«Вероятность и статистика» – обязательный компонент школьного образования.

Учитель математики МОУ СОШ №4 г. Мытищи
Литуновская Наталья Владимировна.

Вероятность и статистика (50 часов)

- **Описательная статистика.** Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков. Случайная изменчивость. Статистические характеристики набора данных: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия. Репрезентативные и нерепрезентативные выборки.
- **Случайные события и вероятность.** Понятие о случайном опыте и случайном событии. Элементарные события. Частота случайного события. Статистический подход к понятию вероятности. Несовместимые события. Формула сложения вероятностей. Вероятности противоположных событий. Независимые события. Умножение вероятностей. Достоверные и невозможные события. Равновозможность событий. Классическое определение вероятности.
- **Комбинаторика.** Решение комбинаторных задач перебором вариантов. Комбинаторное правило умножения. Перестановки и факториал.

Сравнение учебных программ

Автор	**Виленкин/Макарычев 25 ч.**	**Мордкович 23 ч.**	**Дорофеев 33 ч.**
5 класс	Комбинаторные задачи (перебор вариантов, дерево вариантов, правило умножения). Круговые диаграммы. 2ч.	Достоверные, невозможные и случайные события. Перебор вариантов, дерево вариантов. 4 ч.	Чтение и составление таблиц и диаграмм. Опрос общественного мнения. 8 ч.
6 класс	Комбинаторные задачи, столбчатые диаграммы. 2 ч.	Первые представления о вероятности. Число всех возможны исходов. Правило произведения. Благоприятные и неблагоприятные исходы. Подсчет вероятности события в простейших случаях. 6 ч. Диаграммы. 4 ч.	Комбинаторика, случайные события. Перебор вариантов, дерево вариантов, правило умножения. Оценка вероятности. (маловероятно, более вероятно) 8 ч.
7 класс	Статистические характеристики среднего: размах, медиана, мода, среднее арифметическое. 4 ч.	—	Частота случайного события. Оценка вероятности случайного события по его частоте. Сложение вероятностей. 5 ч.

Автор	Виленкин/Макарычев	Мордкович	Дорофеев
8 класс	Сбор и анализ статистических данных (генеральная и выборочная совокупность, интервальный ряд данных, репрезентативная выборка). Таблицы частот и относительных частот. Наглядное представление информации. Полигон частот, гистограмма. 4 ч.	—	Статистические характеристики ряда данных, медиана, среднее арифметическое, размах. Таблица частот. Вероятность равновозможных событий. Классическая формула вычисления вероятности. Геометрическая вероятность. 6 ч.
9 класс	Комбинаторное правило умножения. Перестановки, размещения, сочетания. Относительная частота и вероятность случайного события. Статистическое и классическое определение вероятности. 13 ч.	Комбинаторные задачи. Правило умножения. Факториал. Перестановки. Группировка информации. Общий ряд данных. Частота варианты. Табличное и графическое представление информации. Полигон распределения данных. Гистограмма. Числовые характеристики среднего (размах, мода, среднее значение). Вероятность случайного события. Вероятность суммы 2-х событий. 13 ч.	Генеральная совокупность и выборка. Ранжирование данных. Полигон частот, интервальный ряд. Гистограмма. Выборочная дисперсия, среднее квадратичное отклонение. 6 ч.

Перед нами нередко возникают проблемы, которые имеют не одно, а несколько различных решений. Обычно одни из них нас устраивают, а другие нет. Рассмотрим первый пример.

Сколько двузначных чисел можно составить из цифр:

Решение

Составим таблицу: слева от первого столбца поместим первые цифры искомых чисел, а выше первой строки – вторые цифры этих чисел.

	1	4	7
1	**11**	**14**	**17**
4	**41**	**44**	**47**
7	**71**	**74**	**77**

9 чисел!

Второй пример: «В алфавите племени уауа имеются только две буквы – «а» и «у».

Сколько различных слов по три буквы в каждом слове можно составить, используя алфавит этого племени?»

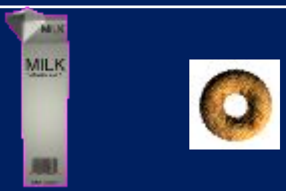
Решение

	аа	ау	уа	уу
а	ааа	аау	ауа	ауу
у	уаа	уау	ууа	ууу

8 слов!

Третий пример: «На завтрак Вова может выбрать плюшку, бутерброд, пряник или кекс, а запить их он может кофе, соком или кефиром. Из скольких вариантов завтрака Вова может выбрать?»

Решение

	Плюшка	Бутерброд	Пряник	Кекс
Кофе				
Сок				
Кефир				

12 вариантов!

В данных примерах был осуществлен *способ перебора* возможных вариантов (возможных *комбинаций*).

Поэтому данные задачи называют *комбинаторными*.

Решения данных задач основывается на общем *правиле умножения*.

«Правило умножения»

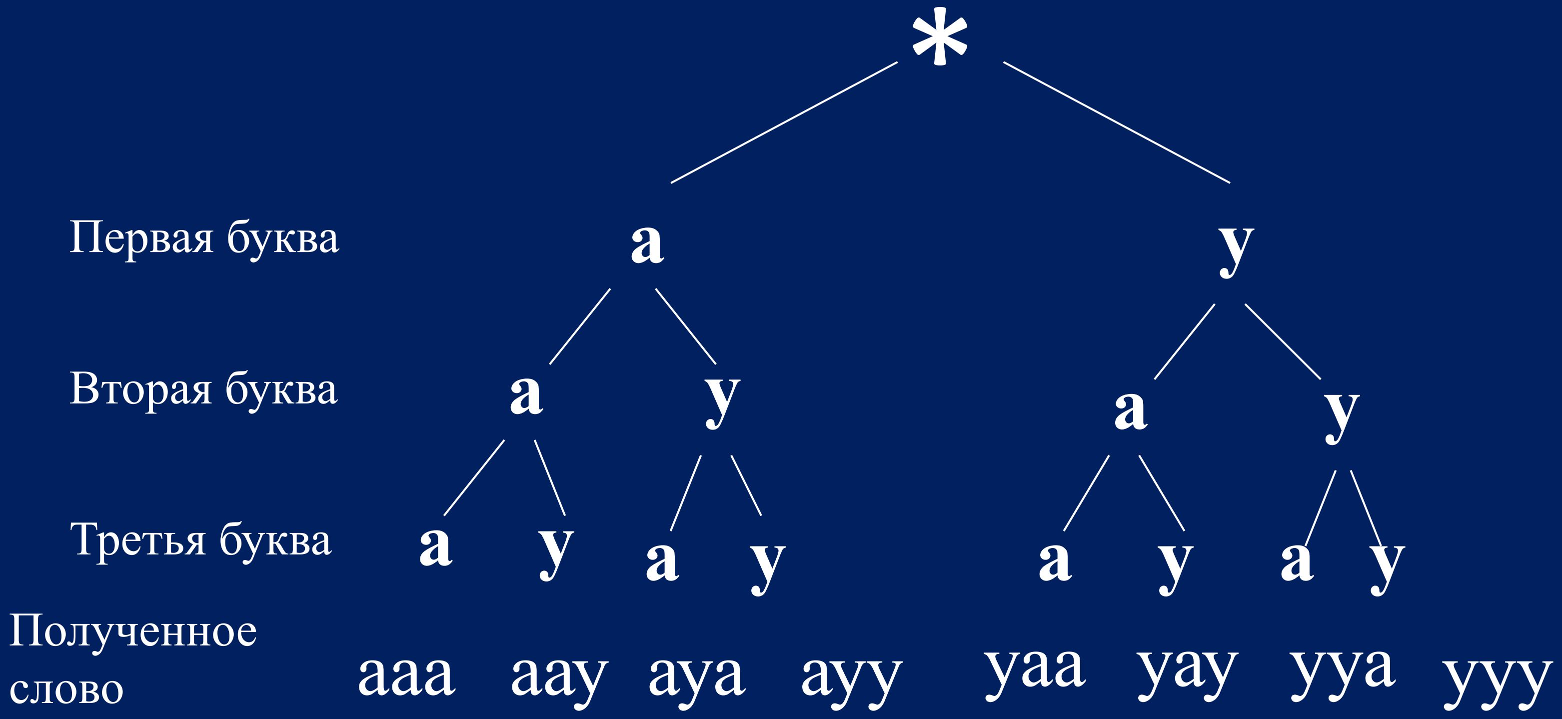
- ***Для того чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний А и В, следует перемножить число всех исходов испытания А и число всех исходов испытания В.***

Правило умножения для трех, четырех и более испытаний можно объяснить, не выходя за рамки плоскости, с помощью геометрической модели, которую называют <u>деревом возможных вариантов</u>. Она, во-первых, наглядна, как всякая картинка, и, во-вторых, позволяет все учесть, ничего не пропустив.

Дерево возможных вариантов

В алфавите племени уауа имеются только две буквы – «а» и «у».

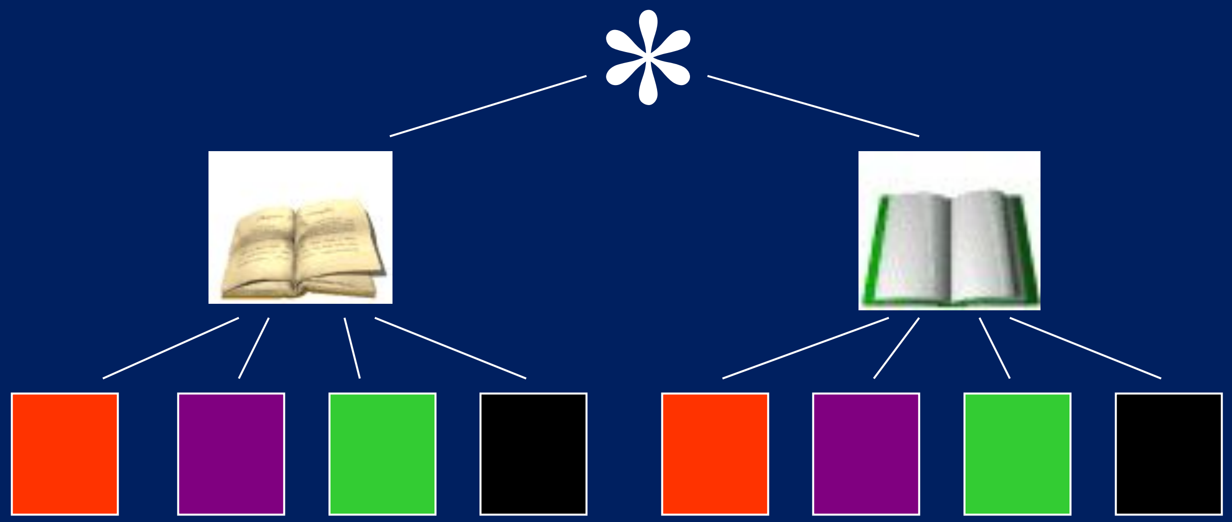
Сколько различных слов (по три буквы в каждом слове) можно составить, используя алфавит этого племени?



Задание 1

Имеются ручки четырех цветов: красные, синие, зеленые, черные – и два вида записных книжек. Сколько различных наборов из ручки и записной книжки можно составить из этих предметов?

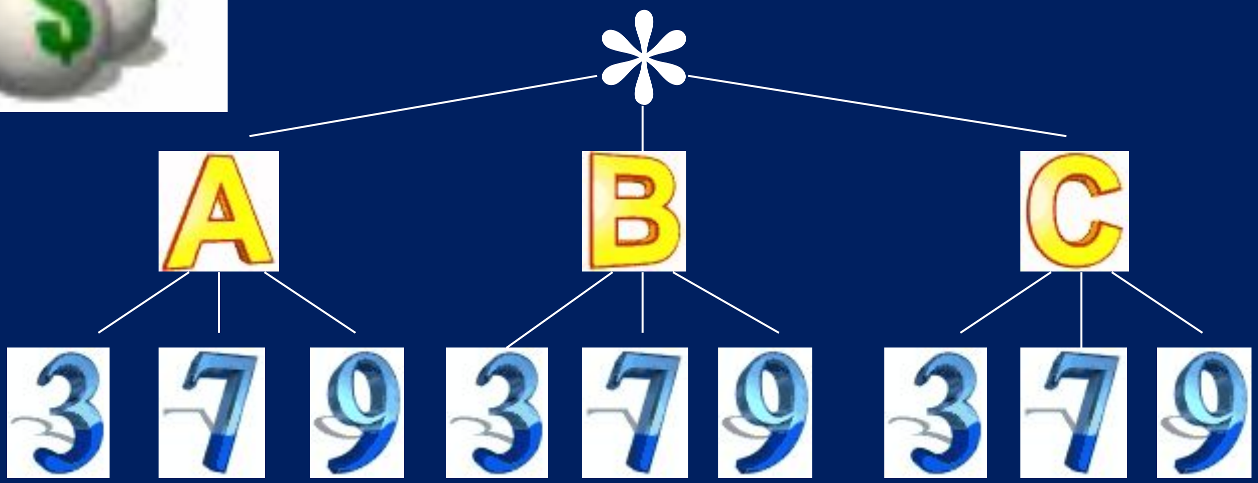
Решение



Задание 2

Шифр для сейфа составляют из букв и цифр, причем на первом месте всегда ставится буква. Сколько различных вариантов шифра можно составить, используя буквы А, В, С и цифры 3, 7, 9?

Решение

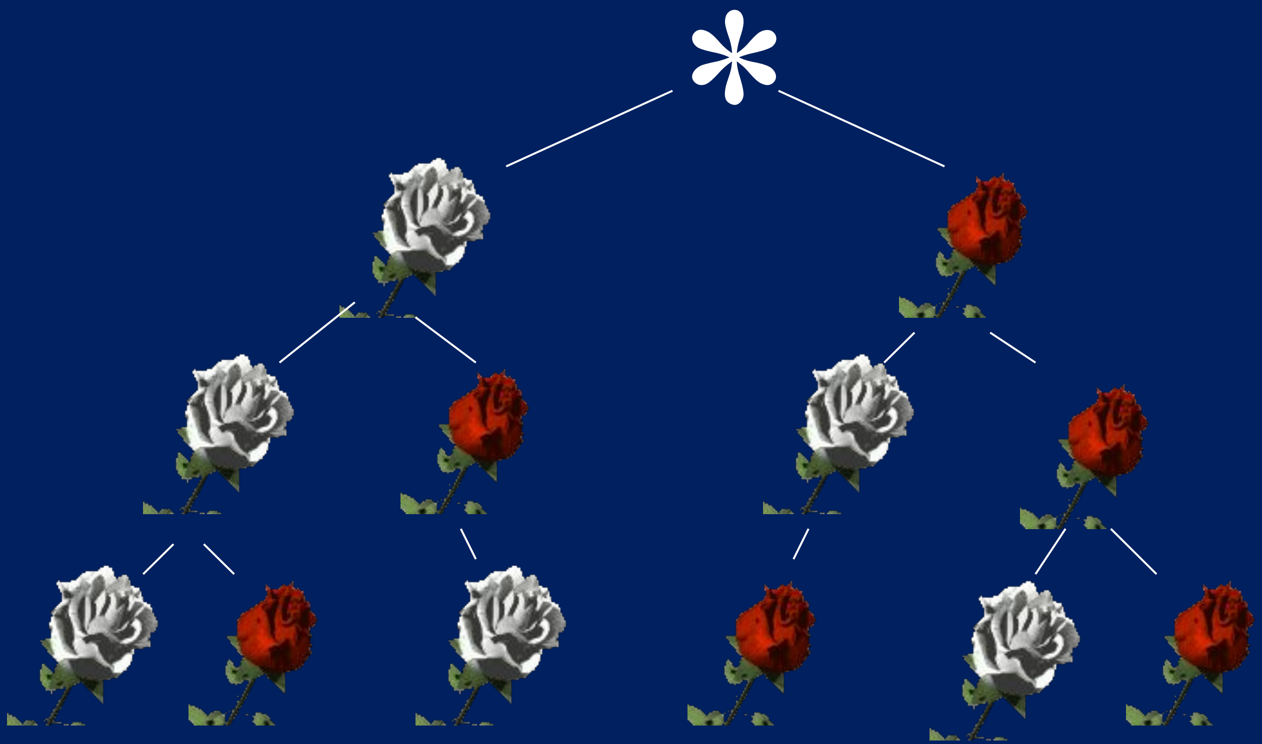


A3, A7, A9, B3, B7, B9, C3, C7, C9

Задание 3

Сколько можно составить различных букетов из трех роз, если в продаже имеются белые и красные розы?

Решение

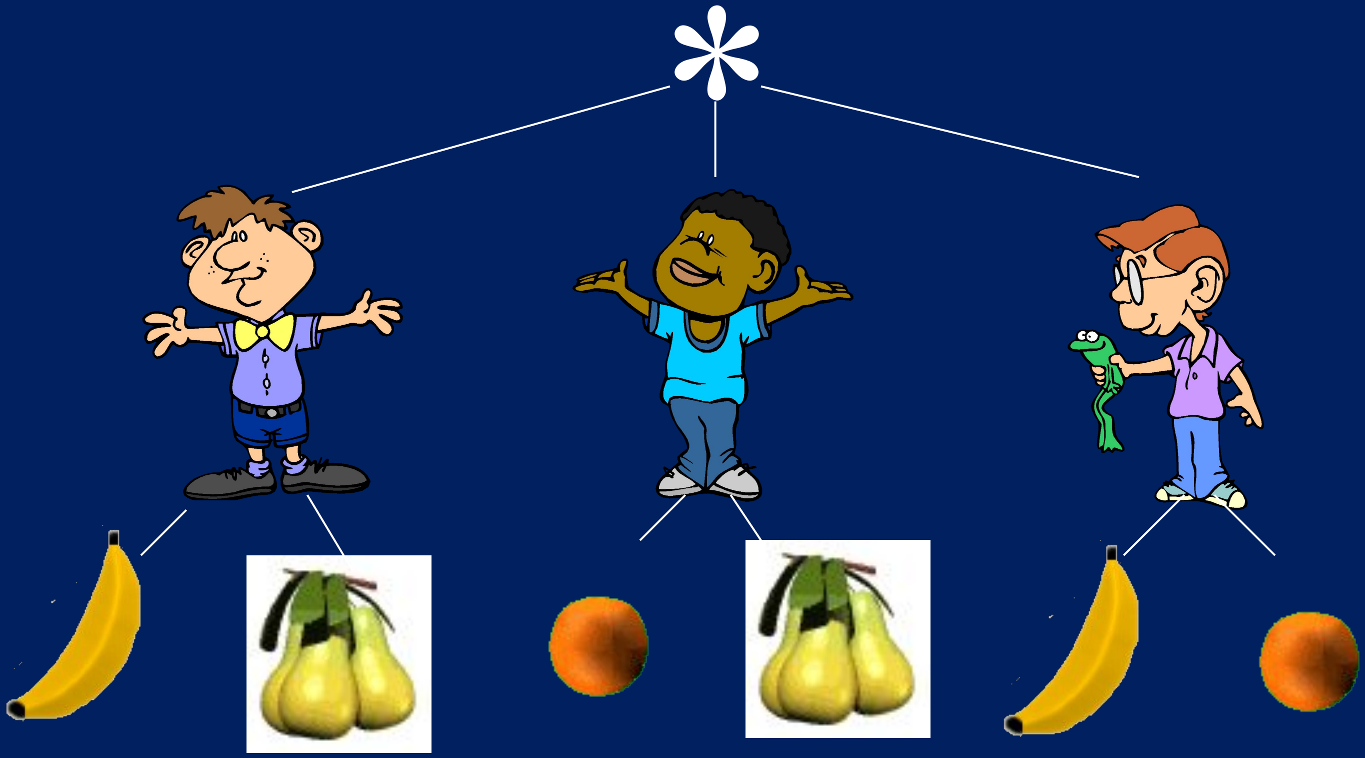


БББ, ББК, БКБ, КБК, ККБ, ККК

Задание 4

Сколькими способами три друга могут разделить между собой два банана, две груши и два апельсина так, чтобы каждый получил по два различных фрукта?

Решение



Случайные события

Мы часто говорим:

- «это возможно»,
- «это невозможно»,
- «это маловероятно»,
- «это обязательно случится».

События, которые в одних и тех же условиях могут произойти, а могут и не произойти, называются *<u>случайными</u>*.

Определения

- **События, которые при данных условиях обязательно происходят, называют *достоверными*.**
- **События, которые при данных условиях не могут произойти, называют *невозможными*.**
- **События, которые при данных условиях имеют равные шансы, называются *равновероятными*.**

Пример 1

В коробке лежат 5 конфет в синей обертке и одна в белой. Не глядя в коробку, наугад вынимают одну конфету. Можно ли сказать заранее, какого она будет цвета?

Пример 2

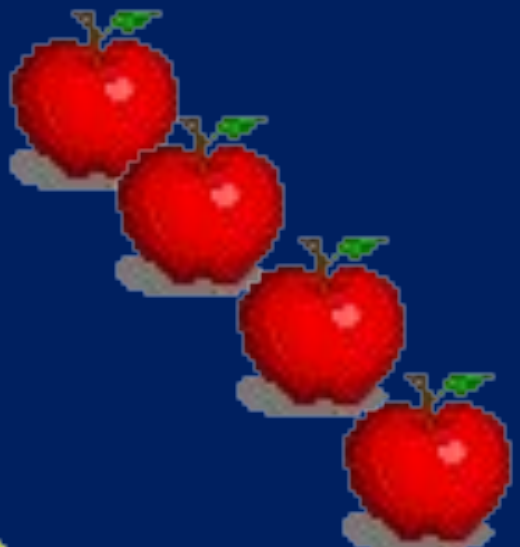
В сумке лежат 4 красных и 4 желтых яблока. Из сумки наугад вынимают яблоко. Какое из событий А, В, С, Д при этом может произойти?

А. Вынуто красное яблоко.

В. Вынуто желтое яблоко.

С. Вынуто зеленое яблоко.

Д. Вынуто яблоко.



1 задание

Среди следующих событий укажите случайные, достоверные и невозможные.

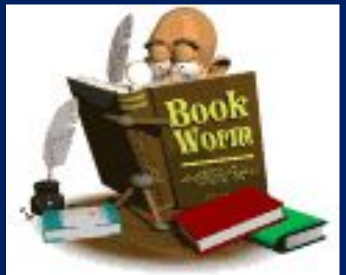
А. Попугай научится говорить.

В. Вы садитесь в поезд и доезжаете до Северного полюса.

С. Наугад взятая с полки книга оказывается учебником математики.

Д. В полдень бьют Кремлевские часы.

Е. Вода в Тихом океане закипит.



2 задание

Оцените возможность наступления событий, используя для этого слова: «достоверное событие», «случайное событие», «невозможное событие», а также «очень вероятное событие» и «маловероятное событие».

A. Завтра будет хорошая погода.

B. Вас пригласят в гости.

C. В январе в городе пойдет снег.

Д. В 12 часов ночи в городе идет дождь, а через 24 часа будет светить солнце.

E. На день рождения вам подарят говорящего крокодила.

F. Вам подарят живого крокодила.

G. Вы получите «пятерку» за контрольную работу по математике.

1 задание

В три коробки разложили карамель, но в нее попало несколько ирисок. Из какой коробки больше шансов вынуть наугад ириску, а из какой – меньше?

Урезанное среднее.

- Рассмотрим следующий пример. На олимпиаде по математике предлагалось решить пять задач по 4 балла за каждую. В протоколе указана сумма баллов каждого из восьми участников этой олимпиады:
- 12; 14; 14; 16; 17; 18; 19; 200.
- Для ускорения подсчета имеется автоматизированная система обработки данных, которая находит среднее арифметическое любых введенных чисел. Какой средний балл набрали участники олимпиады?
- У данного набора среднее равно 38,75. Однако такую сумму баллов никто из участников набрать не мог. К тому же семь чисел из данных восьми намного меньше его. Все значения этого набора, кроме крайнего правого, достаточно кучно попадают в интервал [12; 19], а 38,75 в него не попадает. Все это говорит о том, что полученное среднее арифметическое не только не передает особенностей данного набора чисел, но и вообще противоречит здравому смыслу. Значит, либо в условие, либо в решение вкралась ошибка! Посмотрим еще раз на данные числа. Теперь, получив явно бессмысленный результат, мы сможем более критически отнестись к условию: первые семь чисел вполне реальны, а вот последнее... Откуда оно взялось?! Видимо, оно случайно попало в этот список: возможно, в результате описки. Однако обнаружение ошибки в условии не избавляет нас от необходимости довести решение до конца. Можно, конечно, посоветовать комиссии снова переписать результаты учащихся и ввести числа из нового, «правильного» протокола. Но где гарантия, что в нем снова не будет опечатки?

- Когда все результаты более или менее кучно располагаются на числовой оси, кроме, быть может, нескольких ненадежных значений, анализировать результаты можно! Достаточно высокую точность полученных значений будет гарантировать применение других средних — в частности, *урезанного среднего*. Для его нахождения сначала упорядочивают набор по возрастанию, а затем отбрасывают слева и справа равное небольшое количество чисел. При этом «выбросы» (или ошибки наблюдений) в дальнейших вычислениях не участвуют. У полученного «урезанного» набора обычным образом находят среднее арифметическое. Оно и является урезанным средним исходного набора.
- Вернемся к задаче. Если отбросить по одному числу с каждой стороны, то есть числа 12 и 200, то у оставшегося набора из шести чисел среднее равно 16,3
- Это и есть урезанное среднее. Оно неплохо передает реальное среднее количество баллов, набранных юными математиками.
- Некоторая аналогия с нахождением урезанного среднего просматривается в правилах судейства во многих видах спорта. Например, в соревнованиях по прыжкам с трамплина технику каждого прыжка оценивают 5 судей. Чтобы получить объективные оценки, две из них — высшую и низшую — отбрасывают, а для трех оставшихся находят сумму. Такой подход не дает возможности судьям повышать баллы своим соотечественникам, а спортсменам затрудняет нечестный путь к медалям.

Задача.

- **4.** На зимние каникулы в одной из школ города Мурманска учительница дала детям задание: следить за погодой и найти среднюю температуру. Ежедневно в течение десяти дней в 15 часов Наташа записывала показания термометра:
- –13, –10, –15, 11, –9, –9, –11, –12, –10, –11.
- А затем вычислила среднее арифметическое и получила –8,9.
- а) Действительно ли в период наблюдений температура колебалась вблизи этого числа?
  б) Почему большинство значений (9 из 10) меньше найденного среднего?
  в) Как исправить ответ, если он неверный (заново повторить наблюдение, естественно, нельзя)?
- а) Нет, в период наблюдений температура колебалась в промежутке [–15; –9], которому найденное среднее не принадлежит;
  б) потому что имеется число 11, которое существенно отличается от всех остальных и поэтому меняет среднее в большую сторону;
  в) найти урезанное среднее данного набора:

~~–9,~~ –9, –10, –10, –11, –11, –12, –13, –15, ~~11~~. Оно приближенно равно -11,4.

Задача.

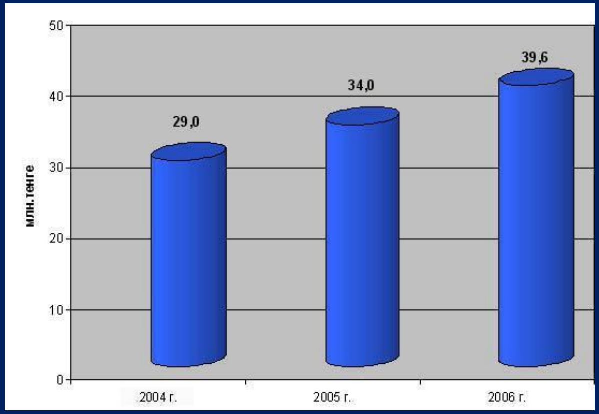
- **1. Про отличника.**
- У отличника Коли были отметки по математике «5», «5», «5», «5». И вдруг в конце четверти он получил «2». Он знает, что учитель математики выставляет четвертную отметку как среднее всех отметок, имеющихся у ученика, и не признает пересдач. Какое среднее было бы предпочтительнее для Коли, если он, естественно, надеется на пятерку в четверти?
- Решение. 1. Попробуем начать с такого очень распространенного способа выставления четвертных отметок, как нахождение *среднего арифметического*:
- Естественно, что любой учитель округлит этот результат в меньшую сторону и выставит итоговую отметку «4». Значит, это среднее Колю не устраивает.
- Мы видим, что один неудачный ответ на балл снизил четвертную отметку. Ведь до этого среднее арифметическое равнялось 5.
- 2. Помочь Колиной мечте сбыться может другое среднее, и не одно! Например, если в качестве среднего учитель Коли возьмет *медиану* или *урезанное среднее*, то в четверти Коле обеспечена пятерка:
- — медиана набора 2, 5, 5, 5, 5 равна 5;
- — урезанное среднее набора 5, 5, 5, равно
- *Ответ:* медиана или урезанное среднее.

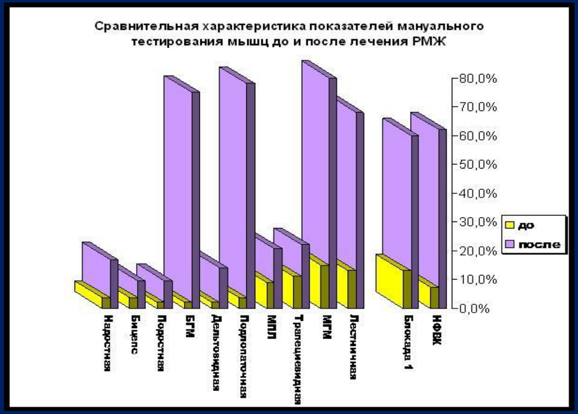
Наглядное представление статистической информации.

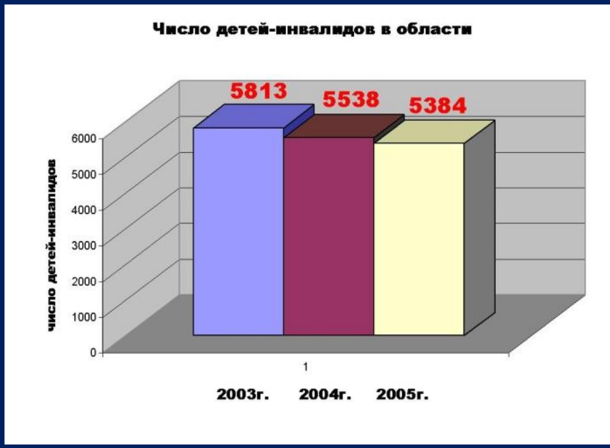
- *ДИАГРАММА (от греч. diagramma -- изображение, рисунок, чертеж), графическое изображение, наглядно показывающее соотношение каких-либо величин.*

  Универсальная энциклопедия Кирилла и Мефодия

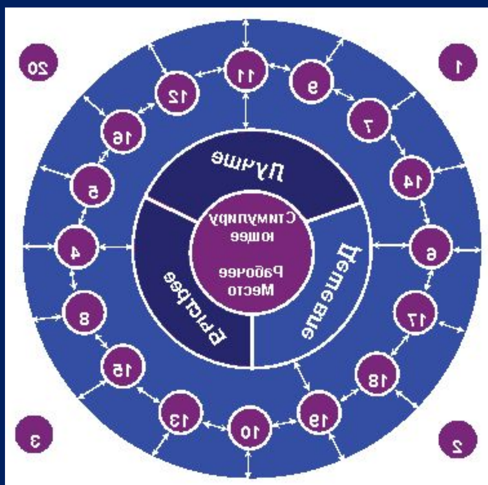
Примеры столбчатых диаграмм.

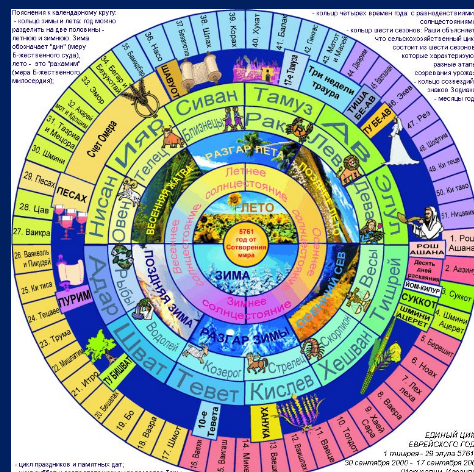


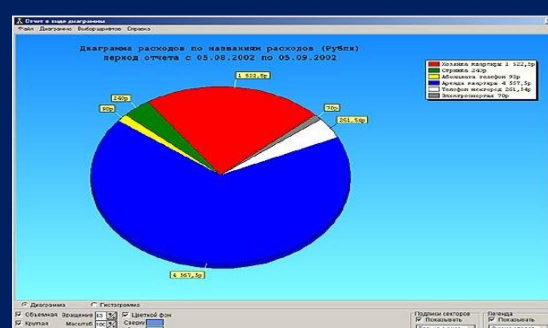


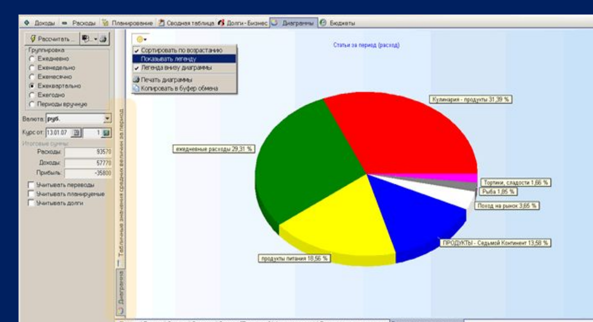


Изображения диаграмм могут быть самыми разнообразными.









Какая диаграмма лучше?

Чаще всего(но не всегда) диаграммы взаимозаменяемы, и одни и те же статистические данные можно представить на различных диаграммах. Тем не менее, в каждом конкретном случае можно выбрать наиболее наглядный способ представления статистических данных:

график лучше всего подходит для того, чтобы показать динамику изменения величины во времени

столбчатая диаграмма удобна для сравнения абсолютных значений изучаемого признака

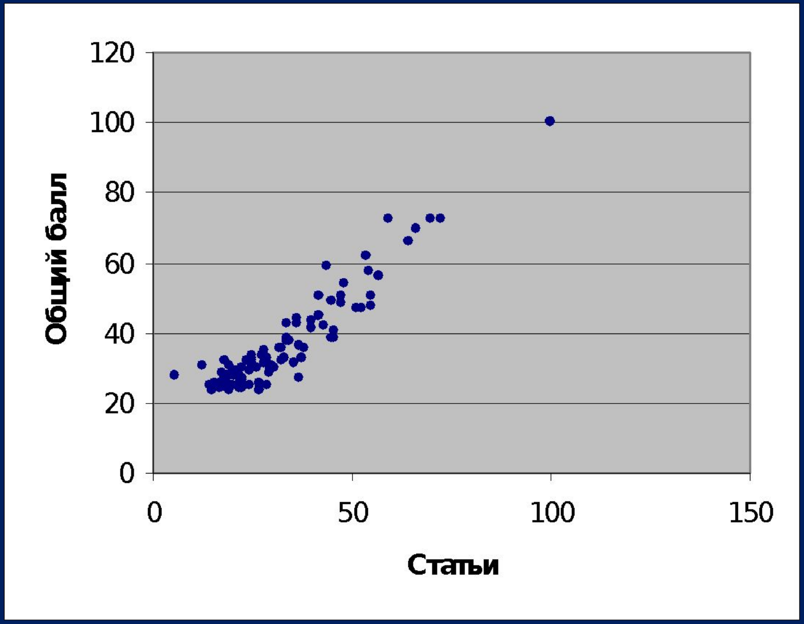
круговая диаграмма незаменима, когда нужно показать в какой пропорции целое делится на части(если количество частей невелико, иначе она теряет наглядность)

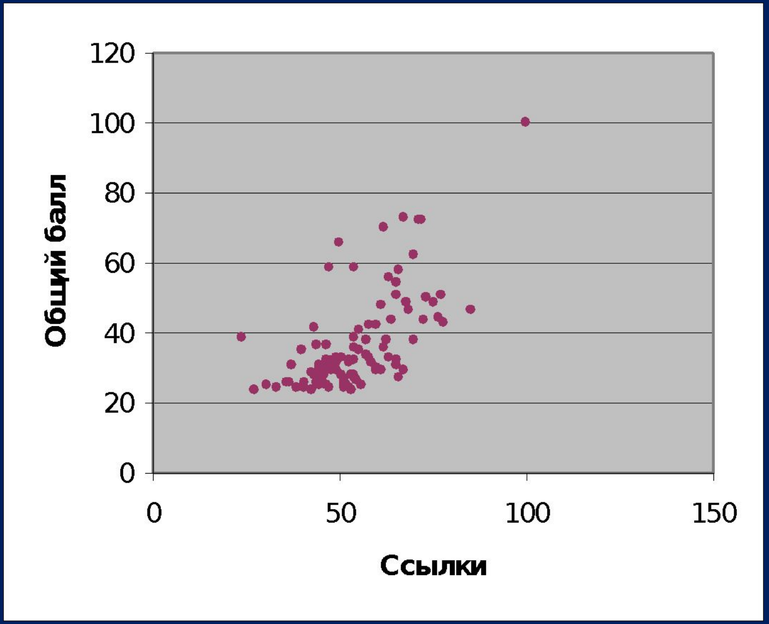
взаимосвязь двух величин лучше всего отражает *рассеянная диаграмма.*

Полигон частот используется для отображения данных частотных таблиц

Гистограмма отображает данные интервальной таблицы

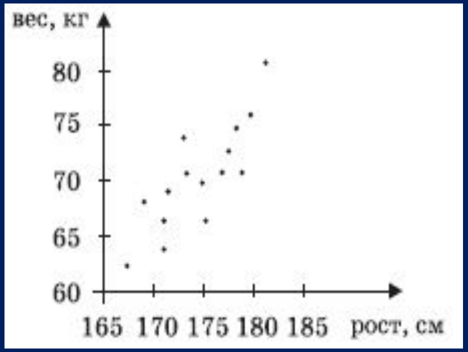
Примеры рассеянных диаграмм.



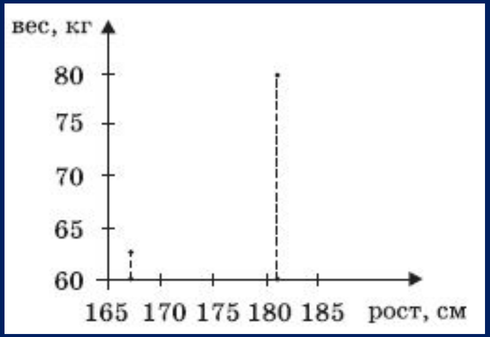


Диаграммы рассеивания.

- Задание. Имеется диаграмма 1 рассеивания, показывающая взаимосвязь роста и веса 15 опрошенных юношей. Найти рост самого высокого и рост самого низкого юноши (т.е. определить минимальное и максимальное значения набора чисел, заданного диаграммой рассеивания).



- Для этого будем использовать следующее: минимальный рост соответствует абсциссе точки, расположенной *левее других*, а максимальный — абсциссе *крайней точки справа*. Получим: min ≈ 167 см, max ≈ 181 см.
- Интересно, что остальные 13 точек участия в «обсуждении» вообще не принимают. Их можно стереть — результат от этого не изменится (см. диаграмму 2).
- Вторая особенность получаемого результата в том, что, в отличие от работы с таблицей, данные, получаемые с помощью графиков и диаграмм, являются не точными, а приближенными, то есть ответы могут отличаться.



- Аналогично находим минимальное и максимальное значения веса, как ординаты самой *нижней* и самой *верхней* точек.

Задача 1.

- У вас есть 9 разных книг из серии «Занимательная математика». Сколькими способами можно:
- а) расставить их на полки;
- б) подарить 3 из них победителям школьной олимпиады, занявшим первые три призовых места;
- в) выбрать три из них для подарка своему племяннику;
- г) распределить их поровну между тремя учениками.

Определите вид комбинации. Вычислите.

Решение.

а) это перестановка

$P_9 = 9!$ $9! = 362980$ способов расставить книги на полке.

б) это размещение

$A^3_9 = 9!/6! = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$ способа подарить три книги победителям школьной олимпиады (с учетом порядка).

в) это сочетание

$C^3_9 = 9!/6!3! = 7 \cdot 8 \cdot 9/2 \cdot 3 = 84$ способа выбрать три книги из девяти для подарка (порядок значения не имеет).

г) по правилу умножения

$C^3_9 \cdot C^3_6 \cdot C^3_3 = 84 \cdot 20 = 1680$ способов разделить поровну девять книг между тремя учениками.

Задача 2.

Два стрелка сделали по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания для первого стрелка 0,7, для второго 0,6. Какова вероятность, что:

а) оба промахнутся;

б) оба попадут;

в) хотя бы один попадет;

г) хотя бы один промахнется.

Решение.

Рассмотрим события:

A= {первый стрелок попадет}

B= {второй стрелок попадет}

C= {первый стрелок промахнется}

D= {второй стрелок промахнется}

События A и C, B и D противоположные

$P(C)=1-P(A)=1-0,7=0,3$

$P(D)=1-P(B)=1-0,6=0,4$

а) $P(C \cap D)=P(C) \cdot P(D)=0,3 \cdot 0,4=0,12$

б) $P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B)=0,7 \cdot 0,6=0,42$

в) $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)=0,7+0,6-0,42=0,88$

г) $P(C \cup D)=P(C)+P(D)-P(C \cap D)=0,3+0,4-0,12=0,58$

Молодцы!

Случайные события

Мы часто говорим:

- «это возможно»,
- «это невозможно»,
- «это маловероятно»,
- «это обязательно случится».

События, которые в одних и тех же условиях могут произойти, а могут и не произойти, называются *случайными*.