

Математика

Лекция 5



Аналитическая геометрия

Алгебраические поверхности и линии на плоскости первого порядка

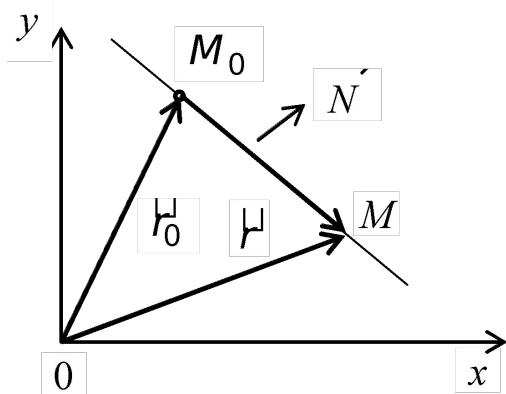
- **Опр.** Геометрическое место точек в пространстве (*на плоскости*) определяет плоскость (*прямую на плоскости*)

тогда и только тогда, когда декартовы координаты x, y, z текущей точки M удовлетворяют алгебраическому уравнению первого порядка

В пространстве	На плоскости
$F(x, y, z) = 0$ поверхность	$F(x, y) = 0$ линия
плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$	прямая $Ax + By + C = 0$
Введем вектор \vec{N}	
$\vec{N} = (A, B, C)$	$\vec{N} = (A, B)$
Вектор \vec{N} называется <i>нормальным вектором (нормалью)</i> плоскости и прямой на плоскости	
Введем радиус-вектор текущей точки	
$\vec{r} = (x, y, z)$	$\vec{r} = (x, y)$
$(\vec{r}, \vec{N}) + D = 0$	$(\vec{r}, \vec{N}) + C = 0$

Геометрический смысл нормального вектора

- **Задача 1.** На плоскости дана точка $M_0(\vec{r}_0) = M_0(x_0, y_0)$ и вектор $\vec{N} = (A, B)$. Составить уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору.



- Рассмотрим текущую точку прямой $M(\vec{r}) = M(x, y)$ тогда вектор $\vec{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y - y_0)$ лежит на данной прямой.

$$\Rightarrow \vec{M_0M} \perp \vec{N} \Rightarrow (\vec{M_0M}, \vec{N}) = 0$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N}) = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

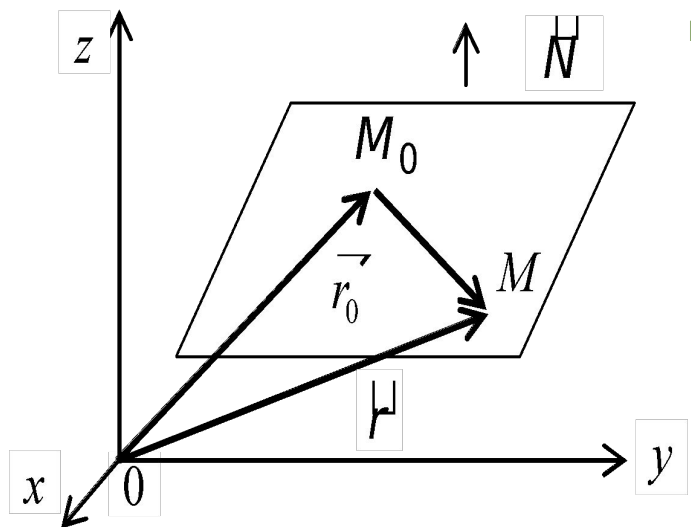
$$(\vec{r}, \vec{N}) - (\vec{r}_0, \vec{N}) = 0$$

$$Ax + By + (-x_0A - y_0B) = 0$$

- 
- **Нормальный вектор** – вектор, перпендикулярный прямой.

■ Задача 2.

- В пространстве дана точка $M_0(\vec{r}_0) = M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $N = (A, B, C)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору.



- Рассмотрим текущую точку прямой

$$M(\vec{r}) = M(x, y, z)$$

вектор $\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ лежит на плоскости.

$$\Rightarrow \overline{M_0M} \perp N \Rightarrow (\overline{M_0M}, N) = 0$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, N) = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

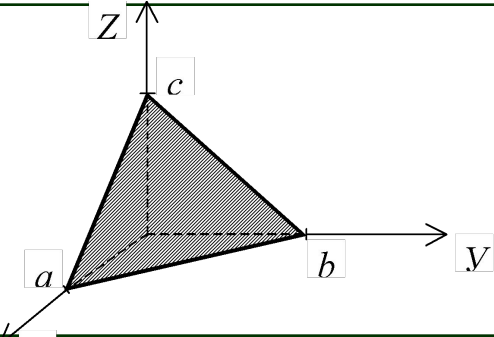
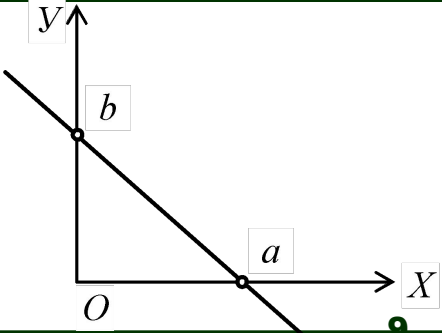
$$(\vec{r}, N) - (\vec{r}_0, N) = 0$$

$$Ax + By + Cz + (-x_0A - y_0B - z_0C) = 0$$

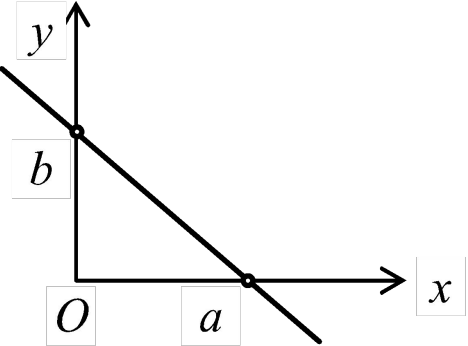
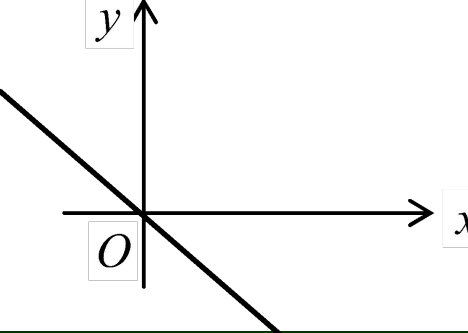
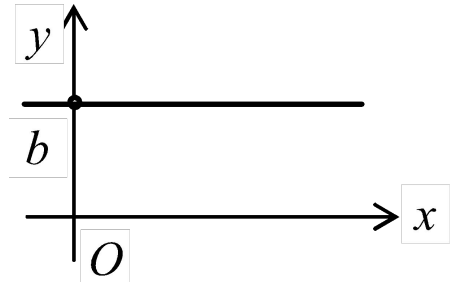
D

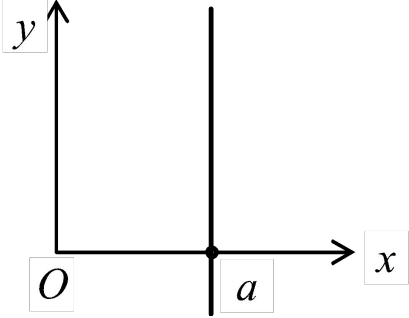
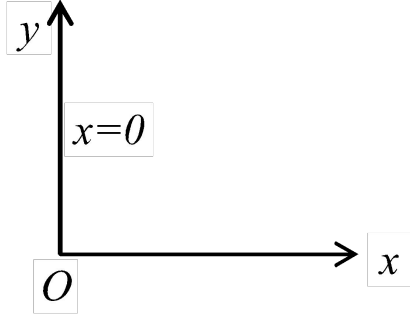
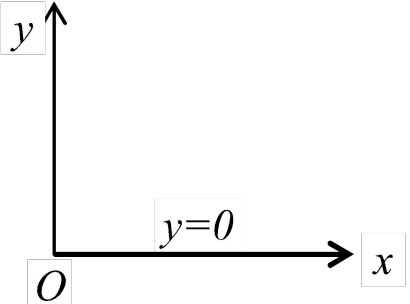
- 
- **Нормальный вектор** – вектор, перпендикулярный плоскости.

Уравнения в отрезках

Общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$	Общее уравнение прямой на плоскости $Ax + By + C = 0$
Пусть $D \neq 0$ тогда $\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1$	Пусть $C \neq 0$ тогда $\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$
Обозначим $a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}$	$a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}$
Получим $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
	

Исследование уравнения прямой

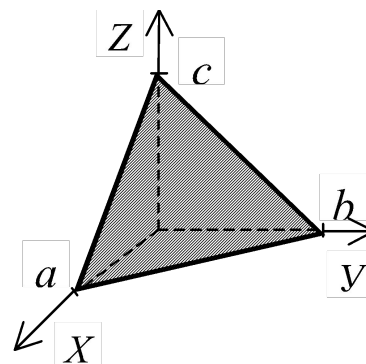
<p>1. $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$</p>	$Ax + By + C = 0$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	 <p>A Cartesian coordinate system with x and y axes. A straight line with a negative slope is plotted. The line intersects the y-axis at a point labeled 'b' and the x-axis at a point labeled 'a'. The origin is labeled 'O'.</p>
<p>2. $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$</p>	$Ax + By = 0,$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \quad y = -\frac{b}{a}x$	 <p>A Cartesian coordinate system with x and y axes. A straight line with a negative slope is plotted, passing through the origin. The origin is labeled 'O'.</p>
<p>3. $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$</p>	$By + C = 0$ $y = b$	 <p>A Cartesian coordinate system with x and y axes. A horizontal line is plotted, intersecting the y-axis at a point labeled 'b'. The origin is labeled 'O'.</p>

<p>4.</p> $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$	$Ax + C = 0$ $x = a$	
<p>5.</p> $A \neq 0, B = 0, C = 0$	$Ax = 0$ $x = 0$	
<p>6.</p> $A = 0, B \neq 0, C = 0$	$By = 0$ $y = 0$	

Исследование общего уравнения плоскости

■ 1. $Ax + By + Cz + D = 0$

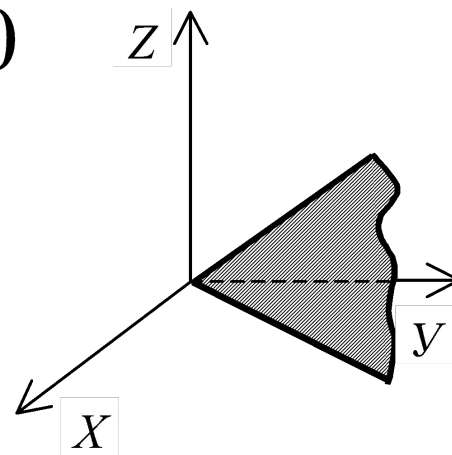
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



■ 2. $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D = 0$

$$Ax + By + Cz = 0$$

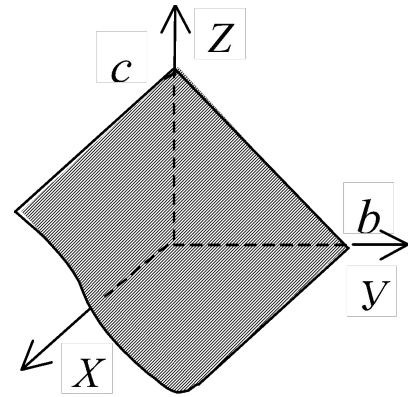
$$O(0,0,0) \in P$$



■ 3a. $A = 0$ $By + Cz + D = 0$

$P \parallel OX$

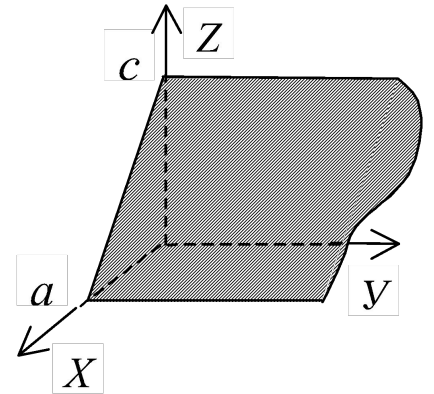
$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



■ 3b. $B = 0$ $Ax + Cz + D = 0$

$P \parallel OY$

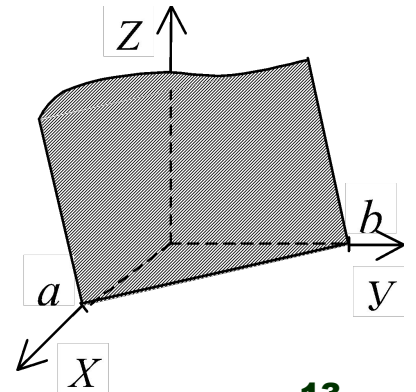
$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$$



■ 3b. $C = 0$ $Ax + By + D = 0$

$P \parallel OZ$

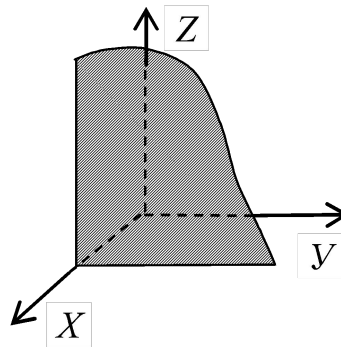
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



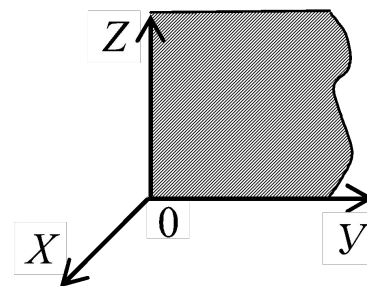
- 4a. $A = 0, B = 0$ $Cz + D = 0$
 $P \parallel XOY$

- 4б. $A = 0, C = 0$ $By + D = 0$
 $P \parallel XOZ$

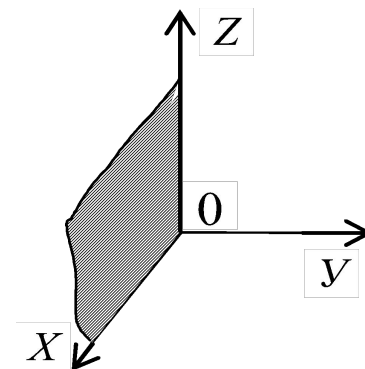
- 4в. $B = 0, C = 0$ $Ax + D = 0$
 $P \parallel YOZ$



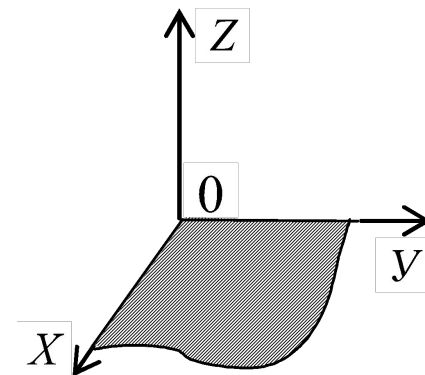
- 5а. $B = 0, C = 0, D = 0$
 $x = 0$ ПЛОСКОСТЬ YOZ



- 5б. $A = 0, C = 0, D = 0$
 $y = 0$ ПЛОСКОСТЬ XOZ

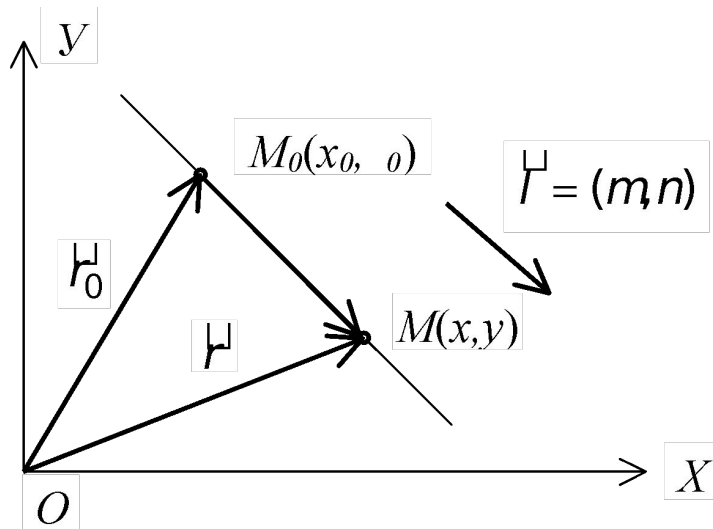


- 5в. $A = 0, B = 0, D = 0$
 $z = 0$ ПЛОСКОСТЬ XOY



Параметрическое уравнение прямой на плоскости и в пространстве

- Дана точка M_0 и вектор \vec{l} . Записать уравнение прямой, проходящей через эту точку параллельно вектору \vec{l} .



- **Опр.** Вектор, параллельный данной прямой или лежащий на этой прямой, называется направляющим вектором прямой.

$$\overline{M_0M} \parallel \vec{l} \Rightarrow \overline{M_0M} = t \cdot \vec{l}$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{l}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{l}, \text{ где } t \text{ – параметр}$$

Прямая на плоскости

$$M_0(x_0, y_0)$$

$$\vec{\Gamma} = (m, n)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \end{cases}$$

Прямая в пространстве

$$M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{\Gamma} = (m, n, p)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

Каноническое уравнение прямой на плоскости и в пространстве

- Если исключить параметр t из параметрического уравнения, то получим *каноническое уравнение прямой*.

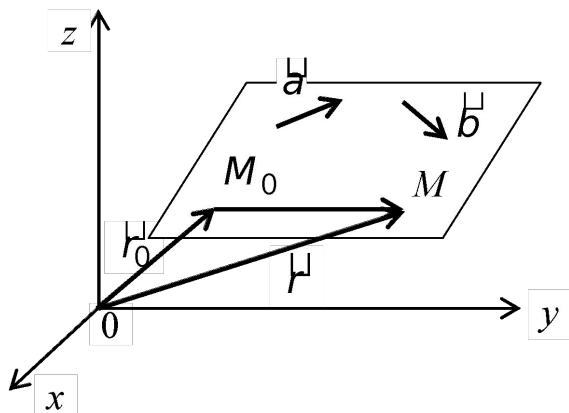
на плоскости	в пространстве
$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$	$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$

Уравнение прямой проходящей через две точки M_1 и M_2

на плоскости	в пространстве
$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ $M(x, y)$	$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ $M(x, y, z)$
$l' = \overline{M_1M_2}$	
$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$	$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$
$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

Параметрическое уравнение плоскости

- Дана точка $M_0(\vec{r}_0)$ и два неколлинеарных вектора \vec{a} и \vec{b} . Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно векторам \vec{a} и \vec{b} .



- Векторы $\vec{M}_0M, \vec{a}, \vec{b}$ компланарны, \Rightarrow линейно зависимы \Rightarrow один из них является линейной комбинацией остальных, т.е.

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = p\vec{a} + q\vec{b}$$

p, q – параметры

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + p\vec{a} + q\vec{b} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + pa_1 + qb_1, \\ y = y_0 + pa_2 + qb_2, \\ z = z_0 + pa_3 + qb_3. \end{cases}$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум векторам

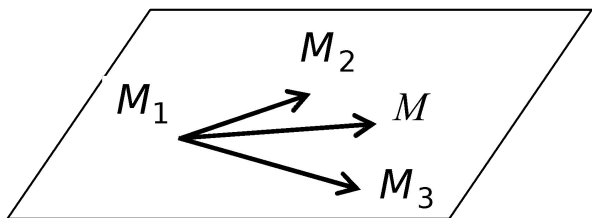
- Т.к. векторы $\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}$ компланарны, то $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}, \vec{b}) = 0$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \quad M_2(x_2, y_2, z_2) \quad M_3(x_3, y_3, z_3)$$

- Векторы $\overrightarrow{M_1M}$ $\overrightarrow{M_1M_2}$ $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны



$$\left(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3} \right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$