

*учитель математики  
МКОУ СОШ с УИОП № 1 г. Малмыжа Кировской  
области*

*учитель математики  
Дягилева Л. В.*

# *Векторы в пространстве*

# *Цели урока*

- *Знать:* *определение вектора в пространстве и связанные с ним понятия; равенство векторов.*
- *Уметь:* *решать задачи по данной теме.*

# Физические величины

Скорость  $\vec{v}$

Ускорение  $\vec{a}$

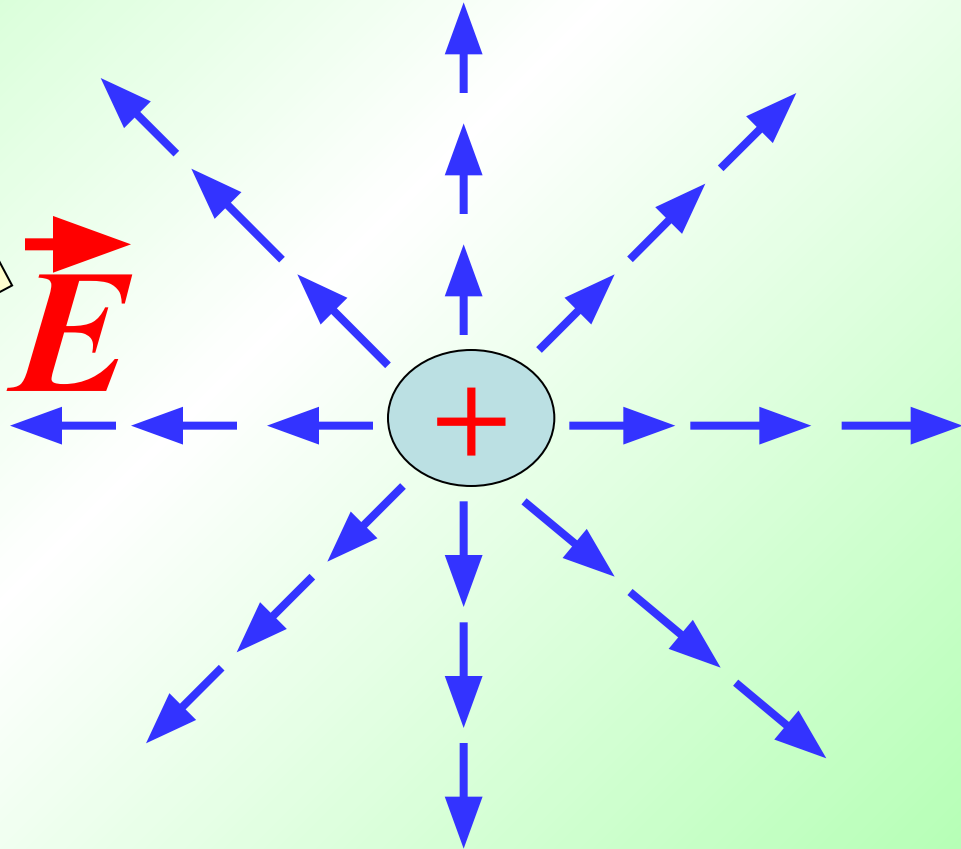
Перемещение  $\vec{s}$

Сила  $\vec{F}$



# Электрическое поле

Вектор  
напряженности

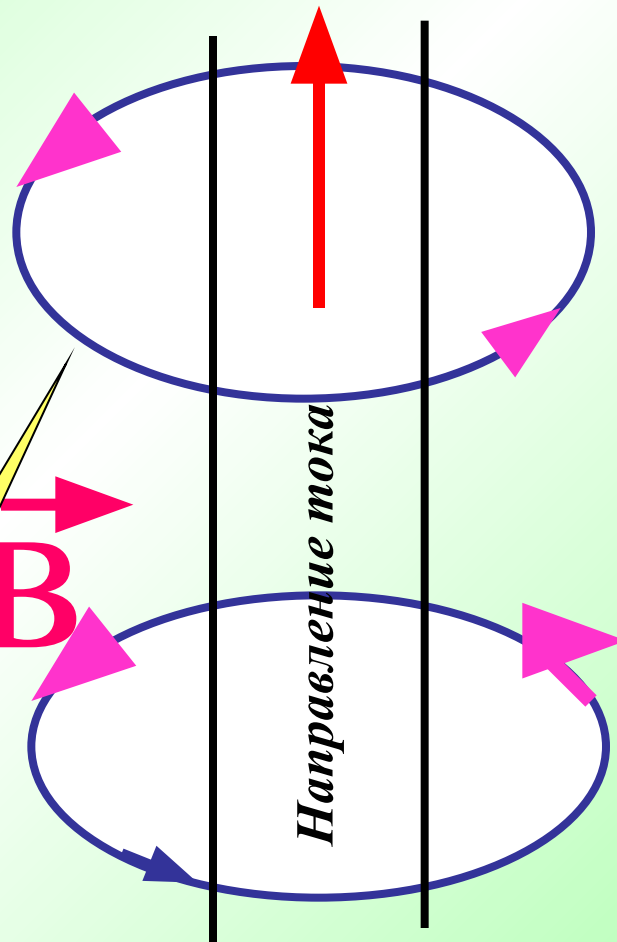


# Магнитное поле

Вектор магнитной  
индукции

$\vec{B}$

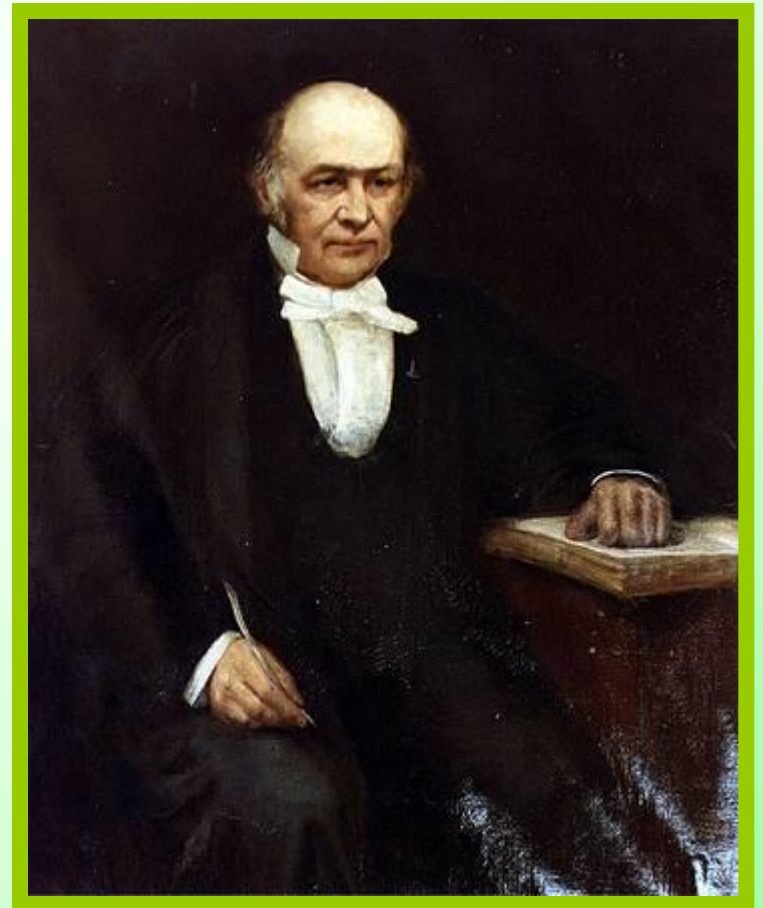
Направление тока



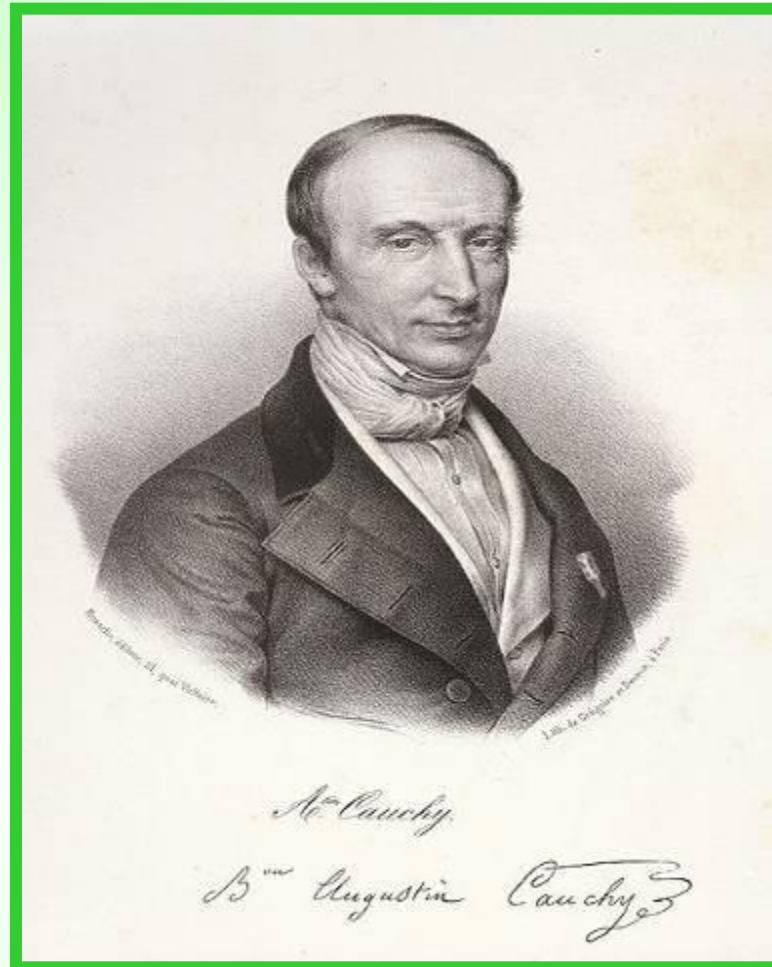
*Понятие вектора появилось в 19 веке в  
работах математиков*

**Г. Грассмана**

**У. Гамильтона**



*Современная символика для обозначения  
вектора  $\vec{r}$  была введена в 1853 году  
французским математиком **О. Коши.***



## *Задание*

*Записать все термины по теме «Векторы на плоскости».*

**Вектор**

**Нулевой вектор**

**Длина вектора**

**Коллинеарные векторы**

**Сонаправленные векторы**

**Противоположно направленные**

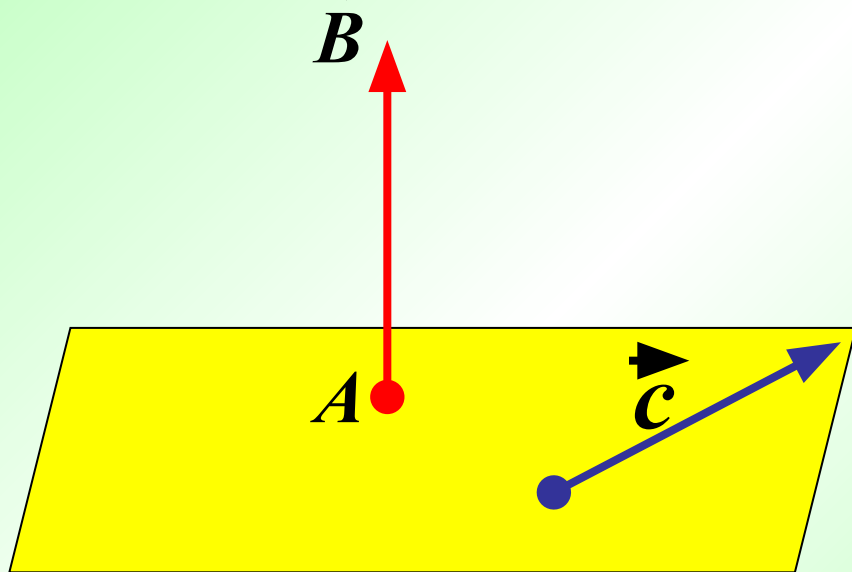
**векторы**

**Равенство векторов**

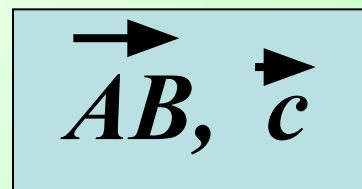


# Определение вектора в пространстве

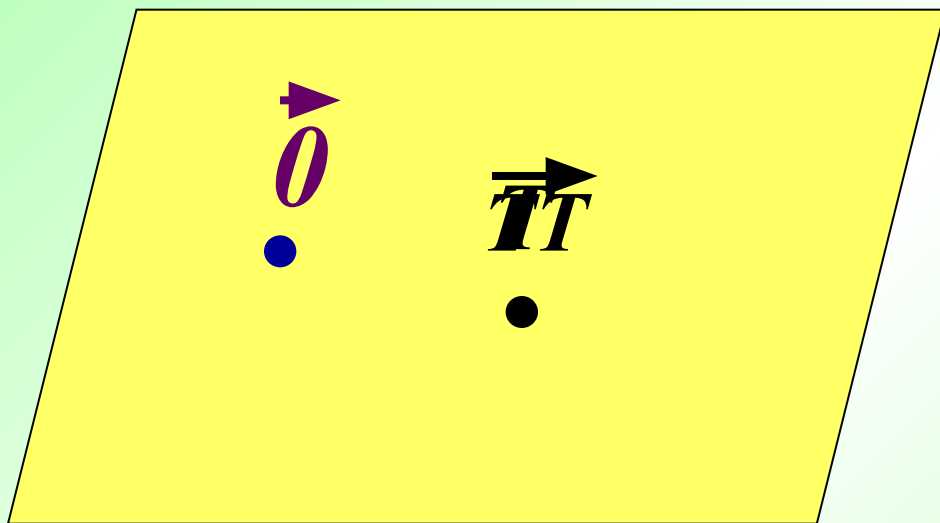
Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой-концом, называется **вектором**.



Обозначение вектора



Любая точка пространства также может рассматриваться как вектор. Такой вектор называется **нулевым**.



Обозначение нулевого вектора

$\vec{TT}, \vec{0}$

# Длина ненулевого вектора

- Длиной вектора  $\vec{AB}$  называется длина отрезка  $AB$ .
- Длина вектора  $\vec{a}$  (вектора  $a$ ) обозначается так:

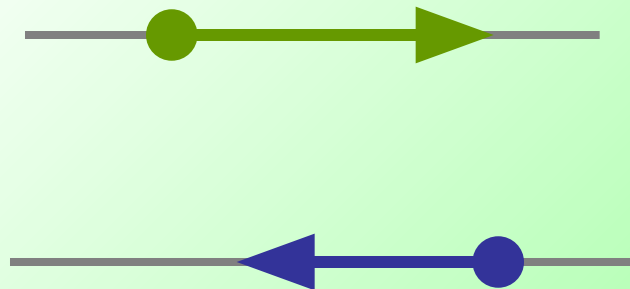
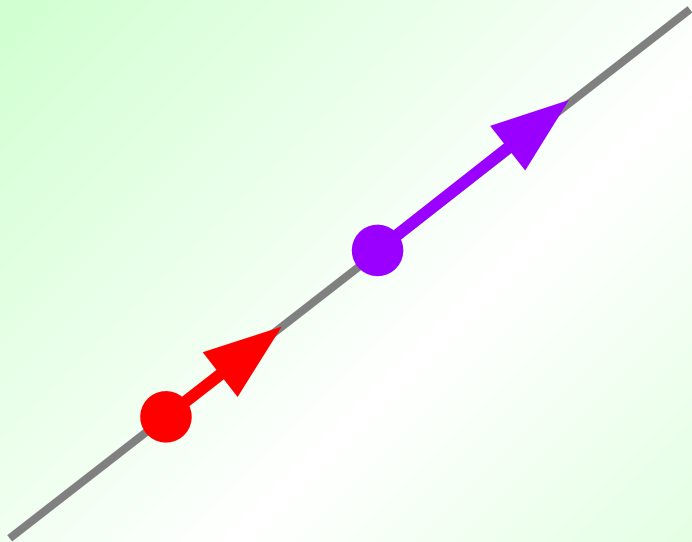
$$|\vec{AB}|, |a|$$

- Длина нулевого вектора считается равной нулю:

$$|\vec{0}| = 0$$

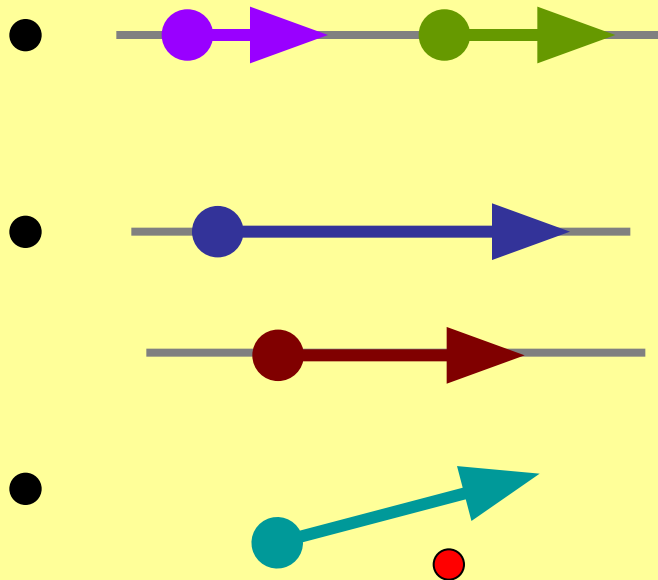
# Определение коллинеарности векторов

- Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

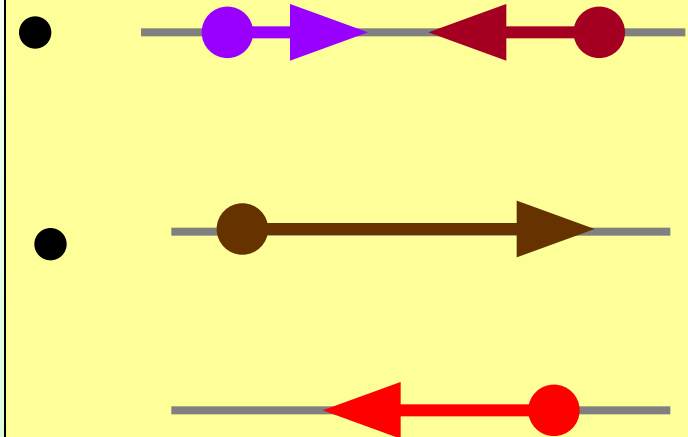


# *Коллинеарные векторы*

## **Сонаправленные векторы**

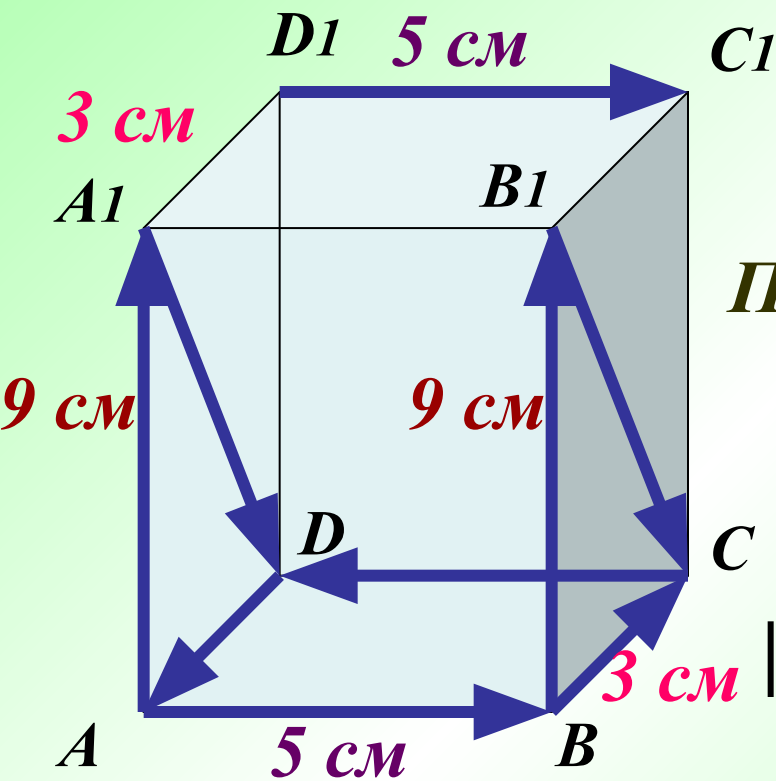


## **Противоположно направленные векторы**



Какие векторы на рисунке сонаправленные?  
 Какие векторы на рисунке противоположно  
 направлены?

Найти длины векторов  $\vec{AB}$ ;  $\vec{BC}$ ;  $\vec{CC}_1$ .



*Сонаправленные векторы:*

$$\vec{AA_1} \uparrow\uparrow \vec{BB_1}, \vec{A_1D} \uparrow\uparrow \vec{B_1C}$$

$$\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{D_1C_1}$$

*Противоположно-направленные:*

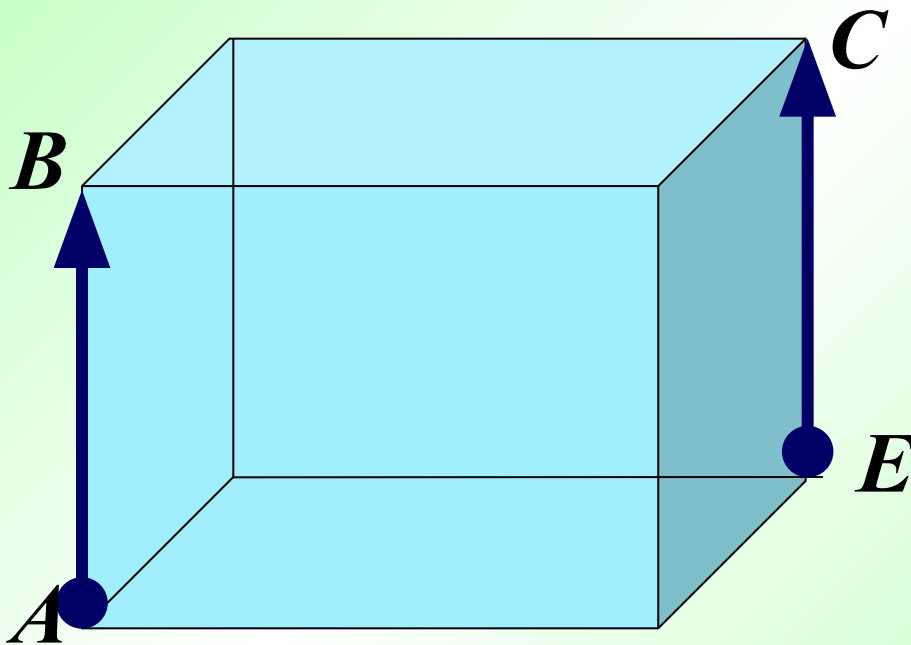
$$\vec{CD} \uparrow\downarrow \vec{D_1C_1}, \vec{CD} \uparrow\downarrow \vec{AB},$$

$$\vec{DA} \uparrow\downarrow \vec{BC}$$

$$|\vec{AB}| = 5 \text{ см}; |\vec{BC}| = 3 \text{ см}; |\vec{BB_1}| = 9 \text{ см}.$$

# Равенство векторов

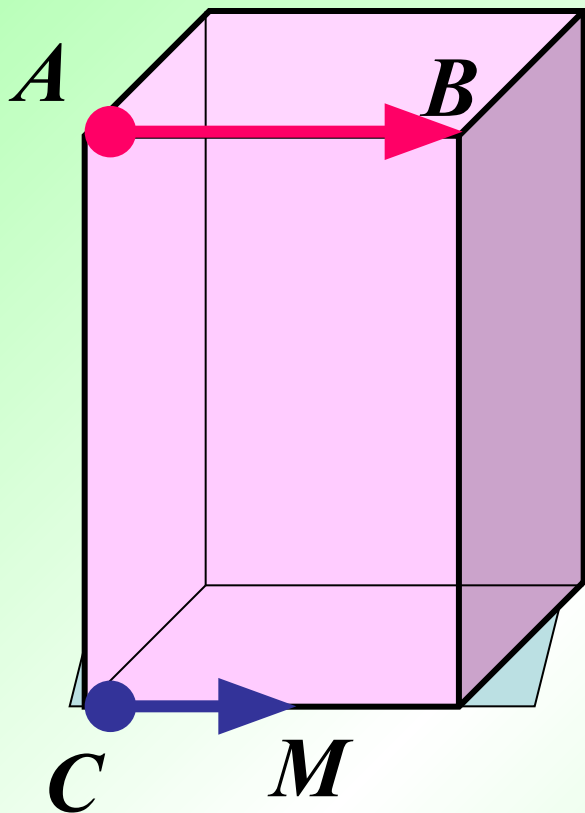
Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.



$$\vec{AB} = \vec{EC}, \text{ так как}$$
$$\vec{AB} \parallel \vec{EC} \text{ и } |\vec{AB}| = |\vec{EC}|$$

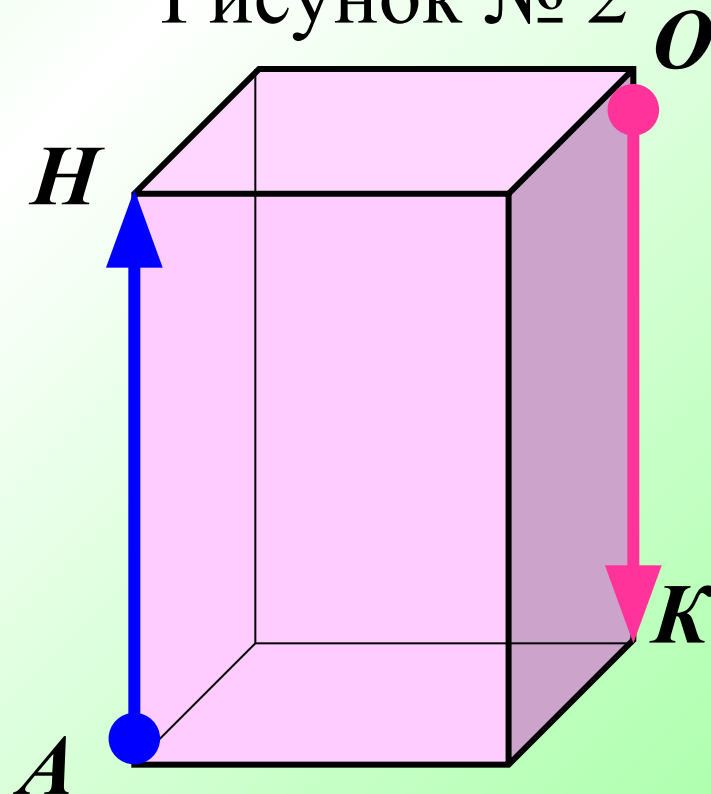
Могут ли быть равными векторы на рисунке? Ответ обоснуйте.

• Рисунок № 1



$$\vec{AB} \neq \vec{CM}, \text{ т. к. } |\vec{AB}| \neq |\vec{CM}|$$

Рисунок № 2



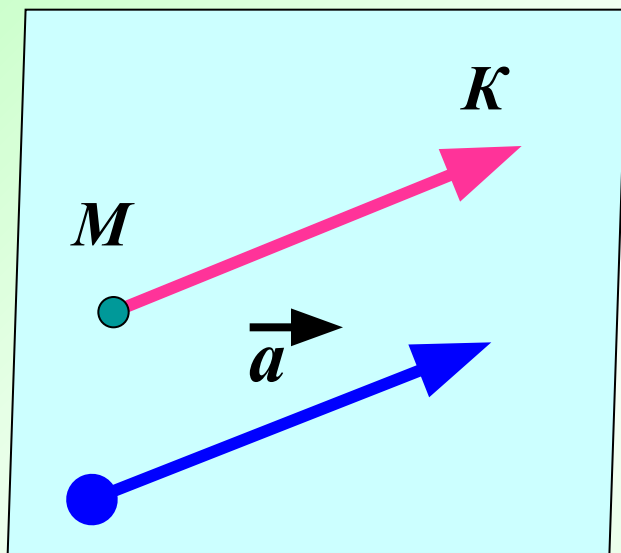
$$\vec{AH} \neq \vec{OK}, \text{ т. к. } \vec{AH} \nparallel \vec{OK}$$



Доказать, что от любой точки пространства можно отложить вектор, равный данному, и притом только один

Дано:  $\vec{a}, M$ .

Доказать:  $\vec{v} = \vec{a}, M \in \vec{v}$ , единственный.



**Доказательство:**

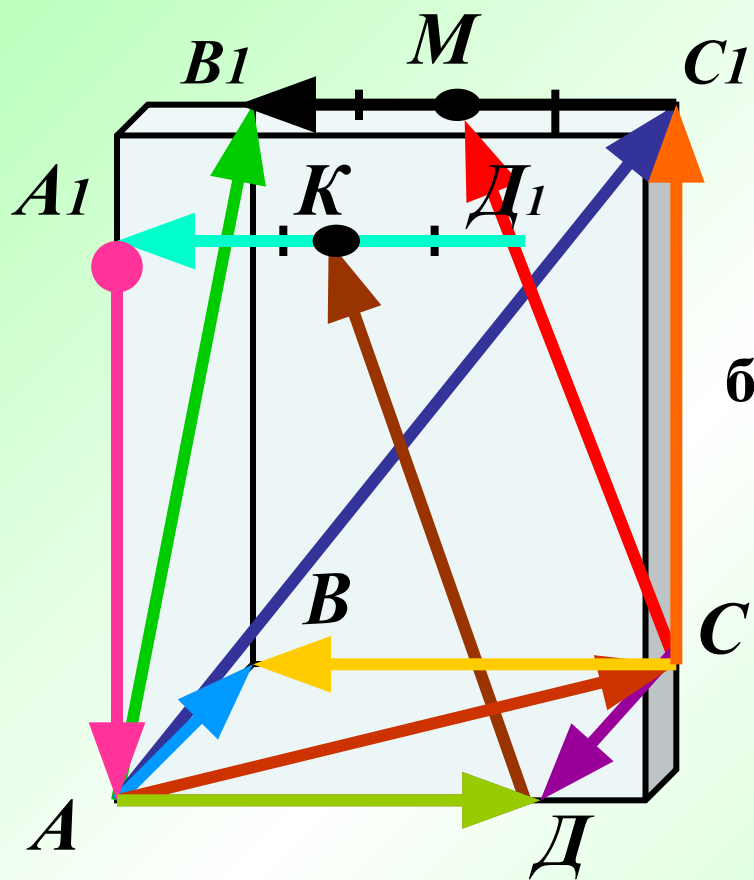
Проведем через вектор  $a$  и точку  $M$  плоскость.

В этой плоскости построим  $\vec{MK} = \vec{a}$ .

Из теоремы о параллельности \_\_\_\_\_  
прямых следует  $\vec{MK} = \vec{a}$  и  $M \in MK$ .

# Решение задач

№ 322



Укажите на этом рисунке все пары:

а) сонаправленных векторов

$\vec{DK}$  и  $\vec{CM}$ ;  $\vec{CB}$  и  $\vec{C1B1}$  и  $\vec{D1A1}$ ;

б) противоположно направленных векторов

$\vec{CD}$  и  $\vec{AB}$ ;  $\vec{AD}$  и  $\vec{CB}$ ;  $\vec{AA1}$  и  $\vec{CC1}$ ;

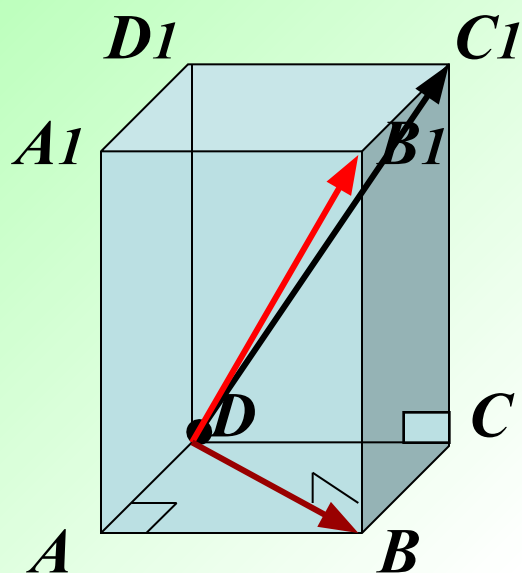
$\vec{AD}$  и  $\vec{D1A1}$ ;  $\vec{AD}$  и  $\vec{C1B1}$ ;

в) равных векторов

$\vec{CB} = \vec{C1B1}$ ;  $\vec{D1A1} = \vec{C1B1}$ ;  $\vec{DK} = \vec{CM}$

# Решение задач

№ 321 (б)



Решение:

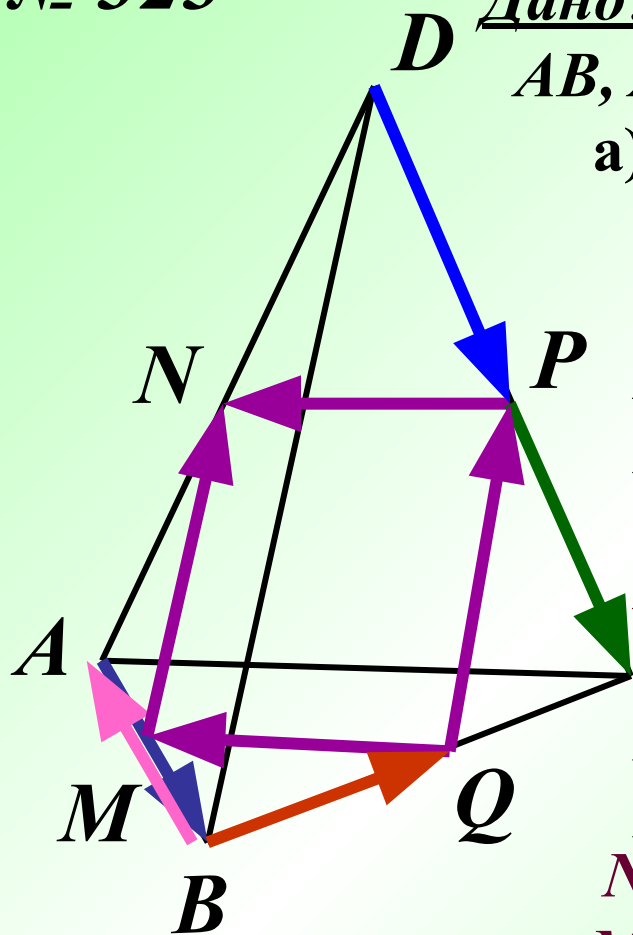
$$DC1 = \sqrt{DC^2 + CC_1^2} = \sqrt{81 + 144} = 15$$

$$DB = \sqrt{DA^2 + AB^2} = \sqrt{81 + 64} = \sqrt{145}$$

$$DB1 = \sqrt{DB^2 + BB_1^2} = \sqrt{145 + 144} = 17$$

# Решение задач

№ 323



Дано: точки  $M, N, P, Q$  – середины сторон  $AB, AD, DC, BC$ ;  $AB=AD=DC=BC=DD=AC$ ;

а) выписать пары равных векторов;

$$\vec{MN} = \vec{QP}; \vec{PN} = \vec{QM}; \vec{DP} = \vec{PC};$$

б) определить вид четырехугольника  $MNPQ$ .

Решение:  $NP$ -средняя линия треугольника  $ADC$ ,  $NP = 0,5AC$ ,  $NP \parallel AC$ ;

$MQ$ -средняя линия тр.  $ABC$ ,  $MQ = 0,5AC$ ,

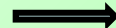
$MQ \parallel AC$ ,  $NP=MQ$ ,  $NP \parallel MQ$ .

$PQ$ -средняя линия треугольника  $DBC$ ;

$PQ = 0,5DB$ ,  $PQ \parallel DB$ ;

$NM$ -средняя линия треугольника  $ADB$ ,

$MN = 0,5DB$ ,  $MN \parallel DB$ ,  $PQ=MN$ ,  $PQ \parallel MN$ .



*По условию все ребра тетраэдра равны, то он правильный и скрещивающиеся ребра в нем перпендикулярны.*

***DV перпендикулярно AC .***

$$NP=MQ=PQ=MN$$

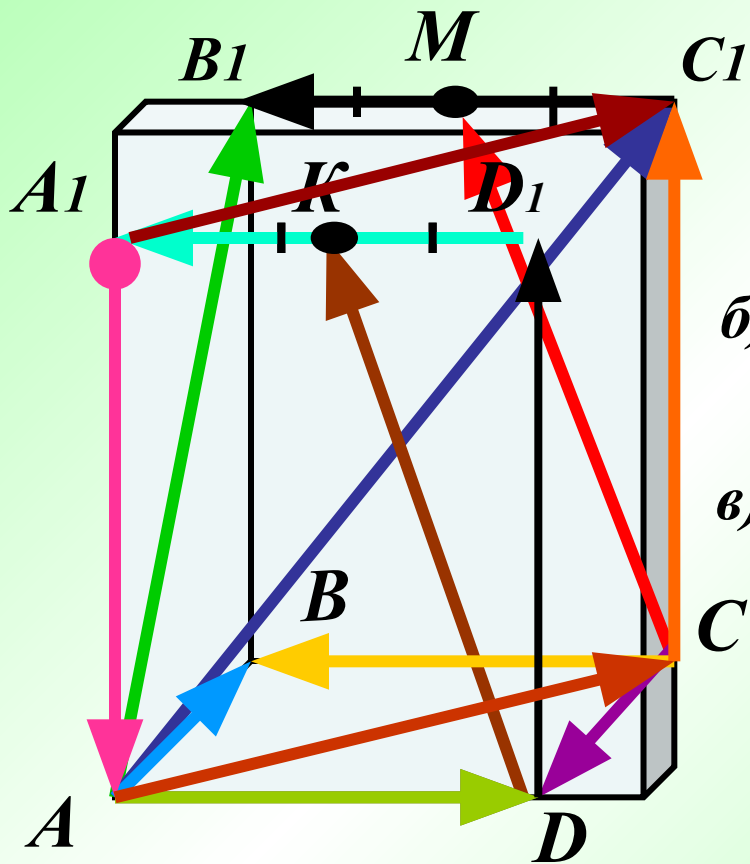
$$NP \parallel MQ$$

$$MN \parallel PQ$$

***MNPQ-***  
***квадрат***

# Решение задач

№ 326 (а, б, в)



Назовите вектор, который  
получится, если отложитъ:

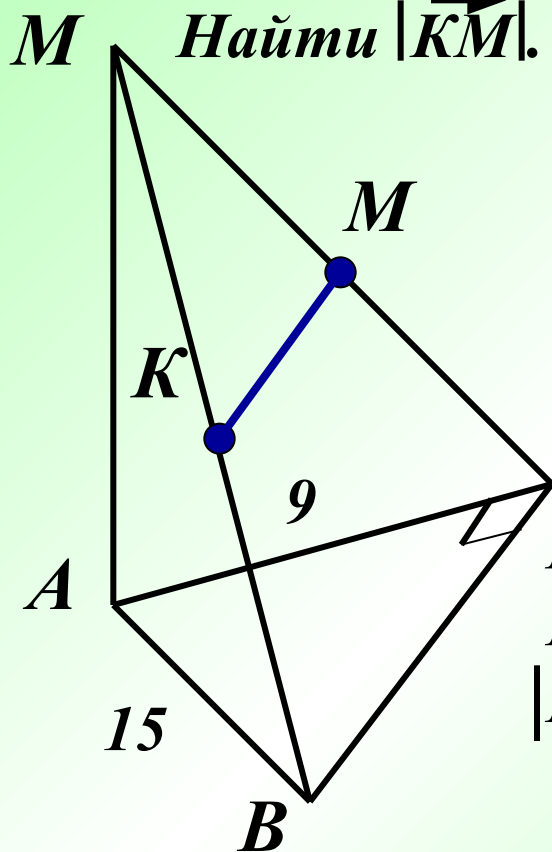
а) от точки  $C$  вектор, равный  $\overrightarrow{DD_1}$   
 $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{DD_1}$

б) от точки  $D$  вектор, равный  $\overrightarrow{CM}$   
 $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CM}$

в) от точки  $A_1$  вектор, равный  $\overrightarrow{AC}$   
 $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AC}$

# Самостоятельная работа

Дан тетраэдр  $MAVC$ , угол  $ACB$  прямой. Точки  $K$  и  $P$  середины сторон  $MB$  и  $MC$ ,  $|\vec{AC}| = 9$  см и  $|\vec{BA}| = 15$  см.  
Найти  $|\vec{KM}|$ .



*Решение:*

*Треугольник  $ABC$ , угол  $ACB$ - прямой.*

*По теореме Пифагора*

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{225 - 81} = 12$$

*$KM$  – средняя линия треугольника  $MBC$ ,*

$$KM = 0,5BC = 6 \text{ см.}$$

$$|\vec{KM}| = 6 \text{ см.}$$

# Кроссворд

1 Г А М И Л Ь Т О Н

2 В Е К Т О Р

К О Л Л И Н Е А Р Н Ы Е

4 К О Ш И

5 Д Л И Н А

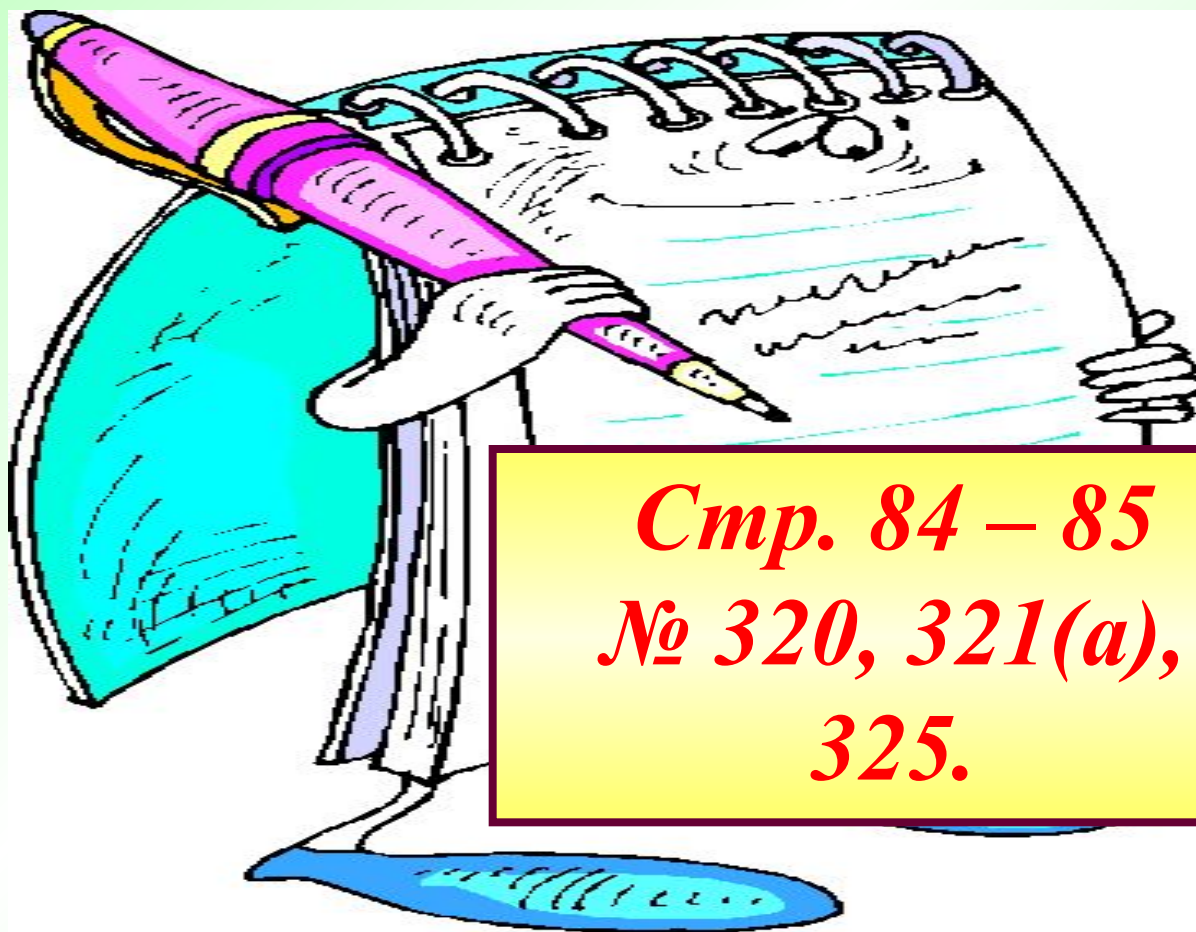
6 И Н Д У К Ц И И

7 Р А В Н Ы М И





# *Домашнее задание*



*Стр. 84 – 85  
№ 320, 321(а),  
325.*

# Перемена



## Список литературы:

1. «Геометрия 10-11» Учебник для общеобразовательных учреждений. Л. С. Атанасян, И. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. М.: Просвещение, 2010.
2. Энциклопедический словарь юного математика. Сост. Э 68 А.. П. Савин.- М. Педагогика, 1985.
3. Поурочные разработки по геометрии: 10 класс (сост. В. А. Яровенко) в помощь школьному учителю- М.: ВАКО, 2007.

## 4 Сайты:

- [http://images.yandex.ru/yandsearch?ed=1&text=%D0%9A%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%B8%D0%BD%D0%BA%D0%B8%20%D0%BD%D0%B0%20%D1%88%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%83%D1%8E%20%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%83&p=1&img\\_url=img1.liveinternet.ru%2Fimages%2Fattach%2Fc%2F3%2F76%2F873%2F76873211\\_default.jpg&rpt=simage](http://images.yandex.ru/yandsearch?ed=1&text=%D0%9A%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%B8%D0%BD%D0%BA%D0%B8%20%D0%BD%D0%B0%20%D1%88%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%83%D1%8E%20%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%83&p=1&img_url=img1.liveinternet.ru%2Fimages%2Fattach%2Fc%2F3%2F76%2F873%2F76873211_default.jpg&rpt=simage)
- [http://images.yandex.ru/yandsearch?ed=1&text=%D0%9A%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%B8%D0%BD%D1%83%D1%8E%20%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%83&img\\_url=i.allday.ru%2Fuploads%2Fposts%2Fthumbs%2F1217821185\\_12.jpg&rpt=simage&p=2](http://images.yandex.ru/yandsearch?ed=1&text=%D0%9A%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%B8%D0%BD%D1%83%D1%8E%20%D1%82%D0%B5%D0%BC%D1%83&img_url=i.allday.ru%2Fuploads%2Fposts%2Fthumbs%2F1217821185_12.jpg&rpt=simage&p=2)
- [http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%D0%B2%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D1%8B%20%D0%B2%20%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D0%B8%20%D0%BA%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%B8%D0%BD%D0%BA%D0%B8&img\\_url=www.statistica.com.au%2FMATHSC%257E1%2Fimg560.gif&rpt=simage&p=145](http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%D0%B2%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D1%8B%20%D0%B2%20%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D0%B8%20%D0%BA%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%B8%D0%BD%D0%BA%D0%B8&img_url=www.statistica.com.au%2FMATHSC%257E1%2Fimg560.gif&rpt=simage&p=145)
- [http://ru.wikipedia.org/wiki/Файл:Cauchy\\_Augustin\\_Louis\\_dibner\\_coll\\_SIL14-C2-03a.jpg](http://ru.wikipedia.org/wiki/Файл:Cauchy_Augustin_Louis_dibner_coll_SIL14-C2-03a.jpg)
- [http://ru.wikipedia.org/wiki/Файл:William\\_Rowan\\_Hamilton\\_painting.jpg](http://ru.wikipedia.org/wiki/Файл:William_Rowan_Hamilton_painting.jpg)
- <http://ru.wikipedia.org/wiki/Файл:Hgrassmann.jpg>