$$\vec{C C_1} + \vec{C_1 D} = \vec{C D},$$

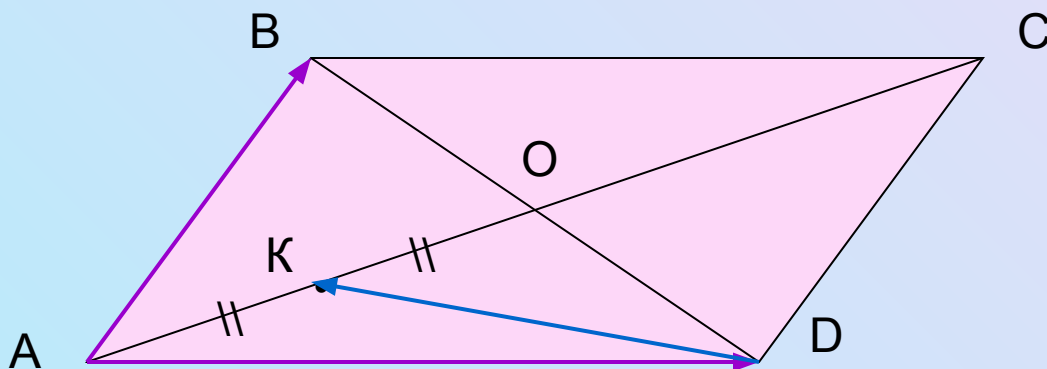
$$\vec{D_1 A_1} - \vec{D A} = \vec{0},$$

$$\text{Получаем: } \vec{C D} + \vec{C D} + \vec{A B_1},$$

$$\vec{C D} = \vec{B A}, \vec{B A} + \vec{A B_1} = \vec{B B_1}, \vec{C D} + \vec{B B_1} = \vec{B A_1}$$



$ABCD$  — параллелограмм,  $O$  — точка пересечения диагоналей,  $K$  — середина отрезка  $AO$ . Выразите  $\vec{DK}$  через  $\vec{AB}$  и  $\vec{AD}$ .



**Решение:**

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$$

$$\vec{AO} = 1/2 \vec{AC} = 1/2 (\vec{AB} + \vec{AD}),$$

$$\vec{AK} = 1/2 \vec{AO} = 1/4 (\vec{AB} + \vec{AD}),$$

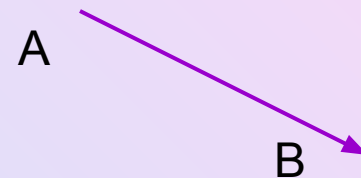
$$\begin{aligned} \vec{DK} &= \vec{AK} - \vec{AD} = 1/4 (\vec{AB} + \vec{AD}) - \vec{AD} = \\ &= 1/4 \vec{AB} + 1/4 \vec{AD} - \vec{AD} = 1/4 \vec{AB} - 3/4 \vec{AD}. \end{aligned}$$



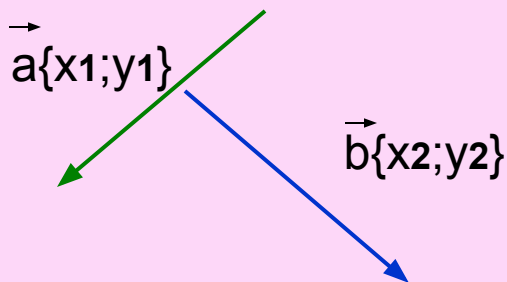


# Координаты вектора

Пусть  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ ,  
 $\vec{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ ,



$$\begin{aligned} &\vec{a}\{x_1; y_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2\}, \\ &\vec{a} + \vec{b} \{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}, \\ &\vec{a} - \vec{b} \{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}, \\ &k\vec{a} \{kx_1; ky_1\} \end{aligned}$$



**Правила:**

1. Каждая координата суммы двух и более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.
2. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.
3. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на число.



# Порешаем!

1) Коллинеарны ли векторы  $\vec{a}\{4,8,12\}$  и  $\vec{b}\{8,16,36\}$ ?

Т.к.  $8/4=2, 16/8=2, 36/12=3$ , то векторы не коллинеарны.

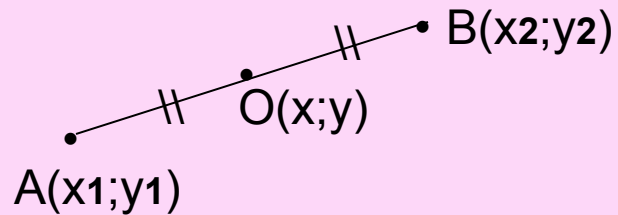
2) Найти координаты вектора  $\vec{p}=2\vec{a}-1/3\vec{b}+\vec{c}$ , если  $\vec{a}\{1,-2,0\}, \vec{b}\{0,6,-6\}$  и  $\vec{c}\{-2,3,1\}$ .

$$\begin{aligned} & 2\vec{a}\{2;-4;0\}, -1/3\vec{b}\{0;-2;2\}, \\ \vec{p} \{2+0+(-2); -4+(-2)+3; 0+2+1\} &= \{0;-3;3\} \end{aligned}$$



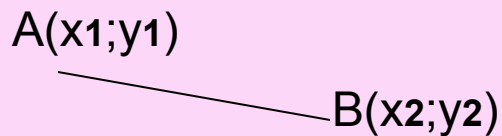
# Формулы в координатах.

## 1. Координаты середины отрезка



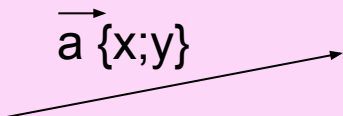
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

## 2. Расстояние между двумя точками



$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

## 3. Вычисление длины вектора

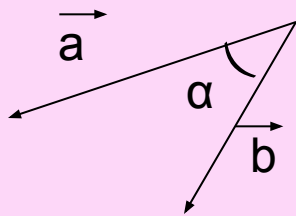


$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

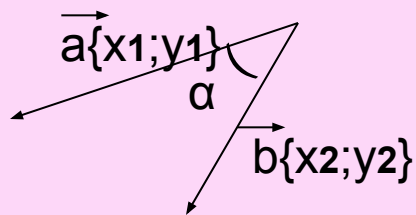


# Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$



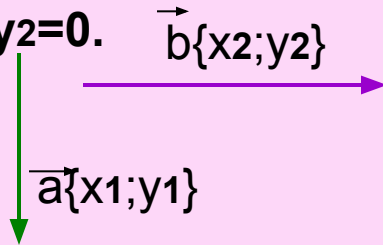
Скалярное произведение векторов  $\vec{a}\{x_1; y_1\}$  и  $\vec{b}\{x_2; y_2\}$  выражается формулой

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$



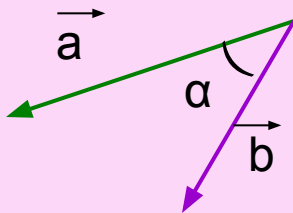
# СЛЕДСТВИЯ

1. Ненулевые векторы  $\vec{a}\{x_1; y_1\}$  и  $\vec{b}\{x_2; y_2\}$  перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно 0, т.е.  $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ .



2. Косинус угла  $\alpha$  между ненулевыми векторами  $\vec{a}\{x_1; y_1\}$  и  $\vec{b}\{x_2; y_2\}$  выражается формулой

$$\cos \alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$



# Порешаем!

1. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты  $A(2;2), B(8;10), C(8;8)$

**Найдем длины сторон треугольника**

$$1) A(2;2), B(8;10). a = \sqrt{((8-2)^2 + (10-2)^2)} = \sqrt{(36+64)} = 10$$

$$2) B(8;10), C(8;8). b = \sqrt{((8-8)^2 + (10-8)^2)} = \sqrt{4} = 2$$

$$3) A(2;2), C(8;8). c = \sqrt{((8-2)^2 + (8-2)^2)} = 6\sqrt{2}$$

**Найдем площадь по формуле Герона**

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, p = (12+6\sqrt{2})/2 = 6+3\sqrt{2}$$

$$S = \sqrt{(6+3\sqrt{2})(6+3\sqrt{2}-10)(6+3\sqrt{2}-2)(6+3\sqrt{2}-6\sqrt{2})} = \sqrt{(6+3\sqrt{2})(3\sqrt{2}-4)(3\sqrt{2}+4)(6-3\sqrt{2})} =$$

«первый и четвертый множители образуют формулу, второй и третий тоже»

$$= \sqrt{(36-18)(18-16)} = \sqrt{18 \cdot 2} = 6$$

**Ответ: 6**



# Порешаем!

→ → → → → → → →  
2. Даны векторы  $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$  и  $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$ .  
При каком значении  $m$  векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны?

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны, если их скалярное произведение равно 0.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0;$$

$$\vec{a} = \{m, 3, 4\}$$

$$\vec{b} = \{4, m, -7\}.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4m + 3m - 28 = 0$$

$$7m = 28$$

$$m = 4$$

Ответ: 4



# Порешаем!

3. Дан треугольник ABC. A(-6;1) B(2;4) C(2;-2)

Доказать: 1) треугольник ABC равнобедренный

2) найти высоту треугольника, проведенную из вершины A

Решение:

1) Найдем длины сторон треугольника

$$A(-6;1), B(2;4). AB = \sqrt{(2+6)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{73}$$

$$B(2;4), C(2;-2). BC = \sqrt{(2-2)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$A(-6;1), C(2;-2). AC = \sqrt{(2+6)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{73}$$

Т.к.  $AB=AC$ , то  $\triangle ABC$ -равнобедр. с основанием BC.

2) Высота, проведенная к основанию является медианой.

O(x;y) – середина основания.

$$x = (2+2)/2 = 2, y = (4-2)/2 = 1. O(2;1).$$

Найдем высоту AO:

$$AO = \sqrt{(2+6)^2 + (1-1)^2} = 8$$

**Ответ: 8**





# Порешаем!

4. При каком значении  $t$  вектор  $2\vec{a}+t\vec{b}$  перпендикулярен вектору  $\vec{b}-\vec{a}$ , если  $\vec{a}\{2;-1\}$ ,  $\vec{b}\{4;3\}$ ?

Решение:

Т.к. векторы  $2\vec{a}+t\vec{b}$  и  $\vec{b}-\vec{a}$  перпендикулярны, то и их скалярное произведение

равно 0. Т.е.  $(2\vec{a}+t\vec{b}) \cdot (\vec{b}-\vec{a})=0$

$$2\vec{a}\vec{b}-2\vec{a}^2+t\vec{b}^2-t\vec{a}\vec{b}=0$$

$$ab=2 \cdot 4+3 \cdot (-1)=8-3=5, \quad a^2=4+1=5, \quad b^2=16+9=25$$

$$2 \cdot 5-2 \cdot 5+t \cdot 25-t \cdot 5=0$$

$$10-10+20t=0$$

$$t=0$$

Ответ: 0



# Порешаем!

5. В треугольнике  $\triangle ABC$   $AB=17$  см,  $BC=8$  см,  $AC=15$  см, Найдите:

а)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ,  $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ ,  $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ ;

б) длину окружности, описанной около треугольника;

Решение:

$$1) AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$17^2 = 8^2 + 15^2$$

$289 = 289$ ,  $\triangle ABC$  - прямоугольный,  $\angle C = 90^\circ$ .

$$2) \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 17 \cdot 15 \cdot \cos A; \cos A = 15/17$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 17 \cdot 15 \cdot 15/17 = 225$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 17 \cdot 8 \cdot \cos B; \cos B = 8/17$$

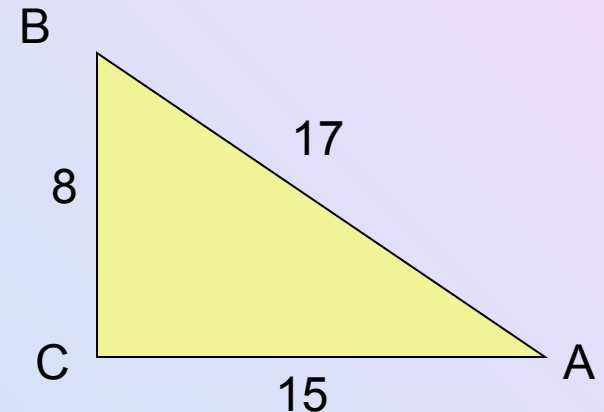
$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 17 \cdot 8 \cdot 8/17 = 64$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 15 \cdot 8 \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0;$$

3)  $C = 2PR = dP$  ( $AB$ -диаметр)

$$C = 17\pi$$



Ответ: а) 225,64,0

б)  $17\pi$



**Дома:** 1) выучить теоретический материал;  
2) решить задачи:

А) Сторона равностороннего треугольника  $MLN$  равна 6 см.  
Найдите скалярное произведение  $\overrightarrow{LM}$  и  $\overrightarrow{LN}$ .

Б) Найдите косинус угла  $A$  в треугольнике  $ABC$ , если  $A(-4;2)$ ,  
 $B(2;4)$ ,  $C(-1;-2)$  .



# Задачи взяты с сайтов:

- [www.postupivuz.ru/vopros/4484.htm](http://www.postupivuz.ru/vopros/4484.htm)
- <http://mathege.ru/or/ege/Main.html?view=About>
- <http://www.mathgia.ru:8080/or/gia12/>

