

# Функции. Теория пределов.

---

# План

---

- I. Величины постоянные и переменные
  - II. Понятие функции:
    - 1. определение функции
    - 2. область определения, значения
    - 3. сложная функция
    - 4. способы задания функции
  - III. Основные элементарные функции, их свойства, графики
  - IV. Непрерывность функции. Предел функции
  - V. Бесконечно малые и бесконечно большие величины
  - VI. Основные теоремы о пределах
  - VII. Методы раскрытия неопределенностей  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$
-

# I. Величины постоянные и переменные

---

При изучении закономерностей, встречающихся в природе, все время приходится иметь дело с величинами постоянными и величинами переменными.

**Def1:** Постоянной величиной называется величина, сохраняющая одно и то же значение.

**Def2:** Переменной величиной называется величина, которая может принимать различные числовые значения.

Обозначение: *переменная величина:  $x, y, z, v, u...$*

*постоянная величина:  $a, b, c...$*

**Def3:** Множество всех числовых значений переменной величины называется областью изменения этой величины

---

---

Часто будем рассматривать случай, когда известна и область изменения  $X$ , и порядок, в котором она принимает свои числовые значения. В этом случае будем говорить об упорядоченной переменной величине.

# 1) числовая последовательность  $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$

2) Арифметическая и геометрическая прогрессии

Рассмотрим числовую бесконечную последовательность:

$$x = x_n, n \in \mathbb{N}$$

**Def1:** Если при  $n \rightarrow \infty$   $x_n \rightarrow a$  говорят, что  $a$  – есть предел переменной величины

$$x = x_n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \# \quad x_n = \frac{1}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

---

# II. Понятие функции

## 1. Определение функции

---

*Изучая какое-нибудь явление, мы обычно имеем дело с совокупностью переменных величин, которые связаны между собой так, что значения одних величин полностью определяют значение других.*

Пусть  $D$  и  $E$  – непустые числовые множества, а  $x$  и  $y$  – соответственно их элементы. Если каждому  $x \in D$  ставится в соответствии по некоторому закону только одно значение  $y \in E$  то говорят, что между переменными  $x$  и  $y$  существует **функциональная зависимость** и называют  $x$  независимой переменной ( $v$ -аргументом), а  $y$  – зависимой переменной ( $v$ -функцией)

**Символическая запись функции:**  $y = f(x) \quad (x \in D)$

---

## 2. Область определения, значения

---

- **Def:** Областью определения  $D$  функции называется множество значений  $x$ , для которых функция определена (имеет смысл)
- **Def:** Множеством значений  $E$  функции называются все значения, которые принимает зависимая переменная

Функция  $f$  отображает множество  $D$  на множестве  $E$ .

Для функций  $f$  и  $g$ , заданных на одном и том же множестве  $D$ , можно определить их сумму, разность, произведение и частное. Это новые функции:

$$f(x) + g(x); f(x) - g(x); f(x) \cdot g(x); f(x) / g(x); (x \in D)$$

где в случае частного предполагается, что  $g(x) \neq 0$  на  $D$ .

---

## 3. Сложная функция

---

- **Def:** Если функция  $f$  отображает множество  $D$  на множество  $E$ , а функция  $F$  отображает множество  $E$  на множество  $G$ , то функция  $z=F(f(x))$  называется функцией от функций  $f$  и  $F$  (или сложной функцией). Она определена на множестве  $D$  и отображает  $D$  на  $G$ .
-

## 4. Способы задания функции

---

□ **Аналитический способ** – это способ задания функций при помощи формул.

Например:  $y=2x$ ;  $y=x+1$ ;  $y=\lg x$ .

Если уравнение, с помощью которого задана функция, не разрешено относительно  $y$ , то функция называется неявной.

Например:  $2x+3y-5=0$  – уравнение неявно задающее функцию.

$$y=(5-2x)/3$$

Функция задана не одной, а несколькими переменными.

Например:

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 0 \\ -x^2, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

---



---

□ **Табличный способ** – это способ задания функции при помощи таблицы. Примерами такого задания являются таблицы логарифмов и т.п.

Недостатком табличного способа является то, что функция задается не для всех значений аргумента.

□ **Графический способ** – это способ задания функции при помощи графика. Графиком функции  $y=f(x)$  называется множество точек  $(x; y)$  плоскости  $(XOY)$  координаты которых связаны соотношением  $y=f(x)$ . Само равенство  $y=f(x)$  называется Уравнением это графика

---

# III. Основные элементарные функции, их свойства, графики

---

## 1. Целая рациональная функция

Многочлен вида  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$  - целая рациональная функция.

*Пример:*  $y = kx + b$  – линейная функция. Её график – прямая линия. При  $b = 0$  линейная функция  $y = kx$  выражает прямо пропорциональную зависимость  $y$  от  $x$ .

## 2. Дробно-рациональная функция

Эта функция определяется как отношение двух многочленов:

$$y = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n}$$

*Пример:*  $y = k/x$  – обратно пропорциональная зависимость между  $x$  и  $y$ .  
Её график – равносторонняя гипербола.

## 3. Степенная функция

$y = x^a$ , где

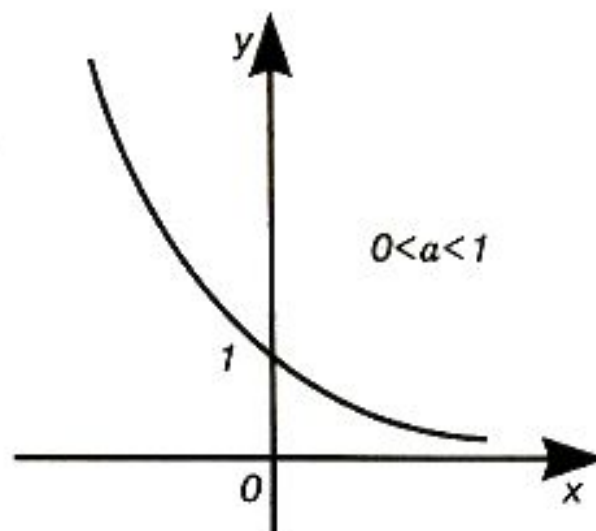
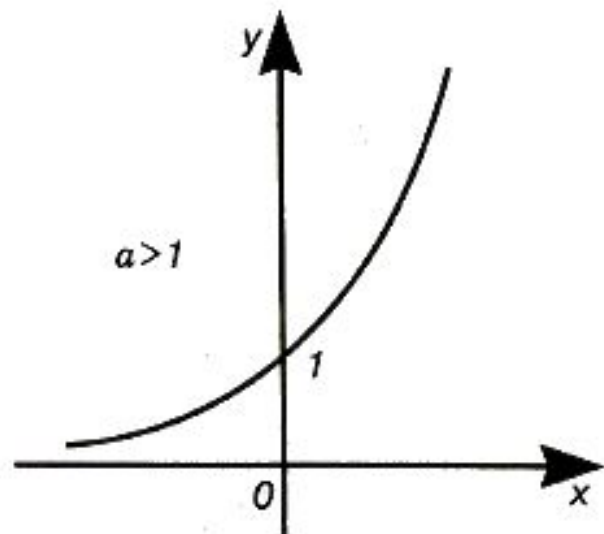
*Пример<sub>1</sub>:*  $a \in R$   
 $y = ax^2$

*Пример<sub>2</sub>:*  $y = \sqrt{x}$

---

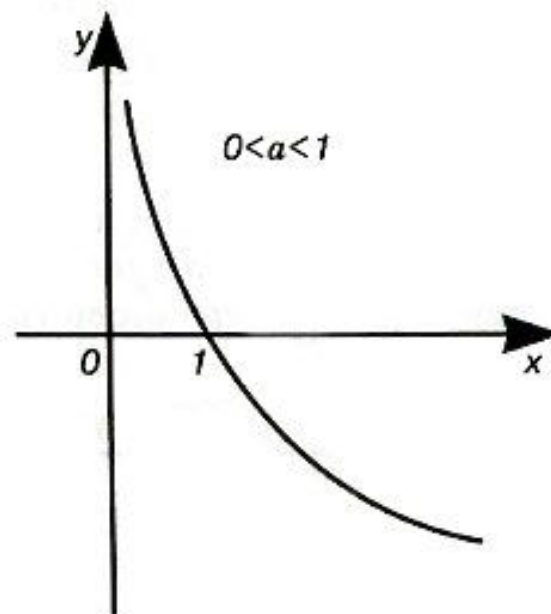
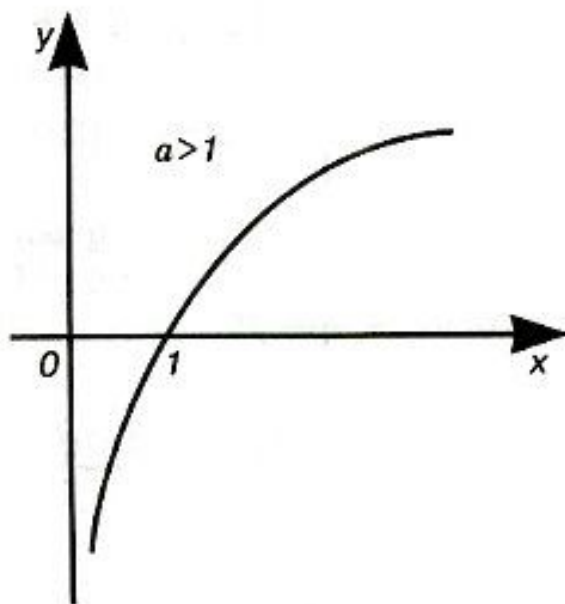
#### 4. Показательная функция $y=a^x$ , $a>0$ и $a\neq 1$

---



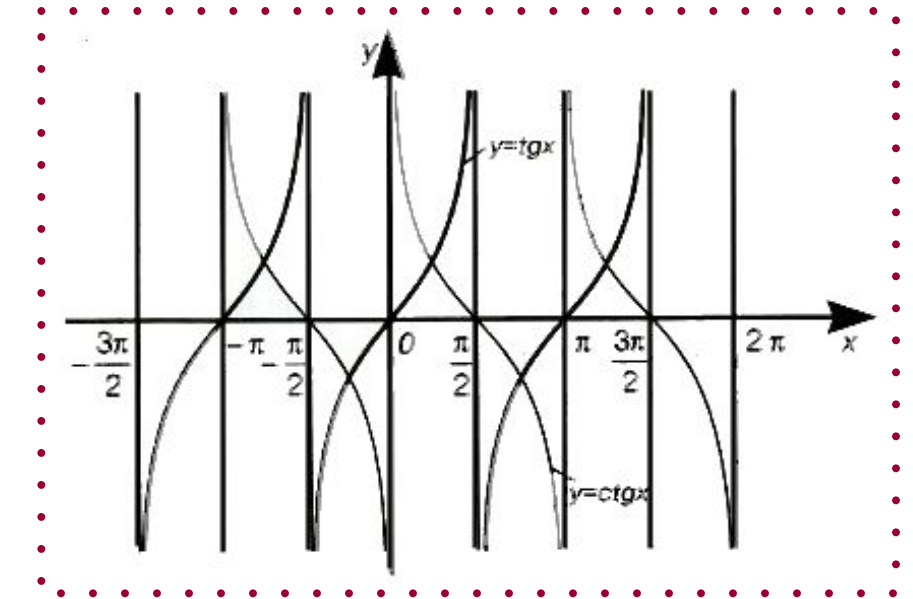
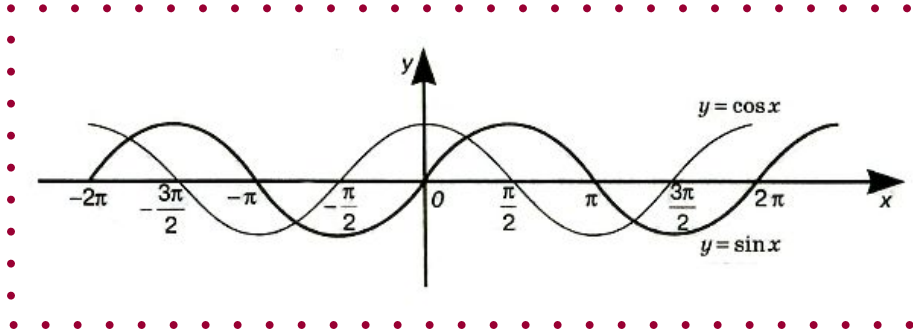
5. Логарифмическая функция  $y = \log_a x$ ,  $a > 0$  и  $a \neq 1$

---



## 6. Тригонометрические функции

$$y = \cos x; y = \sin x; y = \operatorname{tg} x; y = \operatorname{ctg} x$$

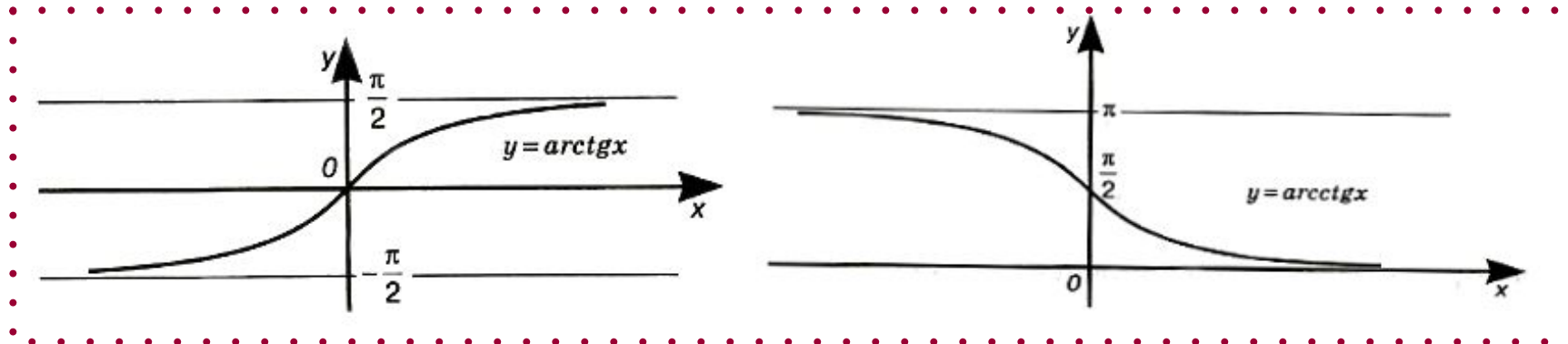
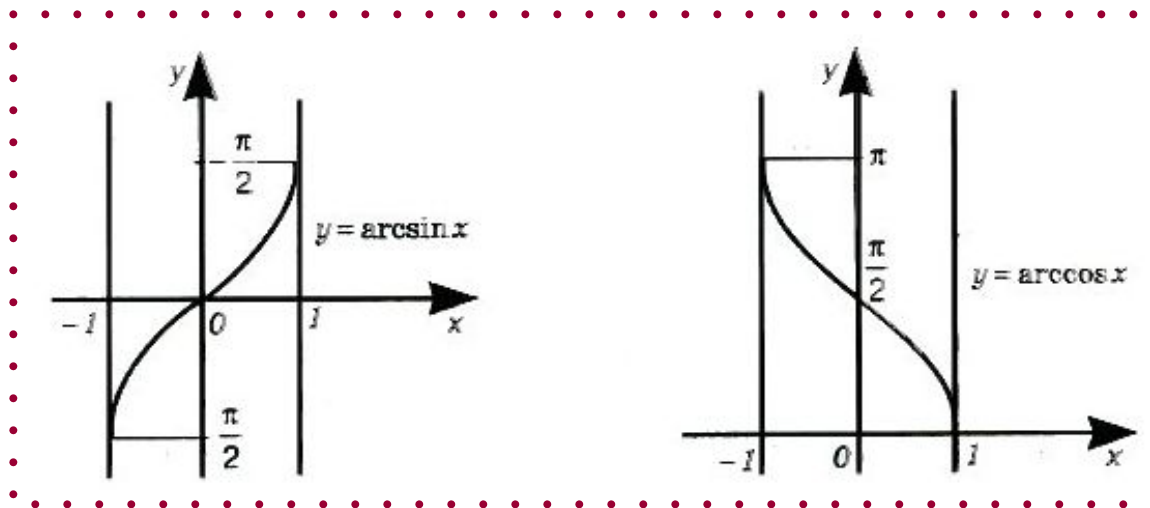


Переменная  $x$  обычно выражается в радианах.

## 7. Обратные тригонометрические функции

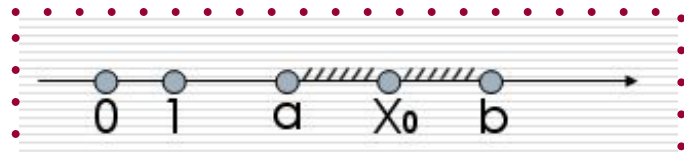
$y = \arcsin x$ ;  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ ;  $y = \arccos x$   $|x| \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq \pi$ ;

$y = \arctg x$   $|y| < \pi/2$ ;  $y = \text{arcctg} x$   $0 < y < \pi$

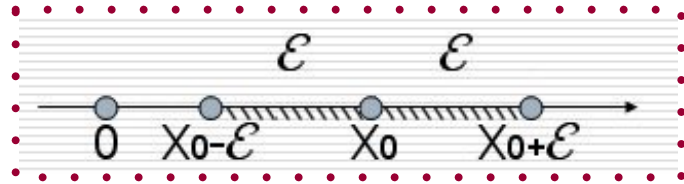


## IV. Непрерывность и предел функции

**Def:** Окрестностью данной точки  $X_0$  называется произвольный интервал  $(a; b)$ , содержащий внутри себя эту точку.



Часто рассматривают  $\varepsilon$ - окрестность точки  $X_0$ , когда эта точка является центром окрестности.



В этом случае число называется радиусом окрестности  $(X_0 - \varepsilon; X_0 + \varepsilon;)$

# Предел функции

---

Понятие предела является одним из важнейших понятий, лежащих в основе математического анализа. Каждая операция математического анализа связана с соответствующим предельным переходом.

**Def:** Число  $A$  называется **пределом** функции  $y=f(x)$  при стремлении  $x$  к  $a$  (или в точке  $a$ ), если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $0 < |x-a| < \delta$ , имеет место неравенство  $|f(x)-A| < \varepsilon$

Обозначается это так:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  или  $f(x) \rightarrow A$  при  $x \rightarrow a$

Другими словами, число  $A$  есть предел функции  $f(x)$  в точке  $x=a$ , если для всех  $x$ , достаточно близких к числу  $a$  и отличных от него, соответствующие им значения функции  $f(x)$  оказываются сколь угодно близкими к числу  $A$  (естественно, в тех точках  $x$ , в которых функция  $f(x)$  определена).

---



# Непрерывность функции

---

Если при постепенном изменении аргумента функция также изменяется постепенно, то говорят, что функция непрерывна. При этом малому изменению аргумента соответствует малое изменение функции. Дадим строгое определение:

*Def:* Функция  $f(x)$  называется *непрерывной в точке  $x_0$* , если она определена в некоторой окрестности этой точки (включая саму эту точку) и предел функции в точке  $x_0$  существует и равен значению функции в самой этой точке, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A = f(x_0)$$

---

# V. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

---

- **Def:** Функция  $\alpha(x)$  называется **бесконечно малой** при  $x \rightarrow a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$$

- **Def:** Функция  $\alpha(x)$  называется **бесконечно большой** при  $x \rightarrow a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \infty$$

---

# VI. Основные теоремы о пределах

---

**Теорема 1:** Для того, чтобы число  $A$  было пределом функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , необходимо и достаточно, чтобы эта функция была представлена в виде  $f(x) = A + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  — бесконечно малая.

**Следствие 1:** Функция не может в одной точке иметь 2 различных предела.

**Теорема 2:** Предел постоянной величины равен самой постоянной.

**Теорема 3:** Если функция  $f(x) \geq 0$  ( $f(x) \leq 0$ ) для всех  $x$  в некоторой окрестности точки  $a$ , кроме, быть может, самой точки  $a$ , и в точке  $a$  имеет предел, то  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$  ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq 0$ ).

---

# Основные теоремы о пределах

---

**Теорема 4:** Если функция  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  имеют пределы при  $x \rightarrow a$  то при  $x \rightarrow a$  имеет пределы также их сумма  $f_1(x)+f_2(x)$ , произведение  $f_1(x) \cdot f_2(x)$ , и при условии  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$  частное  $f_1(x)/f_2(x)$ , причем

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) / \lim_{x \rightarrow a} f_2(x).$$

**Следствие 2:** Если функция  $f(x)$  имеет предел при  $x \rightarrow a$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n \quad \text{где } n - \text{натуральное число.}$$

**Следствие 3:** Постоянный множитель можно выносить за

знак предела 
$$\lim_{x \rightarrow a} C f(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad C - \text{const}$$

---

## VII. Методы раскрытия неопределенностей

### 1. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

---

#### **Методы:**

1. Разложение числителя и знаменателя на множители с последующим сокращением.
2. Устранение иррациональных разностей.  
Домножение на сопряженное.
3. Первый замечательный предел.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

---

## 2. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

---

**Метод:** Деление на наибольшую степень

**Th:** Предел отношения двух многочленов (при условии, что аргумент стремится к  $\infty$ ) равен пределу отношения их старших членов.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n+1} + \dots + b_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m}{b_0 x^n} = \begin{cases} 0 & (m < n) \\ \frac{a_0}{b_0} & (m = n) \\ \infty & (m > n) \end{cases}$$

Здесь  $a_0 \neq 0$  и  $b_0 \neq 0$

---

## Примеры:

---

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 14x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n - 1}{n^4 + 2n}$$

---