



Теория вероятностей и комбинаторные правила решения задач

МОУ № 12 г. о.Жуковский
Богданова С.В.



Эпиграф урока:



«Число, место и комбинация – три взаимно перекрещивающиеся, но отличные сферы мышления, к которым можно отнести все математические идеи».

Дж. Сильвестр



Классическое определение вероятности

Стохастическим называют опыт, если заранее нельзя предугадать его результаты. Результаты (исходы) такого опыта называются *событиями*.

Пример: выбрасывается игральный кубик (опыт);
выпадает двойка (событие).



Событие, которое обязательно произойдет в результате испытания, называется *достоверным*, а которое не может произойти, - *невозможным*.

Пример: В мешке лежат три картофелины.

Опыт – изъятие овоща из мешка.

Достоверное событие – изъятие картофелины.

Невозможное событие – изъятие кабачка.



Классическое определение вероятности

Равновозможными называют события, если в результате опыта ни одно из них не имеет большую возможность появления, чем другие.

Примеры: 1) Опыт - выбрасывается монета.
Выпадение орла и выпадение решки –
равновозможные события.

2) В урне лежат три шара. Два белых и синий.
Опыт – извлечение шара.

События – извлекли синий шар и извлекли
белый шар - неравновозможны.

Появление белого шара имеет больше шансов..



Классическое определение вероятности

Несовместимыми (несовместными) называют события, если наступление одного из них исключает наступление других.

Пример: 1) В результате одного выбрасывания выпадает орел (событие А) или решка (событие В).

События А и В - несовместны.

2) В результате двух выбрасываний выпадает орел (событие А) или решка (событие В).

События А и В - совместны.

Выпадение орла в первый раз не исключает выпадение решки во второй



Классическое определение вероятности

Полной группой событий называется множество всех событий рассматриваемого опыта, одно из которых обязательно произойдет, а любые два других несовместны.

События образующие полную группу называют *элементарными*.

Пример: 1) Опыт – один раз выбрасывается монета.

Элементарные события: выпадение орла и выпадение решки образуют полную группу.



Классическое определение вероятности

Вероятностью случайного события A называется отношение числа элементарных событий, которые благоприятствуют этому событию, к общему числу всех элементарных событий, входящих в данную группу .

$$P(A) = m/n$$





Общая схема решения вероятностных задач (единичные испытания)

1. Определить, в чем состоит случайный эксперимент.
2. Определить, какие в эксперименте элементарные события.
3. Убедиться, что события равновероятны.
4. Найти общее число элементарных исходов (n).
5. Определить, какие элементарные события благоприятствуют событию A , найти их количество (m).
6. Найти вероятность события A по формуле $P(A)=m/n$



Для конечных множеств событий при нахождении m и n широко используют правила комбинаторики.

Задача №1: Сколько двузначных чисел можно составить используя цифры 7; 8; 9 (цифры могут повторяться)?

В данном случае легко перебрать все комбинации.

77	88	99
78	87	97
79	89	98

9 вариантов



Задача №2: Сколько пятизначных можно составить используя цифры 7; 8; 9 (цифры могут повторяться)?

Как видим, в этой задаче перебор довольно затруднителен. Решим задачу иначе.

На первом месте может стоять любая из трех цифр – 3 варианта.

На втором месте может стоять любая из трех цифр – 3 варианта.

На третьем месте может стоять любая из трех цифр – 3 варианта.

На четвертом месте может стоять любая из трех цифр – 3 варианта.

На пятом месте может стоять любая из трех цифр – 3 варианта.

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

Комбинаторное правило умножения



Задачи открытого банка



Задача 1. Ученика попросили назвать число от 1 до 100. Какова вероятность того, что он назовёт число 56?

Число возможных исходов - 100 (сто чисел). Верно названное число одно. Это 56, значит благоприятный исход один. Вероятность того, что он назовёт число 56 будет один к ста или 0,01.

Ответ: 0,01



Задача 2. Ученика попросили назвать число от 1 до 100. Какова вероятность того, что он назовёт число кратное пяти?

Число возможных исходов 100 (сто чисел). Чисел кратных пяти двадцать

(перечислим): 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100. То есть число благоприятных исходов 20.

Вероятность того, что ученик назовёт число кратное пяти равна 20 к 100 или $20/100=0,2$.

Ответ: 0,2



Задача 3. Ученика попросили назвать число от 1 до 100. Какова вероятность того, что он назовёт число, принадлежащее промежутку от 5 до 20 включительно?

Число возможных исходов - 100. Число благоприятных исходов - 16: это числа от 5 до 20 (5,6.....19,20), причём 5 и 20 входят в промежуток (в условии сказано «от 5 до 20 включительно»).

Искомая вероятность равна $16/100$.

Ответ: 0,16



Задача 4. Валя выбирает трёхзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 51.

Число возможных исходов - это количество трёхзначных чисел. Их существует от 100 до 999, быстрее всего их можно посчитать так: $1000 - 1 - 99 = 900$ (исключаем тысячу и числа от 1 до 99). То есть число всевозможных исходов: 900. Найдем, сколько трехзначных чисел делится на 51. Если мы поделим 999 - самое большое трехзначное число - на 51, то получим приблизительно 19 целых пятьдесят восемь сотых. То есть в 999 вмещается 19 чисел, кратных 51. Но среди них есть и само число 51, которое не является трехзначным. А значит трехзначных чисел, делящихся на 51 - 18.

Число благоприятных исходов 18. Вероятность искомого события равна 18 к 900, или $18/900 = 0,02$.

Ответ: **0,02**



Задача 5. Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся П. верно решит больше 7 задач, равна 0,78. Вероятность того, что П. верно решит больше 6 задач, равна 0,89. Найдите вероятность того, что П. верно решит ровно 7 задач.

Рассмотрим события $A = \text{«учащийся решит 7 задач»}$ и $B = \text{«учащийся решит больше 7 задач»}$. Их сумма — событие $A + B = \text{«учащийся решит больше 6 задач»}$. События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Тогда, используя данные задачи, получаем: $0,89 = P(A) + 0,78$, откуда $P(A) = 0,89 - 0,78 = 0,11$.

Ответ: 0,11



Задача 6. Если гроссмейстер A играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера B с вероятностью $0,5$. Если A играет черными, то A выигрывает у B с вероятностью $0,3$. Гроссмейстеры A и B играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что A выиграет оба раза.

Возможность выиграть первую и вторую партию не зависят друг от друга. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$0,5 \cdot 0,3 = 0,15.$$

Ответ: $0,15$.



Задача 7. В классе 21 учащийся, среди них два друга — Вадим и Олег. Класс случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Вадим и Олег окажутся в одной группе.

В классе 21 учащийся. 3 равные группы - это группы по 7 человек. Пусть Вадим находится в одной из трех групп. Тогда для Олега в группе Вадима остается 6 мест из 20 возможных. Таким образом, вероятность того, что Вадим и Олег окажутся в одной группе: 6 из 20

Ответ: 0,3.



Задача 8. В фирме такси в данный момент свободно 10 машин: 5 чёрных, 1 жёлтая и 4 зелёных. На вызов выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчику. Найдите вероятность того, что к нему приедет жёлтое такси.

Возможное число исходов - 10. Число благоприятных исходов - 1 (жёлтая машина одна). Искомая вероятность равна 1 к 10 или 0,1.

Ответ: 0,1



Задача 9. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Пусть A = «чайник прослужит больше года, но меньше двух лет», B = «чайник прослужит больше двух лет», C = «чайник прослужит ровно два года», тогда $A + B + C$ = «чайник прослужит больше года».

События A , B и C несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Вероятность события C , состоящего в том, что чайник выйдет из строя ровно через два года — строго в тот же день, час и секунду — равна нулю. Тогда:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = P(A) + P(B),$$

откуда, используя данные из условия, получаем
 $0,93 = P(A) + 0,87$.

Тем самым, для искомой вероятности имеем:

$$P(A) = 0,93 - 0,87 = 0,06.$$

Ответ: 0,06.



Задача 10. У Вити в копилке лежит 12 рублёвых, 6 двухрублёвых, 4 пятирублёвых и 3 десятирублёвых монеты. Витя наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит более 70 рублей.

У Вити в копилке лежит $12 + 6 + 4 + 3 = 25$ монет на сумму $12 + 12 + 20 + 30 = 74$ рубля. Больше 70 рублей останется, если достать из копилки либо рублёвую, либо двухрублёвую монету. Искомая вероятность равна $18 : 25 = 0,72$.

Ответ: 0,72.



Задача 11. В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 24 из США, 13 из Мексики, остальные — из Канады. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Канады.



Благоприятное событие A : первой выступает спортсменка из Канады

К-во всех событий группы: $n=?$

К-во благоприятных событий: $m=?$

Соответствует количеству всех гимнасток.
 $n=50$

Соответствует количеству гимнасток из Канады.
 $m=50-(24+13)=13$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{13}{50} = \boxed{0,26}$$



Задача 12. Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 80 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день 8 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

Выясним, как распределятся выступления по дням:

1 день – 8 выступлений, остальные поровну, значит по 18 выступлений в день.

2 день - 18 выступлений,

3 день – 18 выступлений,

4 день – 18 выступлений,

5 день – 18 выступлений

Вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса, равна 18 к 80 или $18/80=0,225$.

Ответ: 0,225



Задача 13. Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 участников из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России?

В данном случае нужно поставить себя на место Руслана Орлова.

Он будет играть кем-то из 25 спортсменов (на чемпионат приехали Руслан и ещё 25 спортсменов), значит возможных исходов 25. Из них осталось 9 спортсменов из России. Это и есть число благоприятных исходов. Вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России 9 к 25 или **0,36**.



Задача 14. В среднем **из 1400** садовых насосов, поступивших в продажу, 14 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.



Благоприятное событие A : выбранный насос не подтекает.

К-во благоприятных событий: $m=?$

Соответствует количеству исправных насосов
 $m=1400-14=1386$

К-во всех событий группы: $n=?$

Соответствует количеству всех насосов.
 $n=1400$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1386}{1400} = 0,99$$



Задача 15. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 190 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.



Благоприятное событие A : купленная сумка оказалась качественной.

К-во всех событий группы: $n=?$

К-во благоприятных событий: $m=?$

Соответствует количеству всех сумок.
 $n=190+8$

Соответствует количеству качественных сумок.
 $m=190$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{190}{198} = 0,959... \approx \boxed{0,96}$$





- В кармане у Пети было 4 монеты по рублю и 2 монеты по 5 рублей.
 - Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман.
 - Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат в
 - разных карманах.
- В кармане у Пети было 4 монеты по рублю и 2 монеты по 5 рублей.
 - Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман.
 - Найдите вероятность того, что обе пятирублевые монеты лежат в
 - одном кармане.





Задача 16. В кармане у Пети было 4 монеты по рублю и 2 монеты по 5 рублей.

Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман.

Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат в разных карманах.

- Вероятность и правило произведения.

- Решение:

- Всего 6 монет. Возможны варианты перекалывания:

- 1 карман 2 карман

- 5 1 1 5 1 1

- 1 1 5 1 1 5

- 1 5 1 1 5 1

- $P = (2/6 * 4/5 * 3/4) * 3 = 3/5 = 0,6$

- «5» «1» «1»





Задача 17. В кармане у Пети было 4 монеты по рублю и 2 монеты по 5 рублей.

Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман.

Найдите вероятность того, что обе пятирублевые монеты лежат в одном кармане.

- Вероятность и правило произведения.

- Решение:

- Всего 6 монет. Возможны варианты перекалывания:

- 1 карман 2 карман

- 5 5 1 1 1 1

- 5 1 5 1 1 1 **ИЛИ** наоборот

- 1 5 5 1 1 1

- $P = (2/6 * 1/5 * 4/4) * 2 = 2/5 = 0,4$

- «5» «5» «1»

-



Задача 18. При двукратном бросании игрального кубика в сумме выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что первый раз выпало меньше трёх очков.

Сумму в шесть очков можно получить следующими способами (переберём варианты): $1+5$, $2+4$, $3+3$, $4+2$, $5+1$ - всего их пять, это и есть число возможных исходов. Из представленных вариантов также видно, что менее трёх очков при первом броске может выпасть только в двух случаях. Искомая вероятность равна 2 к 5 или 0,4.

Ответ: 0,4



Задача 19. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

Опыт: бросают три игральные кости.

Благоприятное событие A : в сумме выпало 7 очков.



К-во благоприятных событий $m=?$

331	223	511
313	232	151
133	322	115

412	142
421	214
124	241

18

К-во всех событий группы $n=?$

1-я кость - 6 вариантов
 2-я кость - 6 вариантов
 3-я кость - 6 вариантов

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{18}{216} \approx 0,08$$



Задача 20. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12



Задача 21. При двукратном бросании игрального кубика в сумме выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что первый раз выпало меньше трёх очков.

Сумму в шесть очков можно получить следующими способами (переберём варианты):

1 кубик	2 кубик
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1

- всего их пять, это и есть число возможных исходов. Из представленных вариантов также видно, что менее трёх очков при первом броске может выпасть только в двух случаях. Искомая вероятность равна 2 к 5 или 0,4.

Ответ: 0,4



Задача 22. Наташа и Вика играют в кости. Они бросают игральную кость по одному разу. Выигрывает тот, кто выбросил больше очков. Если очков выпало поровну, то наступает ничья. В сумме выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что Наташа выиграла.

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Всего 5 исходов.
 Благоприятных исходов
 – 2. $P = 2/5$



Задача 23. Монету бросают трижды. Найдите вероятность того, первые два броска окончатся одинаково.

Найдём число возможных исходов, переберём все варианты бросков. В подобных задачах составляйте таблицу, так считать удобнее

	1-й бросок	2-ой бросок	3-ий бросок
1	орёл	орёл	орёл
2	орёл	орёл	решка
3	орёл	решка	решка
4	орёл	решка	орёл
5	решка	решка	решка
6	решка	решка	орёл
7	решка	орёл	орёл
8	решка	орёл	решка

Первые два броска одинаково могут закончиться в четырёх случаях это 1,2,5,6 варианты, то есть благоприятных исходов 4. Искомая вероятность равна $4/8=0,5$.



Задача 24. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.

В данной задаче составляется та же таблица, что и предыдущей. Орёл не выпадет ни разу только в одном варианте из восьми (пятый вариант). Искомая вероятность равна 1 к 8 или 0,125.

Ответ: 0,125



Задача 25. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Всего исходов – 36

Благоприятных

исходов – 6

$P=6/36=1/6$



Задача 26. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орел не выпадет ни разу.



Условие можно трактовать так: какова вероятность того, что все четыре раза выпадет решка?

К-во всех событий группы $n=?$

К-во благоприятных событий $m=?$

$$m=1$$

Четыре раза выпала решка.

1-й раз - 2 варианта
2-й раз - 2 варианта
3-й раз - 2 варианта
4-й раз - 2 варианта

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

