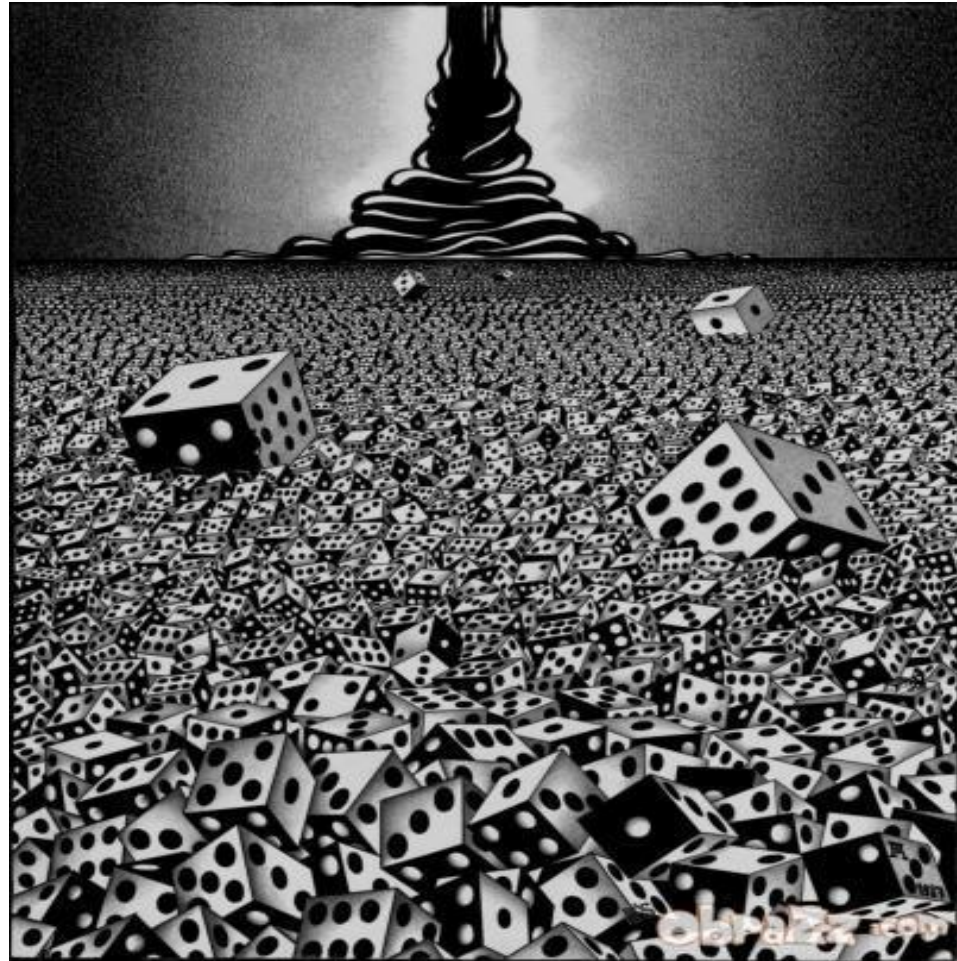


Вероятность и геометрия



Классическая вероятностная схема

- Для нахождения вероятности случайного события A при проведении некоторого числа опытов следует:
 1. Найти число N всех возможных исходов данного испытания;
 2. Найти количество $N(A)$ тех исходов опыта, в которых наступает событие A ;
 3. Найти частное $N(A)/N$; оно и будет равно вероятности события A .

Классическое определение вероятности

- Вероятностью события A при проведении некоторого испытания называют отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие A , к общему числу всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания.

Общее правило, для нахождения геометрических вероятностей

- Если площадь $S(A)$ фигуры A разделить на площадь $S(X)$ фигуры X , которая целиком содержит фигуру A , то получится вероятность того, что случайно выбранная точка фигуры X окажется в фигуре A :
- $P=S(A)/S(X)$

Пример I

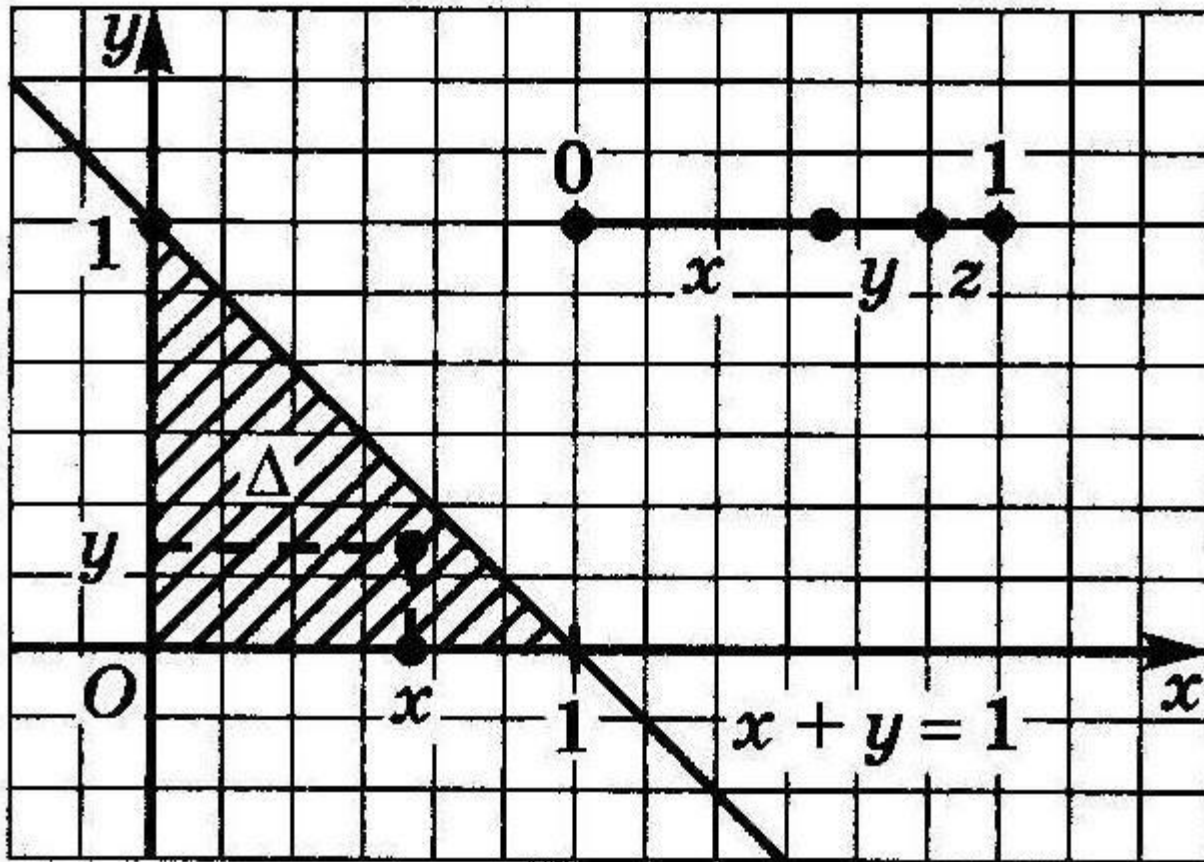
- Отрезок единичной длины случайным образом разделяют на три отрезка. Какова вероятность того, что из них можно сложить треугольник?

Построение модели

- Пронумеруем отрезки слева направо и обозначим их длины за x , y и z . Так как $x+y+z=1$, то $z=1-x-y>0$. Значит, $x>0$, $y>0$ и при этом $x+y<1$. В координатной плоскости изобразим множество решений системы трех неравенств:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < 1 \end{cases}$$

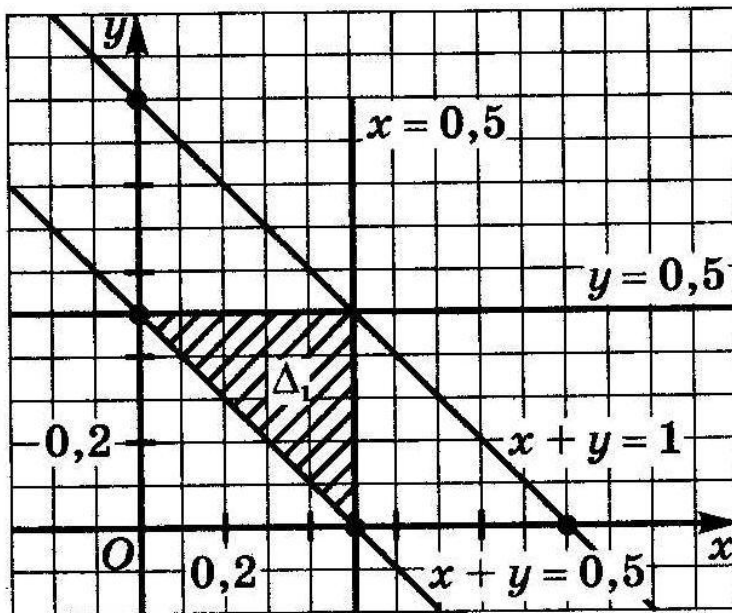
- Получим треугольник с вершинами $(0;0)$ $(1;0)$ $(0;1)$ без учета его сторон. Каждому способу деления заданного отрезка на три части x, y, z поставим в соответствие точку (x, y) из треугольника. Выбрав точку (x, y) мы однозначно зададим разбиение заданного отрезка единичной длины на три отрезка $[0; x]$ $[x; x+y]$ $[x+y; 1]$.



Работа с моделью

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y > z \\ x+z > y \\ y+z > x \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x+y > | -x-y \\ x+| -x-y > y \\ y+| -x-y > x \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x+y > 0.5 \\ y < 0.5 \\ x < 0.5 \end{array} \right.$$

- Получаем треугольник, подобный первому с коэффициентом подобия 0,5
- $S_1/S_2 = 1/4$



- Вероятность того, что точка окажется в меньшем треугольнике $P(A)=0.25$

Пример 2

- Случайным образом нарисовали треугольник. Какова вероятность того, что он является остроугольным?

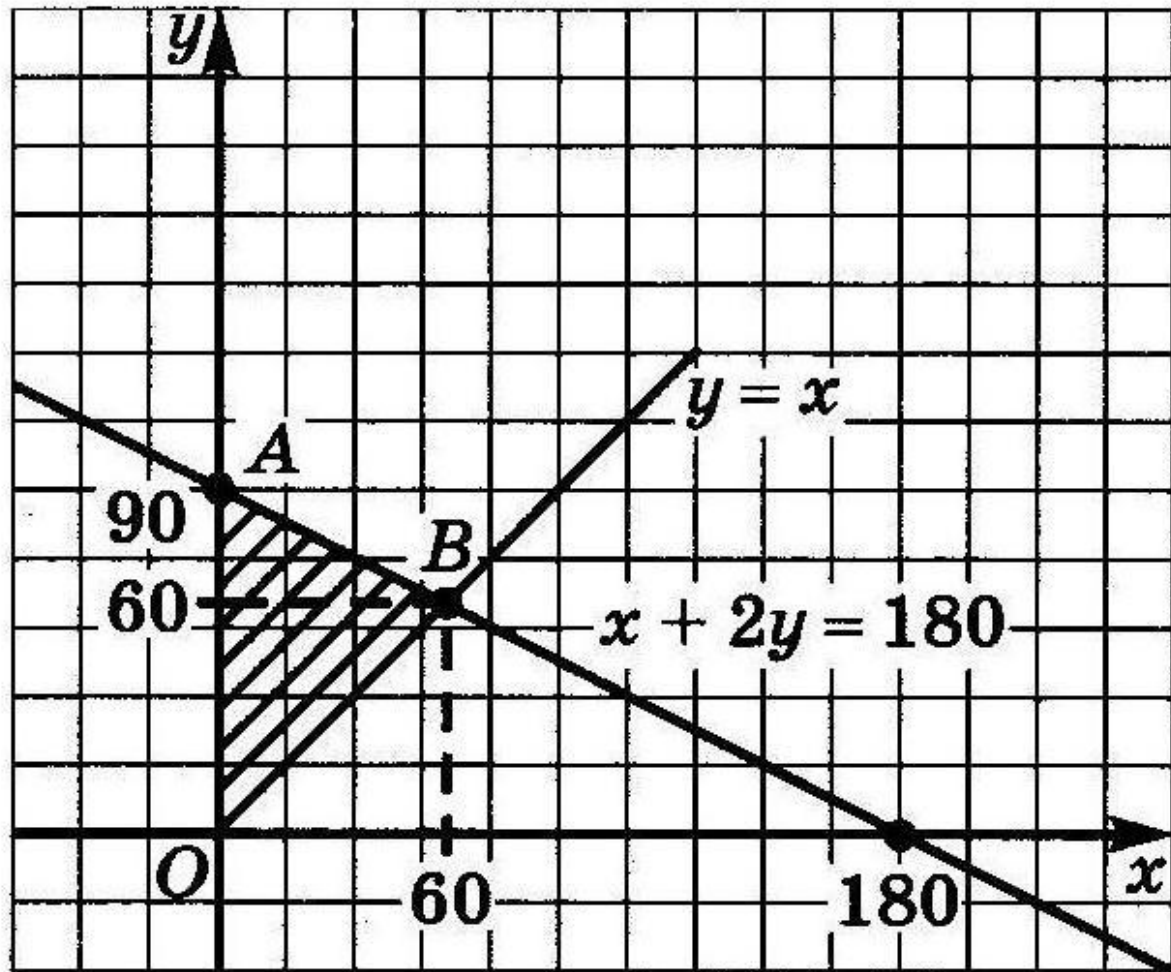
Построение модели

- Переформулируем задачу:
- Число 180 случайным образом представили в виде суммы трех положительных слагаемых. Какова вероятность того, что все слагаемые меньше 90?

- Пусть $0 < x < y$ $x + y + z = 180$ $z = 180 - x - y$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x \\ x < y \\ y < 180 - x - y \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < x \\ x < y \\ x + 2y < 180 \end{array} \right.$$

- Получим треугольник с вершинами $O(0;0)$ $A(0;90)$ $B(60;60)$. Каждая точка однозначно «отвечает» за треугольник с углами $x, y, 180 - x - y$.

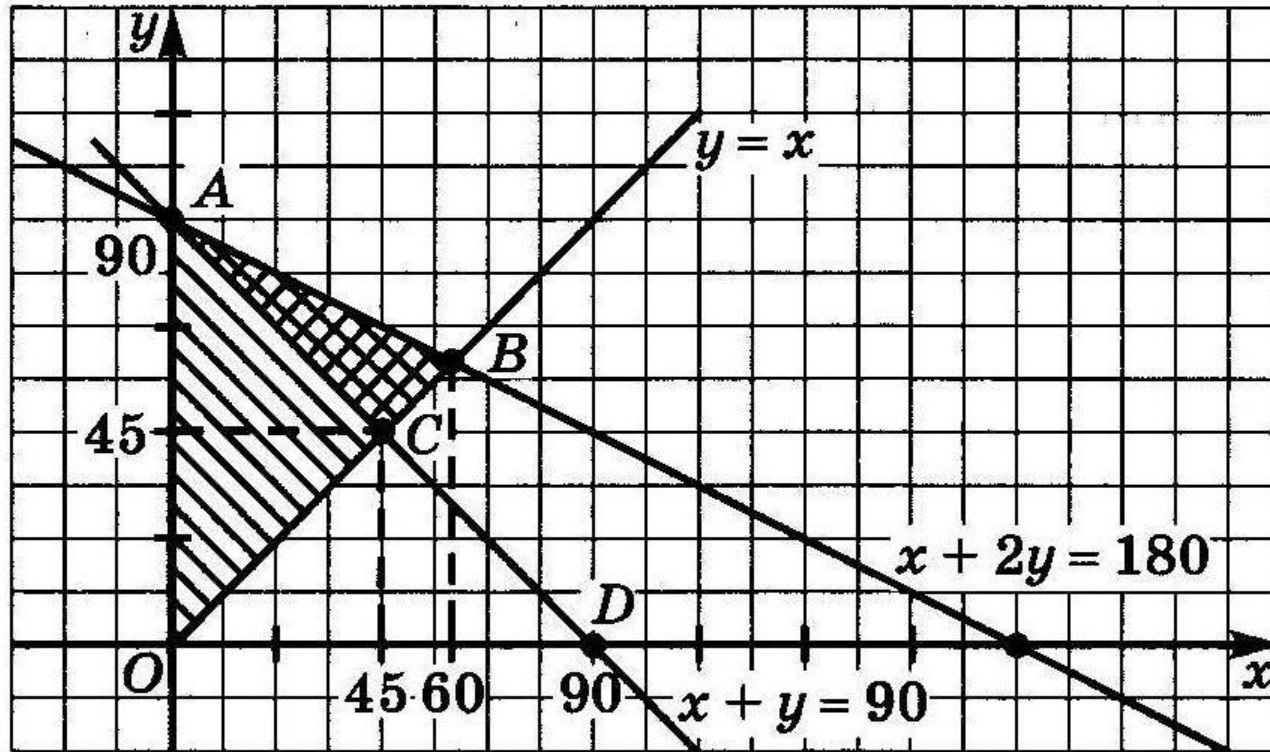


Работа с моделью

- Отметим в нашей модели точки, соответствующие остроугольным треугольникам.

$$\left\{ \begin{array}{l} x < y < 90 \\ y < 180 - x - y < 90 \\ x + y > 90 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x < y < 90 \\ x + 2y < 90 \end{array} \right.$$

- Получаем треугольник с вершинами А (0;90) В(60;60) С(45;45)



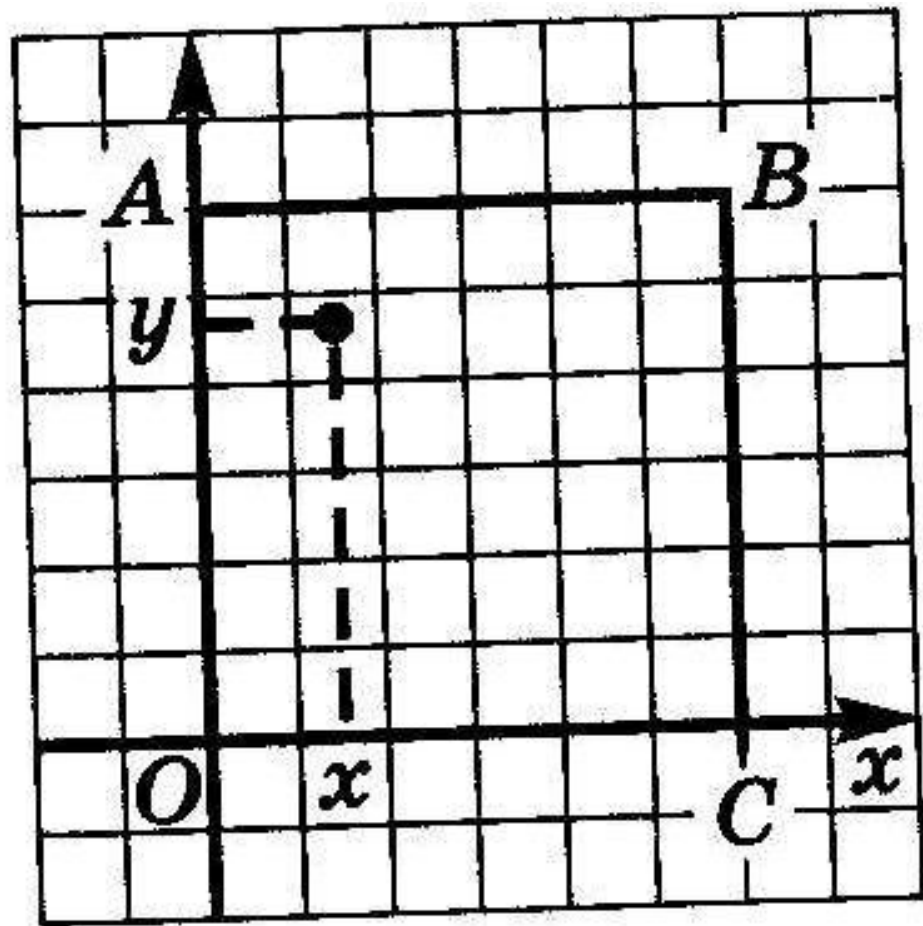
- $S(ABC)/S(AOB) = (0.5 AC * BC) / (0.5 AC * OB) = BC/OB$
- По теореме Фалеса $BC/OB = 0,25$
- $P(A) = 0.25$

Пример 3

- Два шпиона решили встретиться у фонтана. Каждый из них может гарантировать только то, что он появится у фонтана с 12-00 до 13-00. По инструкции шпион после прихода ждет встречи у фонтана 15 минут и по их истечении (или ровно в 13:00) уходит. Какова вероятность встречи?

Построение модели

- За единицу отсчета возьмем 1 час, а за начало отсчета возьмем 12:00. Пусть x - время прихода первого шпиона, а y - время прихода второго. Тогда $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ и точка (x, y) квадрата с вершинами $O(0;0)$ $A(0;1)$ $B(1;1)$ $C(1;0)$ будет соответствовать времени прихода первого и второго шпионов.



Работа с моделью

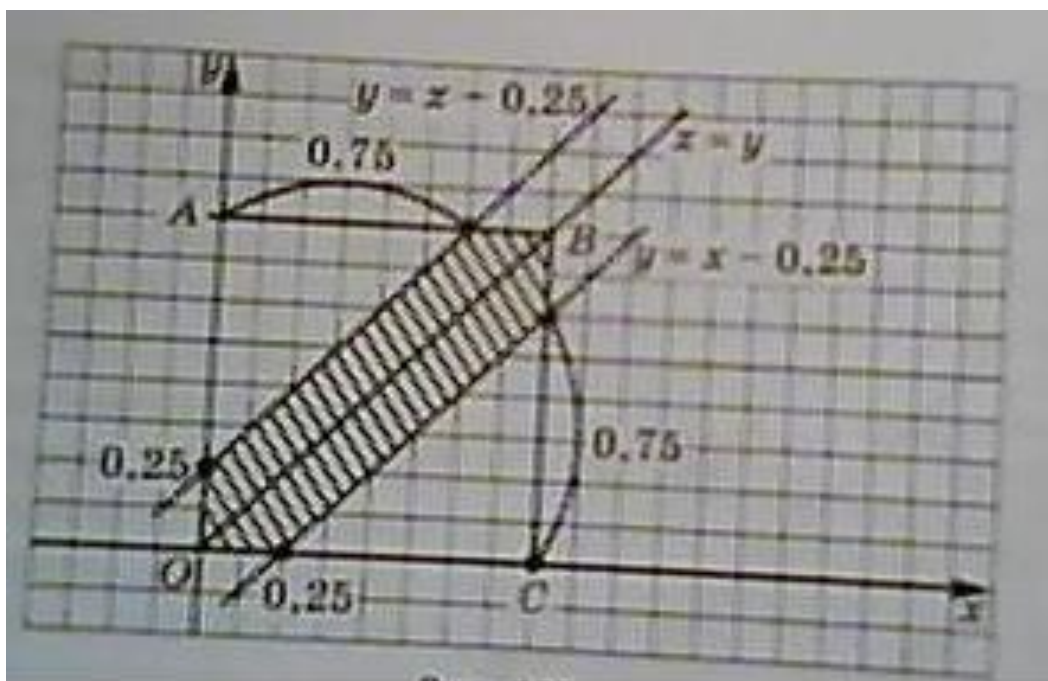
- Встреча произойдет, только если время прихода первого шпиона отличается от времени прихода второго не более чем на 15 минут. Т.е.

$$0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq x \leq 1$$


$$0 \leq y \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$|y-x| \leq 0.25 \quad x-0.25 \leq y \leq x+0.25$$

- Получается часть квадрата OABC, лежащая между прямыми $y=x-0.25$ и $y=x+0.25$



- Незаштрихованная часть состоит из двух прямоугольных треугольников, катеты которых равны 0,75. Значит их площадь равна 0,5625. Т.е. заштрихованная часть составляет 0,4375 от площади всего квадрата. Это и есть искомая вероятность $P(A)=0.4375$

- 
- Презентацию
выполнила:
 - Горбунова Елена,
ученица I I Б класса,
МОУ «Гимназия
№ I I»