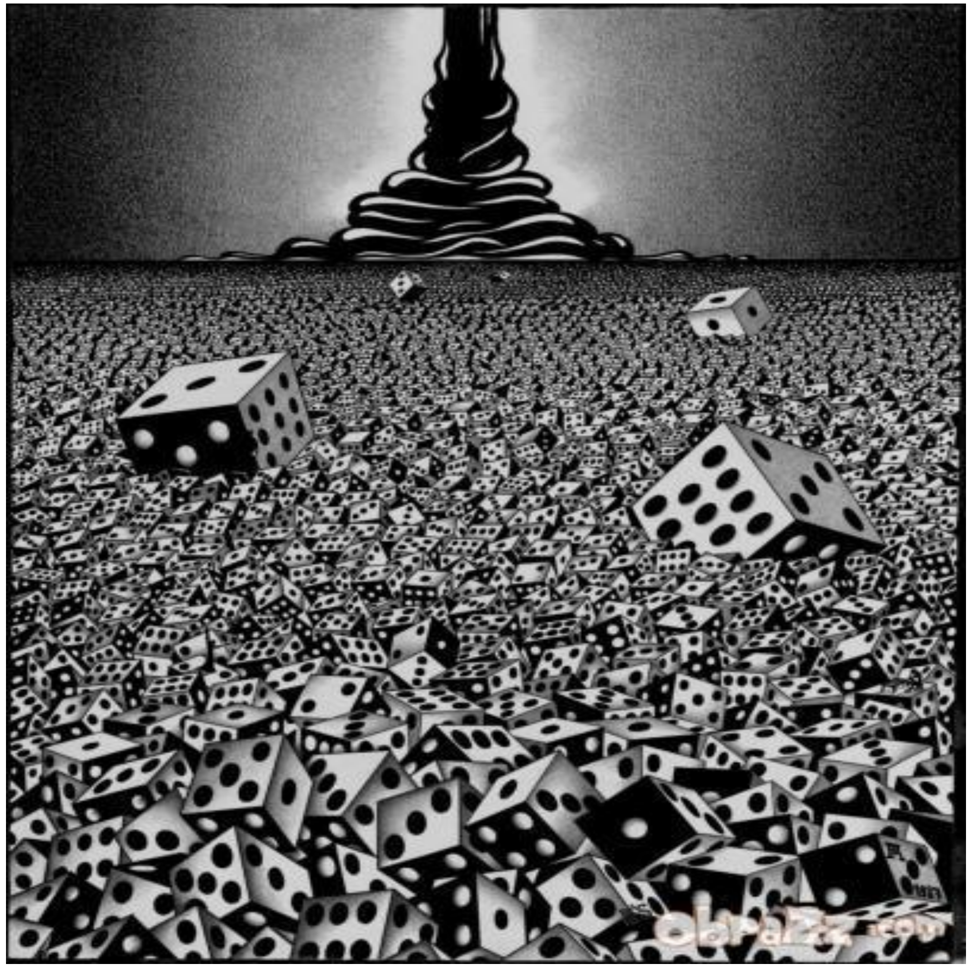
Вероятность и геометрия



Классическая вероятностная схема

- Для нахождения вероятности случайного события А при проведении некоторого числа опытов следует:

1. Найти число N всех возможных исходов данного испытания;
2. Найти количество N(A) тех исходов опыта, в которых наступает событие А;
3. Найти частное N(A)/N; оно и будет равно вероятности события А.

Классическое определение вероятности

- Вероятностью события А при проведении некоторого испытания называют отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие А, к общему числу всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания.

Общее правило, для нахождения геометрических вероятностей

- Если площадь S(A) фигуры A разделить на площадь S(X) фигуры X, которая целиком содержит фигуру A, то получится вероятность того, что случайно выбранная точка фигуры X окажется в фигуре A:
- $P=S(A)/S(X)$

Пример 1

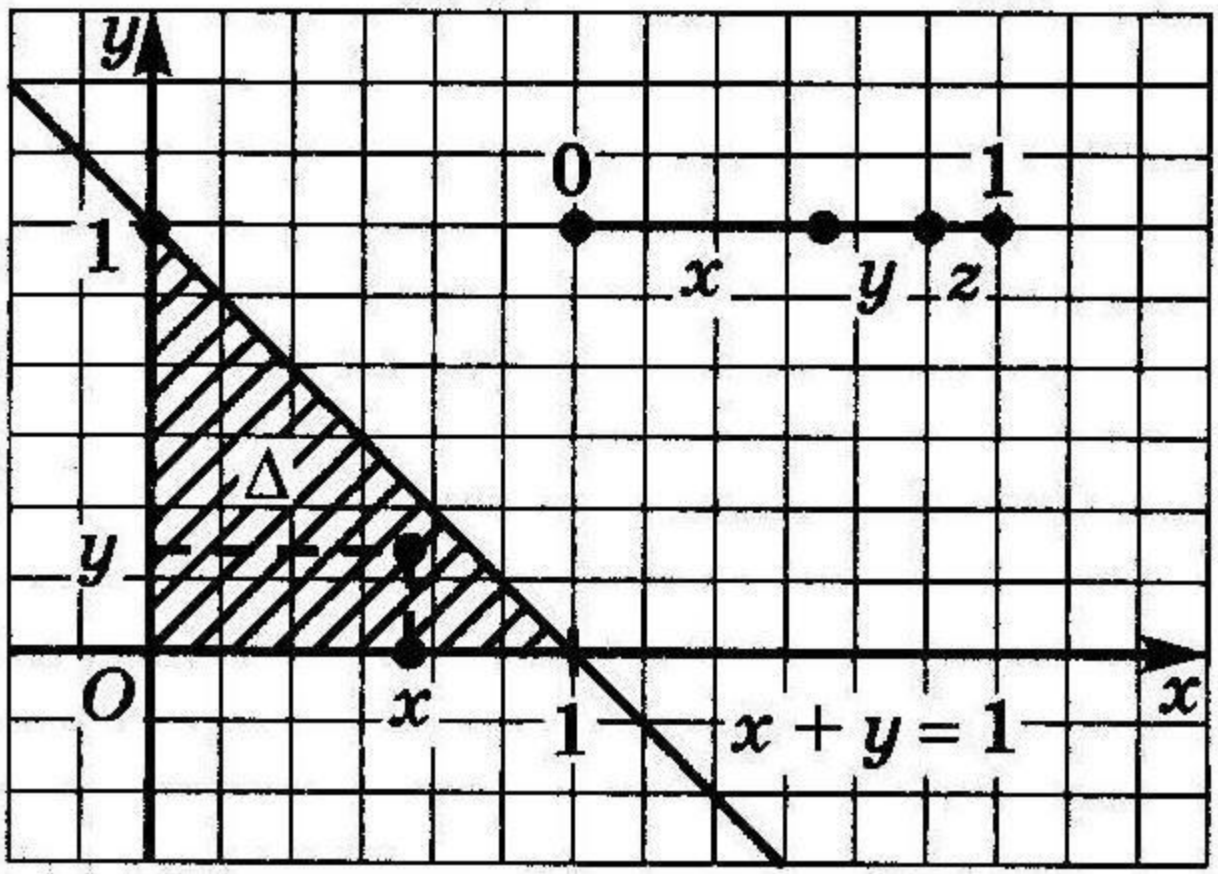
- Отрезок единичной длины случайным образом разделяют на три отрезка. Какова вероятность того, что из них можно сложить треугольник?

Построение модели

- Пронумеруем отрезки слева направо и обозначим их длины за x, y и z. Так как $x+y+z=1$, то $z=1-x-y>0$. Значит, $x>0$, $y>0$ и при этом $x+y<1$. В координатной плоскости изобразим множество решений системы трех неравенств:

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x+y<1 \end{cases}$$

- Получим треугольник с вершинами (0;0) (1;0) (0;1) без учета его сторон. Каждому способу деления заданного отрезка на три части x,y,z поставим в соответствие точку (x,y) из треугольника. Выбрав точку(x,y) мы однозначно зададим и разбиение заданного отрезка единичной длины на три отрезка [0;x] [x;x+y] [x+y;1].

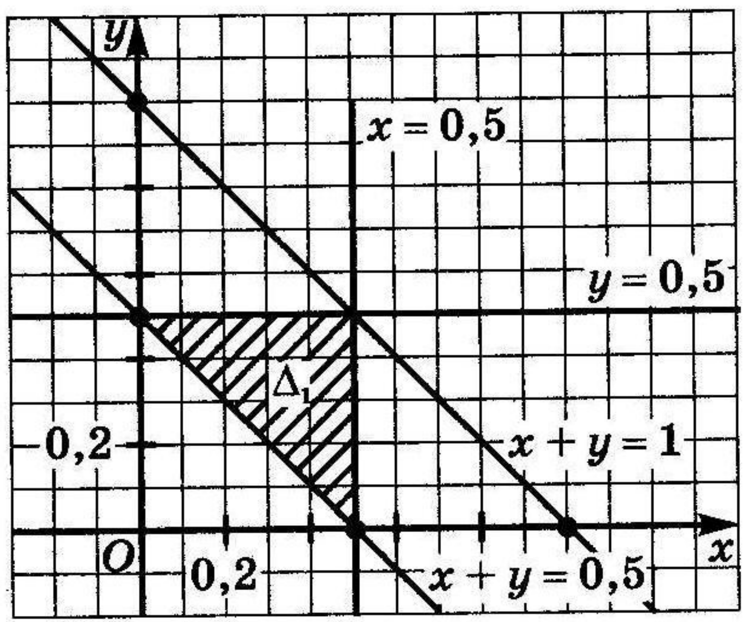


y
1
0
1
x
y
z
Δ
y
O
x
1
x
x + y = 1

Работа с моделью

$$\begin{cases} x+y>z \\ x+z>y \\ y+z>x \end{cases} \quad \begin{cases} x+y>1-x-y \\ x+1-x-y>y \\ y+1-x-y>x \end{cases} \quad \begin{cases} x+y>0.5 \\ y<0.5 \\ x<0.5 \end{cases}$$

- Получаем треугольник, подобный первому с коэффициентом подобия 0,5
- $S1/S2=1/4$



- Вероятность того, что точка окажется окажется в меньшем треугольнике P(A)=0.25

Пример 2

- Случайным образом нарисовали треугольник. Какова вероятность того, что он является остроугольным?

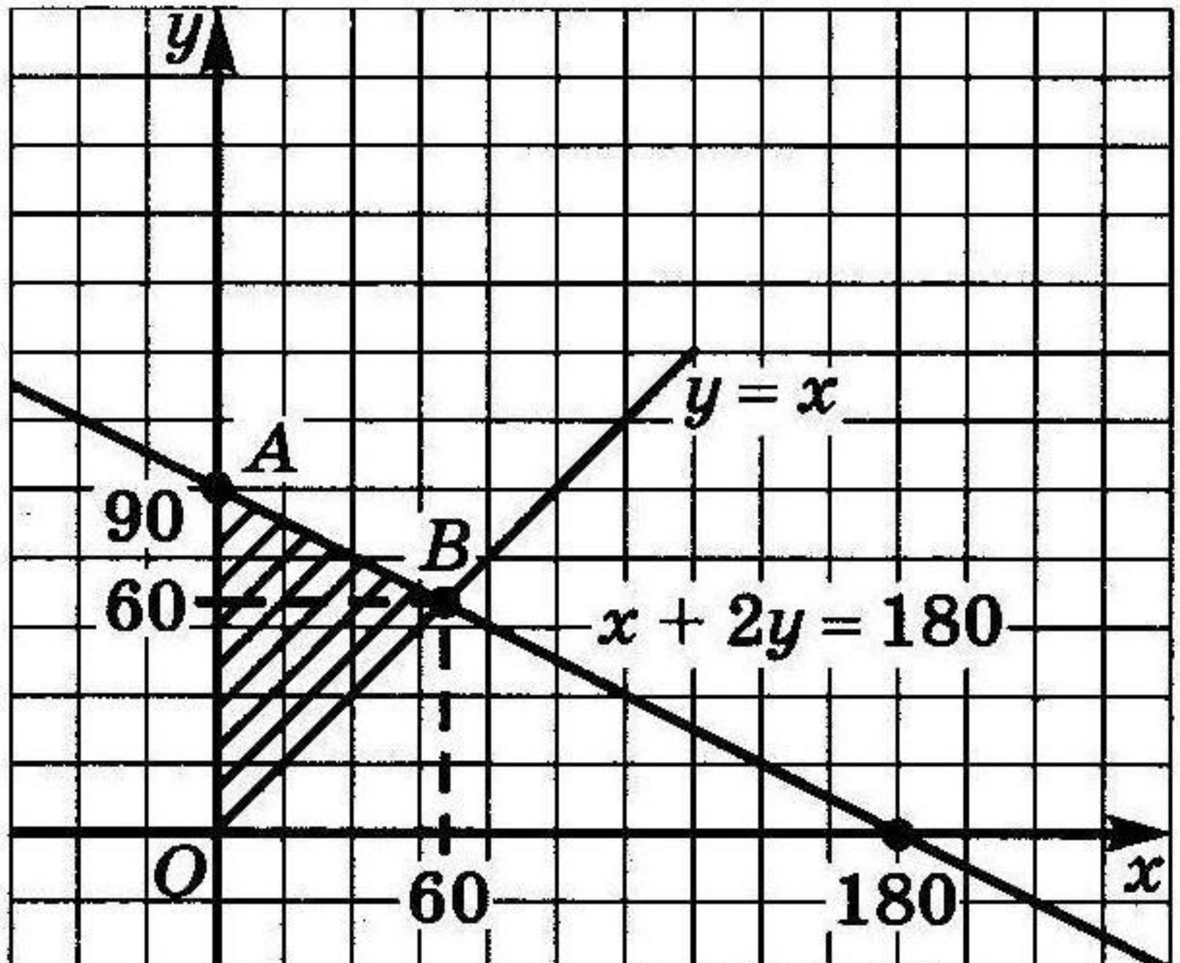
Построение модели

- Переформулируем задачу:
- Число 180 случайным образом представили в виде суммы трех положительных слагаемых. Какова вероятность того, что все слагаемые меньше 90?

- Пусть $0<x<y$ $x+y+z=180$ $z=180-x-y$

$$\begin{cases} 0<x \\ x<y \\ y<180-x-y \end{cases} \qquad \begin{cases} 0<x \\ x<y \\ x+2y<180 \end{cases}$$

- Получим треугольник с вершинами O (0;0) A(0;90) B(60;60). Каждая точка однозначно «отвечает» за треугольник с углами x, y, 180-x-y.

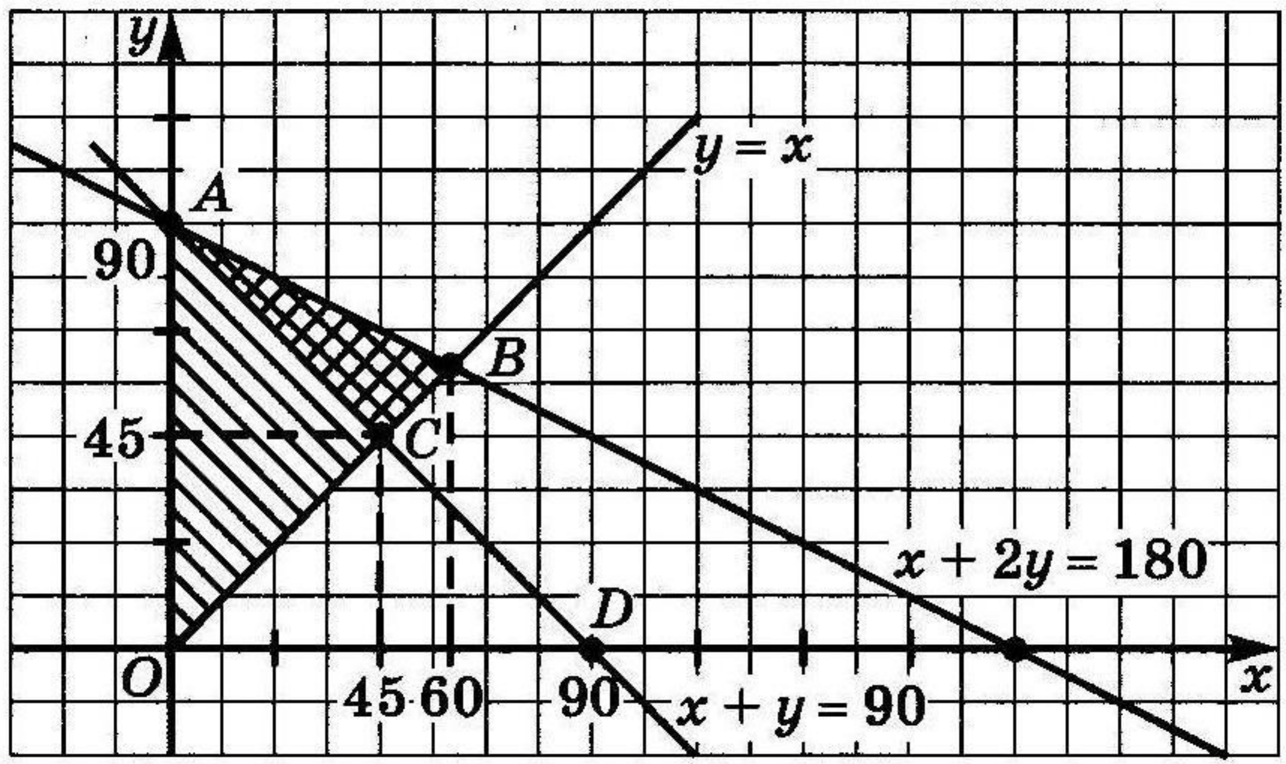

y
y = x
A
90
B
60
x + 2y = 180
O
60
180
x

Работа с моделью

- Отметим в нашей модели точки, соответствующие остроугольным треугольникам.

$$\begin{cases} x<y<90 \\ y<180-x-y<90 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<y<90 \\ x+2y<90 \\ x+y>90 \end{cases}$$

- Получаем треугольник с вершинами А (0;90) В(60;60) С(45;45)



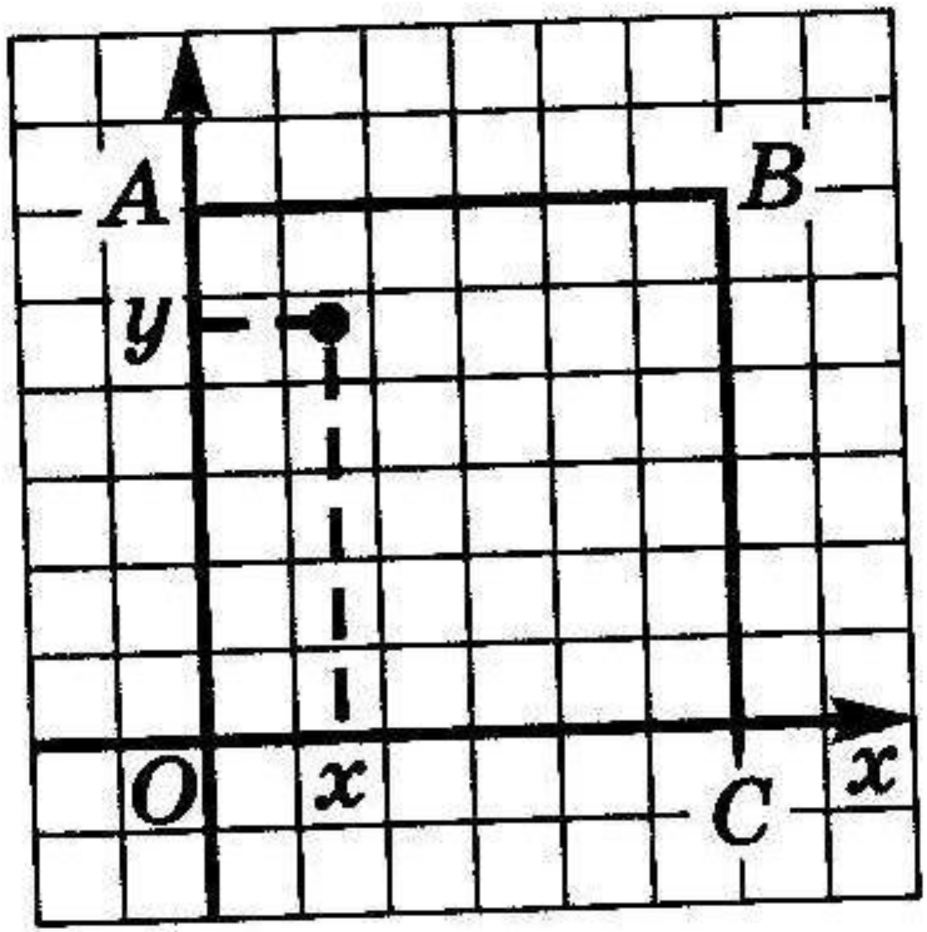
- S(ABC)/S(AOB)=(0.5 AC*BC)/(0.5AC*OB)= BC/OB
- По теореме Фалеса BC/OB=0,25
- P(A)=0.25

Пример 3

- Два шпиона решили встретиться у фонтана. Каждый из них может гарантировать только то, что он появится у фонтана с 12-00 до 13-00. По инструкции шпион после прихода ждет встречи у фонтана 15 минут и по их истечении (или ровно в 13:00) уходит. Какова вероятность встречи?

Построение модели

- За единицу отсчета возьмем 1 час, а за начало отсчета возьмем 12:00. Пусть x - время прихода первого шпиона, а y - время прихода второго. Тогда $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ и точка (x,y) квадрата с вершинами O(0;0) A(0;1) B(1;1) C(1;0) будет соответствовать времени прихода первого и второго шпионов.

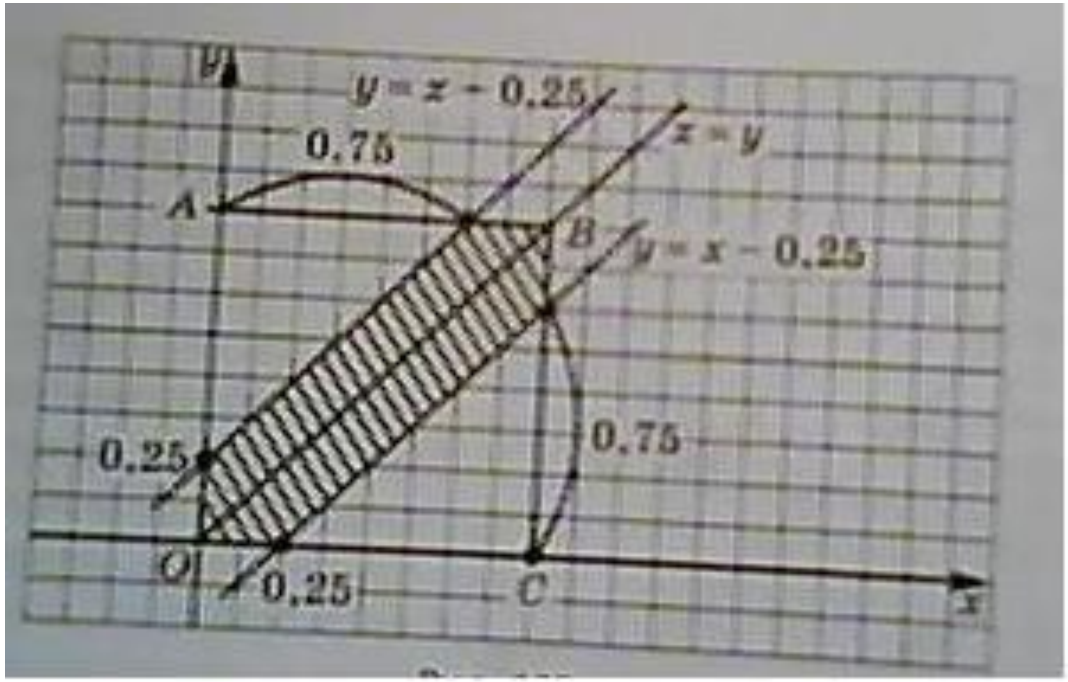

A
B
y
O
x
C
x

Работа с моделью

- Встреча произойдет, только если время прихода первого шпиона отличается от времени прихода второго не более чем на 15 минут. Т.е.

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ |y-x| \le 0.25 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ x-0.25 \le y \le x+0.25 \end{cases}$$

- Получается часть квадрата OABC, лежащая между прямыми y=x-0.25 и y=x+0.25



- Незаштрихованная часть состоит из двух прямоугольных треугольников, катеты которых равны 0,75. Значит их площадь равна 0,5625. Т.е. заштрихованная часть составляет 0,4375 от площади всего квадрата. Это и есть искомая вероятность P(A)=0.4375

- Презентацию выполнила:
- Горбунова Елена, ученица 11Б класса, МОУ «Гимназия №11»