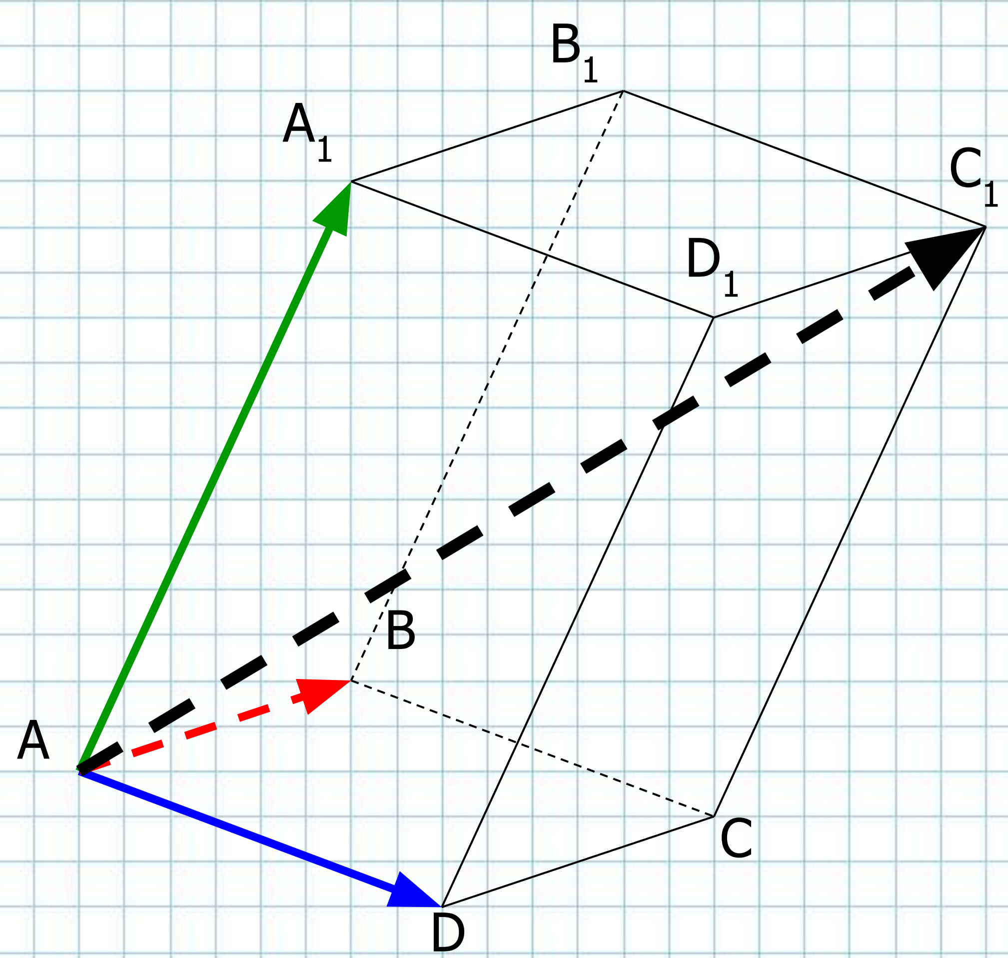
Векторы в пространстве.

Геометрия,

11 класс.

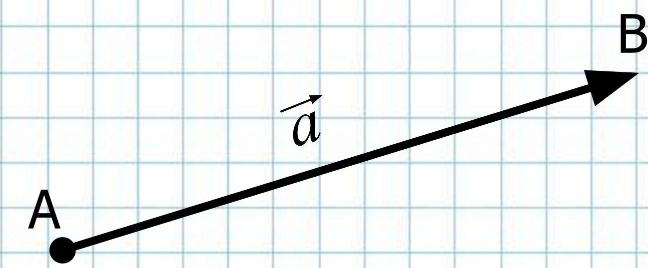


$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$$

Воробьев Леонид Альбертович, г.Минск

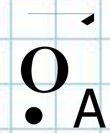
I. Определение вектора. Основные понятия, связанные с векторами.

Как и в плоскости, в пространстве вектор определяется как *направленный отрезок*:



Точка А – *начало вектора*, В – *конец вектора*. Записывают: $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.

Обычную точку в пространстве мы также можем считать вектором, у которого начало совпадает с конечной точкой. Такой вектор называется *нулевым* и обозначается: $\vec{0}$ или $\overrightarrow{AA}$.



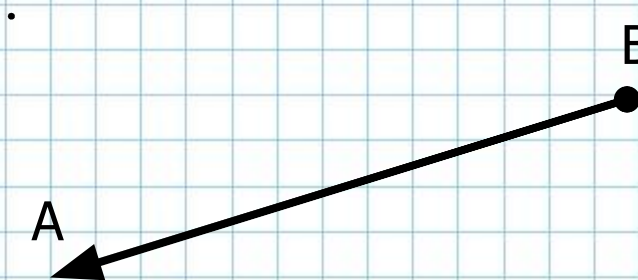
Длина отрезка, изображающего вектор, называется *модулем* (или абсолютной величиной) вектора, т.е.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB\ (\text{åä.î ò ð.}).$$

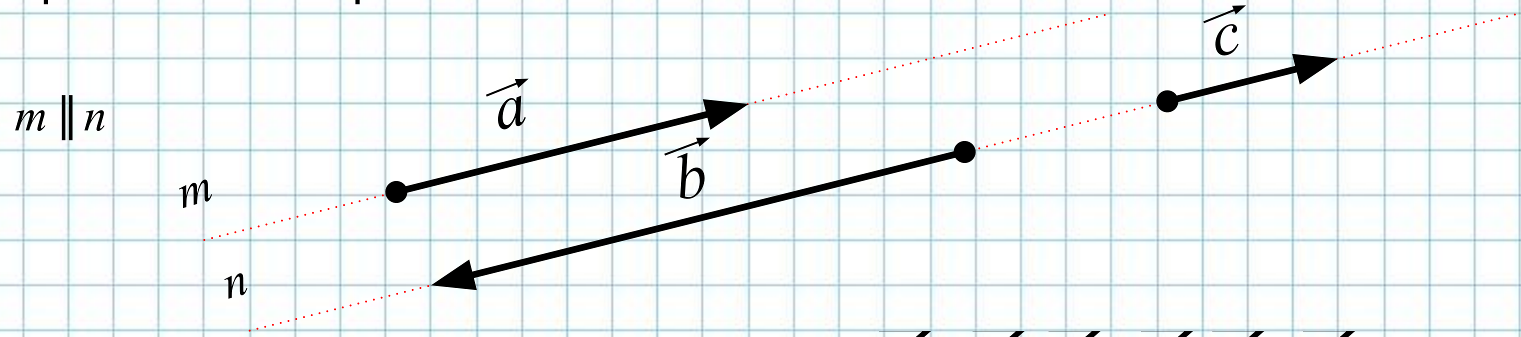
Естественно, что $\left|\overrightarrow{AA}\right| = 0.$

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ являются *противоположными*. Очевидно, что:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right|.$$



Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых:

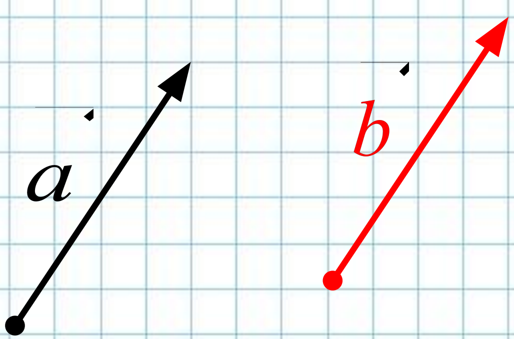


Обозначение коллинеарных векторов: $\vec a \parallel \vec b,\ \vec a \parallel \vec c,\ \vec c \parallel \vec b.$

Коллинеарные векторы, в свою очередь, бывают одинаково направленными (или сонаправленными) и противоположно направленными. В нашем случае:

$\vec a \uparrow\uparrow \vec c$ – *сонаправленные* векторы, $\vec a \uparrow\downarrow \vec b$ – $\vec c \uparrow\downarrow \vec b$ *противоположно направленные* векторы.

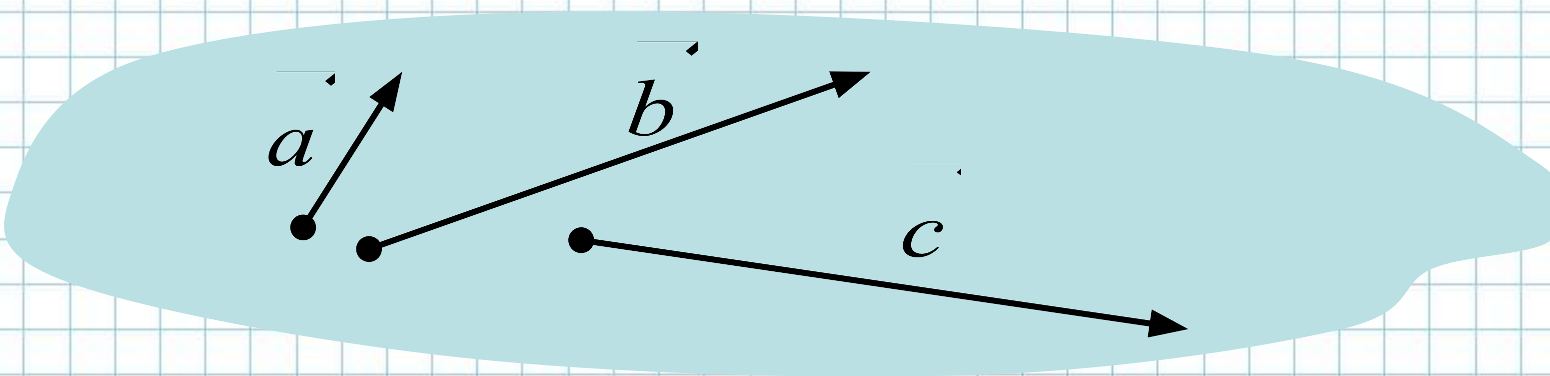
Два вектора называются *равными*, если: 1) они сонаправлены; и 2) их модули равны, т.е. $\vec a = \vec b \Leftrightarrow \vec a \uparrow\uparrow \vec b$ è $|\vec a| = |\vec b|$



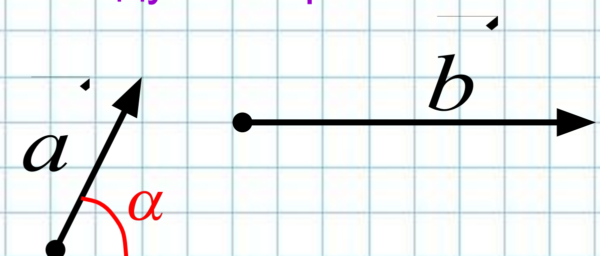
От произвольной точки пространства можно отложить <u>единственный</u> вектор, равный данному:

$$\vec{a} = \overrightarrow{MN}$$

Три вектора называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости:



Углом между векторами называется угол между их направлениями:



$$\widehat{\vec{a},\vec{b}} = \alpha$$

Величина угла между векторами может изменятся от 0^0 до 180^0. Подумайте, когда:

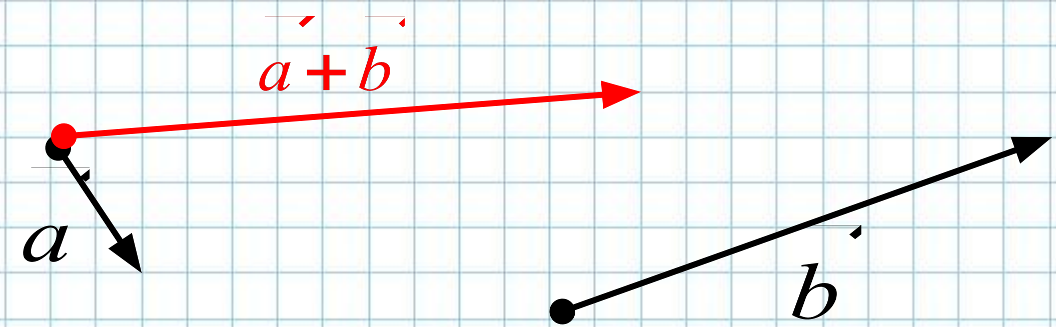
а) $\widehat{\vec{a},\vec{b}} = 0^0$ и б) $\widehat{\vec{a},\vec{b}} = 180^0$?

Ответ: а) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; б) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

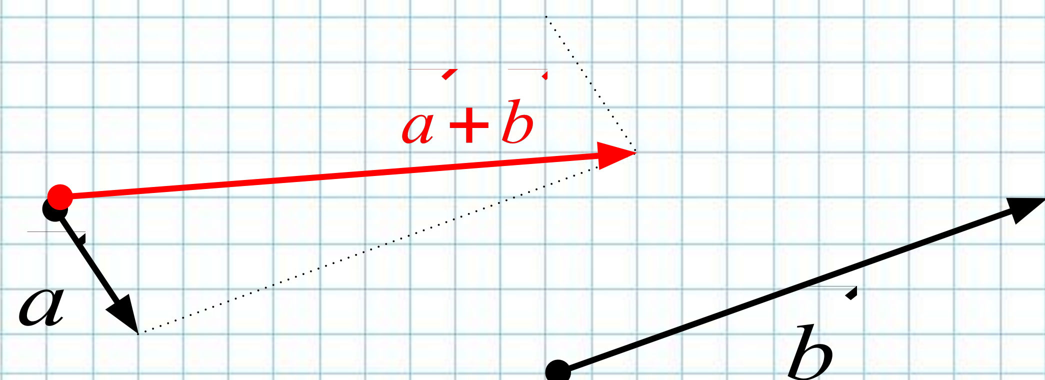
II. Действия с векторами.

Векторы можно складывать – в результате получается ***вектор***. При сложении двух векторов применяются правила *треугольника* или *параллелограмма*:

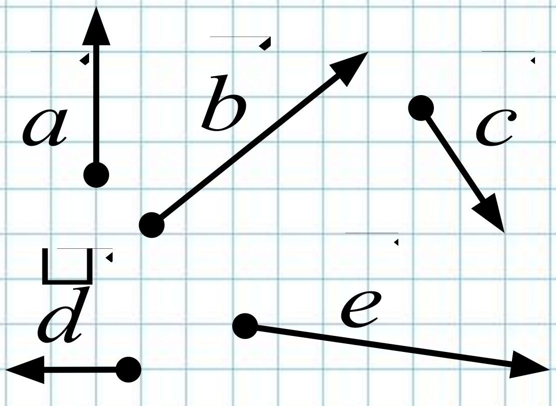
1) При применении правила треугольника один из векторов откладывают от конца другого, т.е. $\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KF}=\overrightarrow{MF}$:

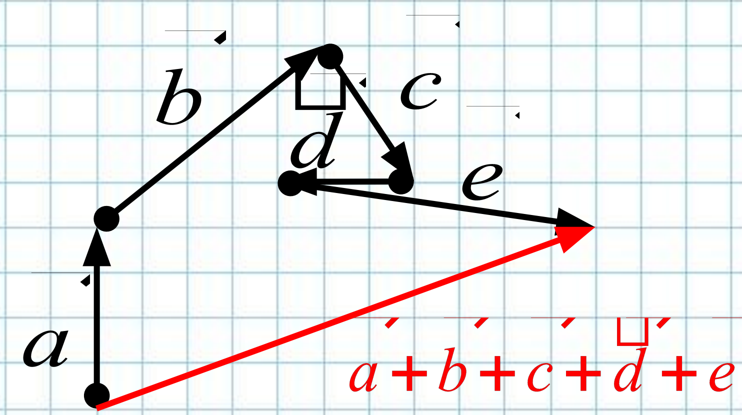


2) При применении правила параллелограмма оба вектора откладывают из общей начальной точки, т.е. $\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MF}$, где F – вершина параллелограмма, противоположная общей начальной точке векторов.

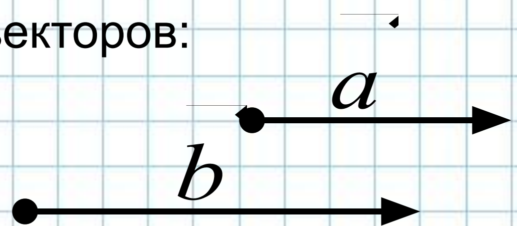


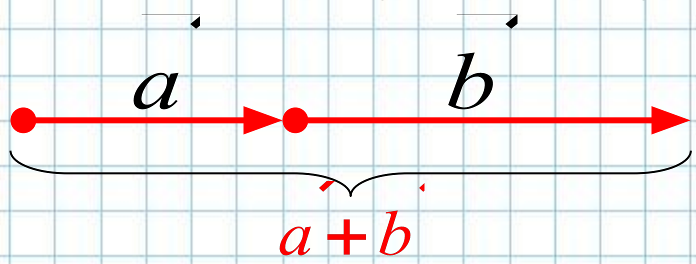
При сложении трех и более векторов применяют *правило многоугольника*:





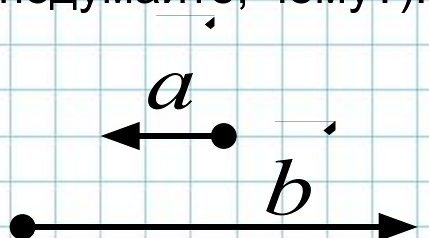
Обратим внимание, что при сложении сонаправленных векторов получается вектор, сонаправленный с данными и его модуль равен сумме модулей слагаемых векторов:

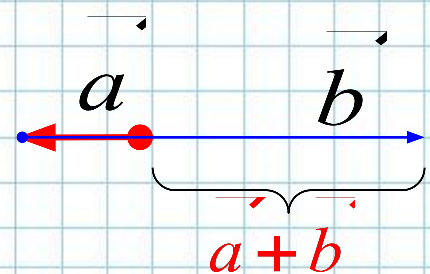




$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$$

При сложении противоположно направленных векторов получается вектор, сонаправленный с вектором, имеющим бóльшую длину и его модуль равен … (подумайте, чему?):

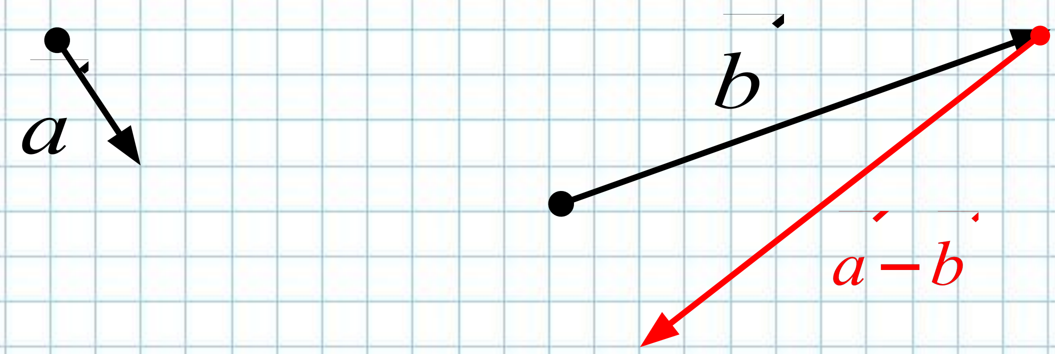




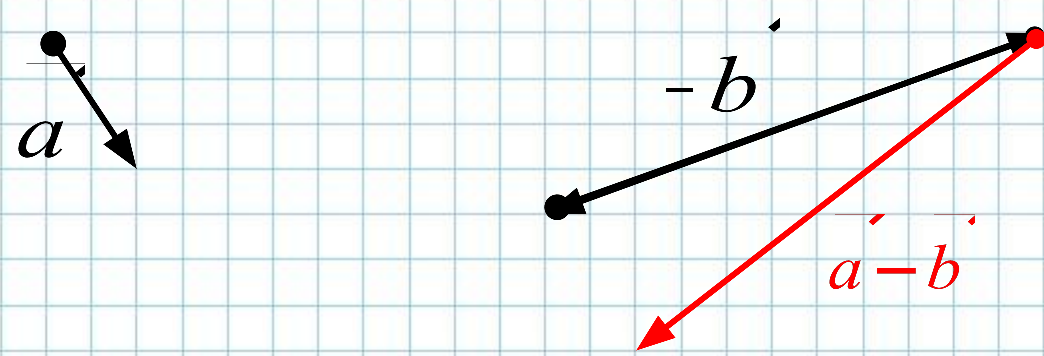
$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{b}\right| - \left|\vec{a}\right|$$

$$\left|\vec{b}\right| > \left|\vec{a}\right|$$

Также можно найти разность двух векторов – в результате получается **_вектор_**. При вычитании двух векторов применяется видоизмененное *правило треугольника* – вначале оба вектора строятся с общей начальной точкой, затем соединяются концы этих векторов с выбором направления к «уменьшаемому» вектору:



Или: т.к. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, то можно вначале построить вектор, противоположный вектору $\vec{b}$, а затем оба вектора сложить по правилу треугольника.



Сложение векторов, как и сложение чисел подчиняется законам:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ – переместительный закон сложения;

2) $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ – сочетательный закон сложения;

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

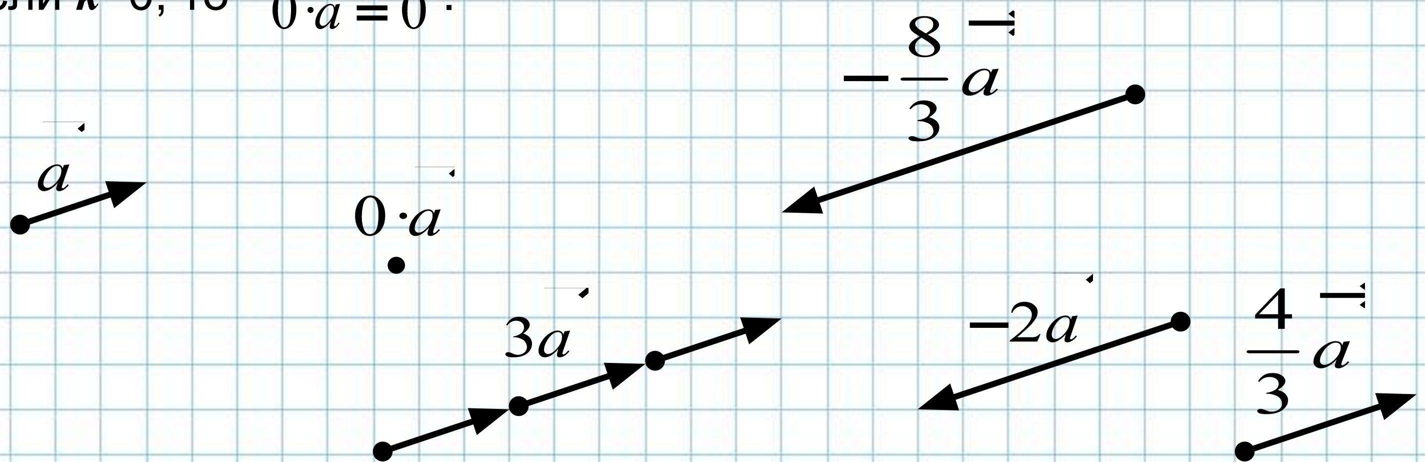
4) $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$.

Следующее действие с векторами – умножение вектора на число $\boldsymbol{k}$. В результате этого действия получается **вектор**, причем:

1) если $\boldsymbol{k}$>0, то $k\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$ и $\left|k\vec{a}\right|=\left|k\right|\cdot\left|\vec{a}\right|$;

2) если $\boldsymbol{k}$<0, то $k\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$ и $\left|k\vec{a}\right|=\left|k\right|\cdot\left|\vec{a}\right|$;

3) если $\boldsymbol{k}$=0, то $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.



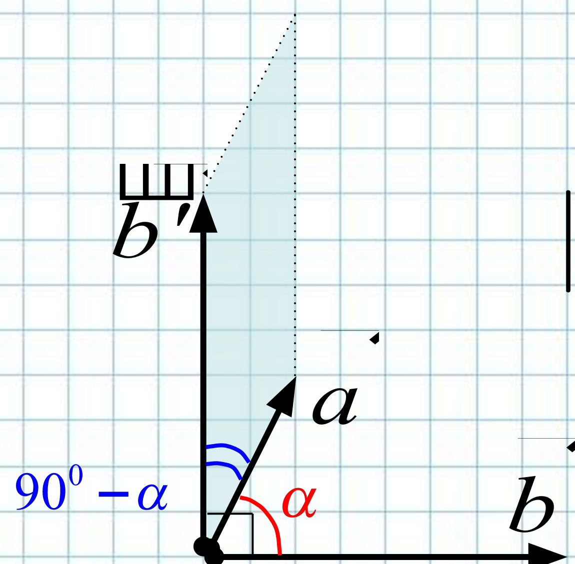
И еще одно действие с векторами – умножение двух векторов. В школьном курсе геометрии изучается *скалярное произведение* векторов. В результате этого действия (в отличии от предыдущих действий с векторами) получается **число**, равное произведению модулей двух данных векторов на косинус угла между этими векторами, т.е.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right).$$

Геометрически скалярное произведение векторов можно понимать как площадь параллелограмма (или противоположная ей величина), стороны которого образуются одним из данных векторов и вектором, перпендикулярным второму с таким же модулем:

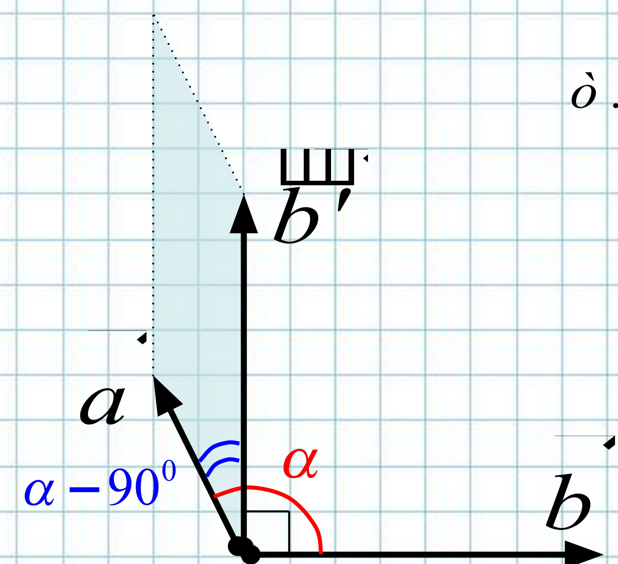
$$S = |\vec{a}|\cdot|\vec{b'}|\cdot\sin\left(90^0-\alpha\right) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha = \vec{a}\cdot\vec{b};\qquad S = |\vec{a}|\cdot|\vec{b'}|\cdot\sin\left(\alpha-90^0\right) = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha = -\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

ò .å. $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = S$



α – острый угол

$$|\vec{b}| = |\vec{b'}|$$



α – тупой угол

III. Координаты вектора. Действия в координатах.

Теперь рассмотрим все эти понятия и действия с точки зрения координатного пространства. Вспомним, что любая точка пространства задается тремя координатами **A**(x;y;z).

$B(x_2;y_2;z_2)$

$A(x_1;y_1;z_1)$

Если принять вектор за параллельный перенос начальной точки $A(x_1;y_1;z_1)$ в конечную точку $B(x_2;y_2;z_2)$, то координаты вектора показывают: *на сколько изменяются соответствующие координаты начальной точки при параллельном переносе в конечную*, т.е.

$$\overrightarrow{AB}\left(x_2-x_1;\,y_2-y_1;\,z_2-z_1\right)$$

Естественно, что $\overrightarrow{AA}(0;0;0)$ и $\overrightarrow{BA}\left(x_1-x_2;\,y_1-y_2;\,z_1-z_2\right)$.

Т.к. модуль вектора равен длине изображающего его отрезка, то:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{m^2+n^2+k^2}$$, где $\overrightarrow{AB}(m;n;k)$ – координаты вектора.

Два вектора, заданные координатами $\vec{a}(m_1;n_1;k_1)$ è $\vec{b}(m_2;n_2;k_2)$ будут равны, если (подумайте) …

…равны их соответствующие координаты, т.е. $m_1=m_2,\ n_1=n_2,\ k_1=k_2.$

Для сложения двух векторов, заданных координатами, нужно просто сложить их соответствующие координаты, т.е.

$$\overrightarrow{(m_1;n_1;k_1)}+\overrightarrow{(m_2;n_2;k_2)}=\overrightarrow{(m_1+m_2;n_1+n_2;k_1+k_2)}.$$

При вычитании векторов, заданных координатами, нужно найти разности их соответствующих координат, т.е.

$$\overrightarrow{(m_1;n_1;k_1)}-\overrightarrow{(m_2;n_2;k_2)}=\overrightarrow{(m_1-m_2;n_1-n_2;k_1-k_2)}.$$

Умножение вектора, заданного координатами, на число выполняется так:

$$a\overrightarrow{(m;n;k)}=\overrightarrow{(am;an;ak)}, \qquad a \in R.$$

Скалярное произведение двух векторов, заданных координатами, равно сумме произведений соответствующих координат, т.е.

$$\overrightarrow{(m_1;n_1;k_1)}\cdot\overrightarrow{(m_2;n_2;k_2)}=m_1m_2+n_1n_2+k_1k_2.$$

Условием коллинеарности двух векторов, заданных координатами, будет пропорциональность их соответствующих координат:

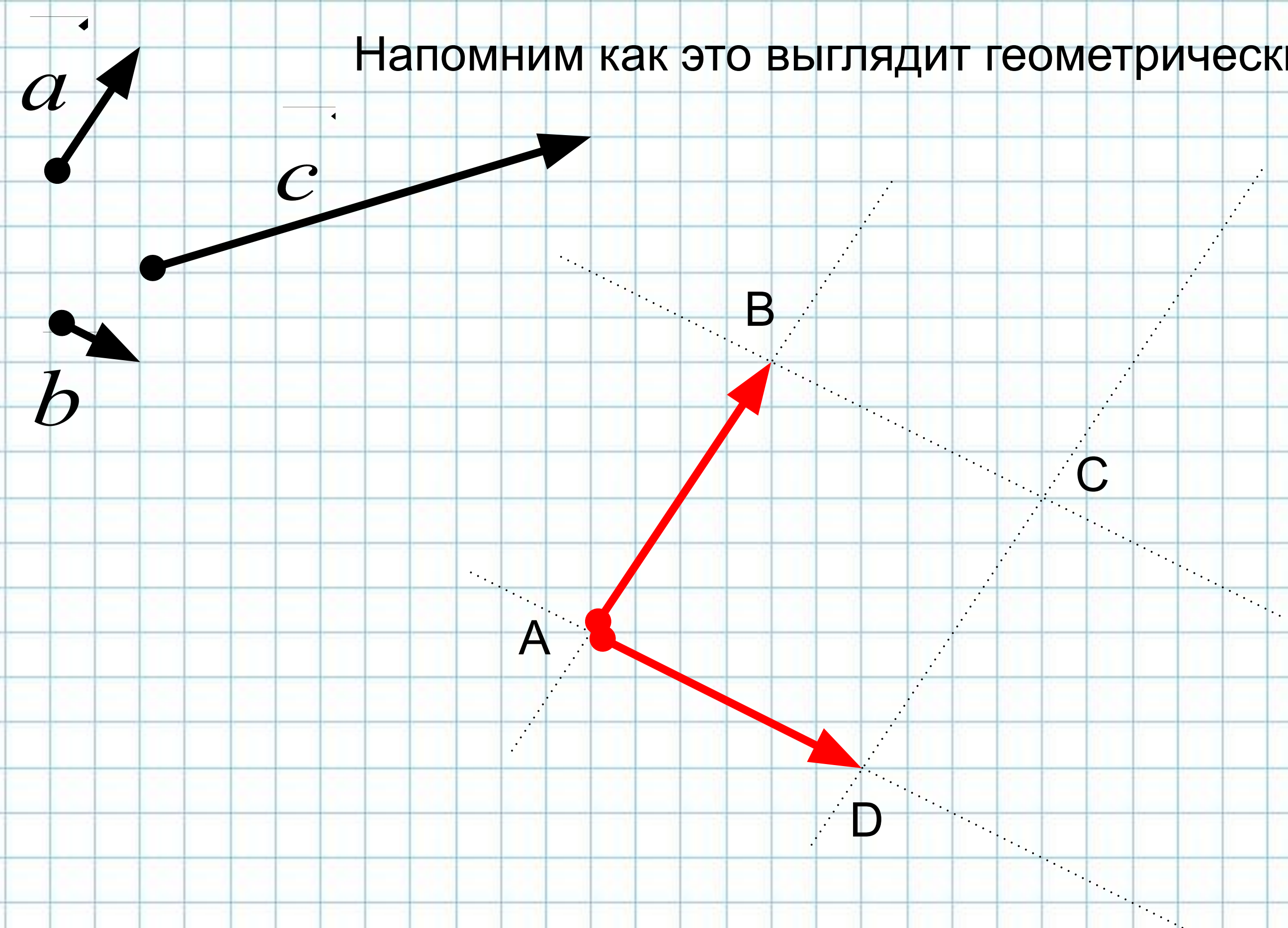
$$\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{k_1}{k_2}$$

Самостоятельно разберитесь, когда $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ и $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

Для выяснения компланарности трех векторов необходимо, чтобы любой из этих векторов можно было разложить по двум оставшимся, т.е.

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in \alpha \Leftrightarrow \vec{c} = x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b},\ \ x, y \in \mathbf{R}.$$

Напомним как это выглядит геометрически:



По правилу параллелограмма: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Но $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} \parallel \vec{b}$.

Значит, $\overrightarrow{AB} = x\cdot\vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = y\cdot\vec{b} \Rightarrow \vec{c} = x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b},\ \ x, y \in \mathbf{R}.$

В данном конкретном случае: $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, если аппликаты всех точек равны.

Аналитически выяснить компланарность трех векторов, заданных координатами, можно решая систему:

$$\begin{cases} m_3 = xm_1 + ym_2, \\ n_3 = xn_1 + yn_2, \\ k_3 = xk_1 + yk_2, \end{cases} \quad \text{ãäå} \quad \begin{matrix} \vec{a}(m_1; n_1; k_1) \\ \vec{b}(m_2; n_2; k_2). \\ \vec{c}(m_3; n_3; k_3) \end{matrix}$$

Если система имеет единственное решение, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

Любой вектор пространства можно разложить по трем <u>некомпланарным</u> векторам, т.е.

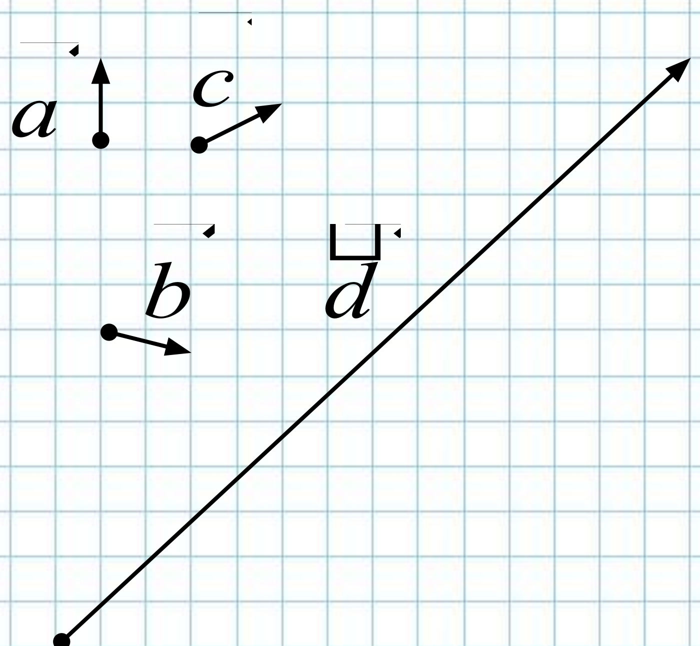
$$\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}, \quad \text{ãäå} \ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \notin \alpha; \quad x, y, z \in \mathbf{R}.$$

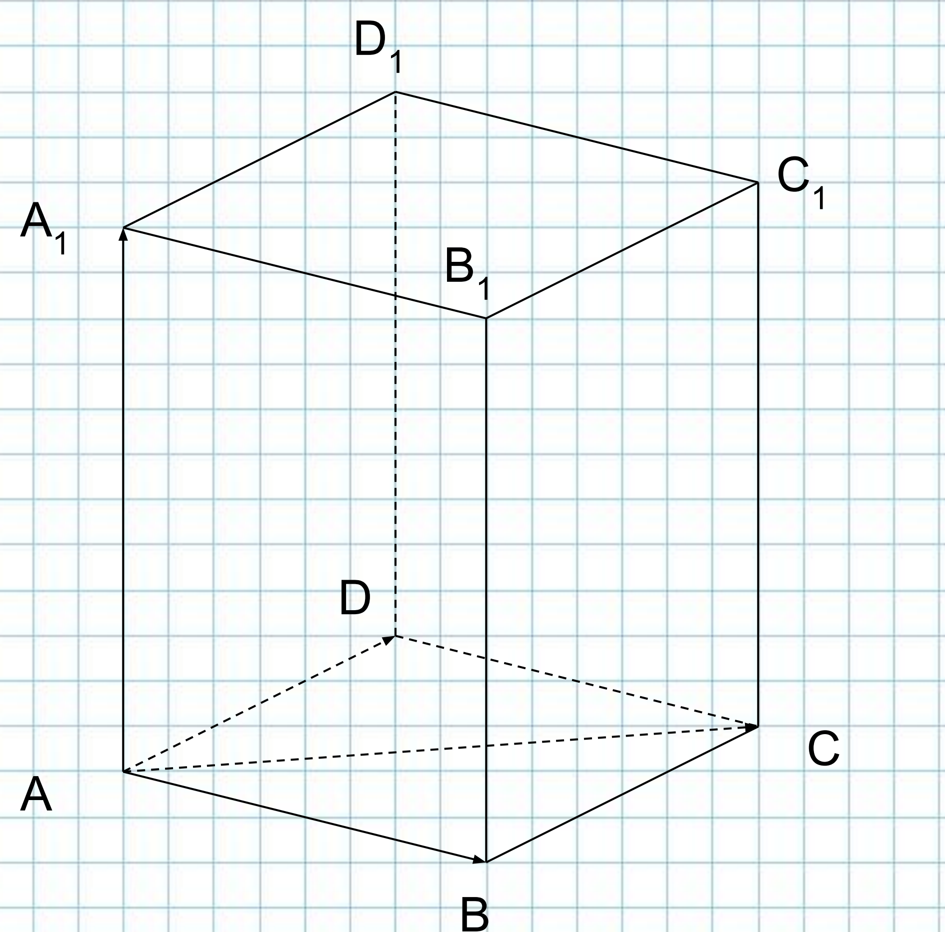
Аналитически разложение любого вектора $\vec{d}(m_4; n_4; k_4)$ по трем некомпланарным векторам $\vec{a}(m_1; n_1; k_1)$, $\vec{b}(m_2; n_2; k_2)$ $\grave{e}$ $\vec{c}(m_3; n_3; k_3)$ сводится к решению системы:

$$\begin{cases} m_4 = xm_1 + ym_2 + zm_3, \\ n_4 = xn_1 + yn_2 + zn_3, \\ k_4 = xk_1 + yk_2 + zk_3, \end{cases}$$

А решение этой системы – числа x, y и z являются коэффициентами разложения вектора $\vec{d}$ по трем векторам $\vec{a}, \vec{b}$ $\grave{e}$ $\vec{c}$.

Геометрически это означает возможность построения параллелепипеда, в котором диагональ задается вектором $\vec{d}$, а все три измерения – векторами, коллинеарными векторам $\vec{a}, \vec{b}$ è $\vec{c}$.

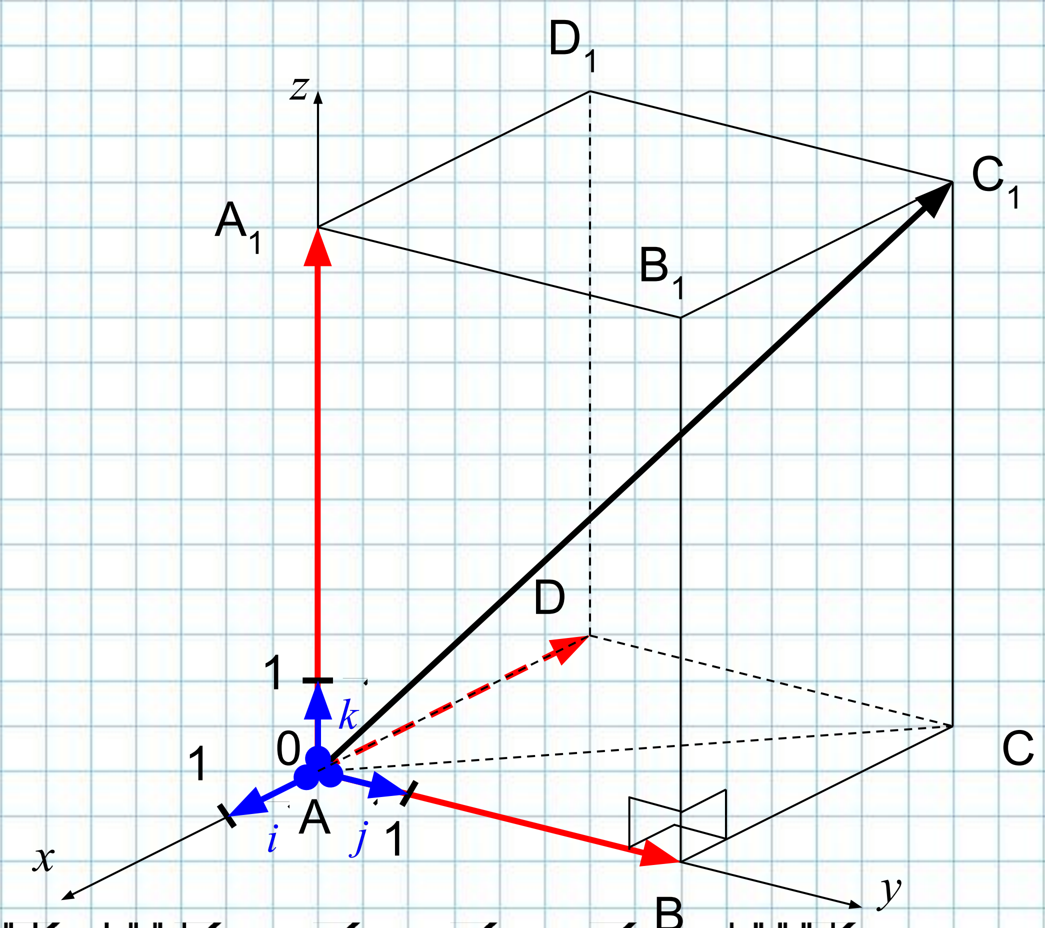




$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\vec{d} = x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b} + z\cdot\vec{c}$$

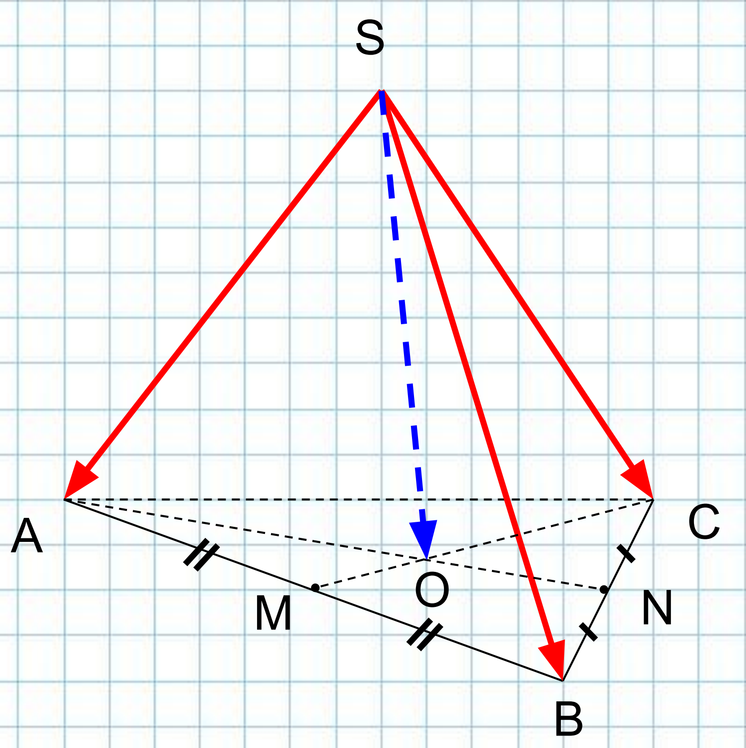
В прямоугольной системе координат в пространстве векторы $\vec{i}(1;0;0)$, $\vec{j}(0;1;0)$ и $\vec{k}(0;0;1)$ называются *единичными координатными векторами (или **о́ртами**)*. Т.к. эти векторы являются некомпланарными, то любой вектор пространства можно разложить по ортам. При этом образуется прямоугольный параллелепипед, а коэффициенты разложения – координаты данного вектора.



$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{AC_1}(x;y;z)$$

В данном случае x=–3; y=4; z=6, т.е. координаты вектора $\overrightarrow{AC_1}(-3;4;6)$.

Умение выполнять действия с векторами и понимание вышеизложенного материала позволяет решать некоторые геометрические задачи с помощью векторов. Этот способ получил название **векторного способа решения задач**. Мы познакомимся с ним на следующих уроках… .



Для любого тетраэдра: $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right)$