Функции. Теория пределов.

План

I. Величины постоянные и переменные
II. Понятие функции:
   1. определение функции
   2. область определения, значения
   3. сложная функция
   4. способы задания функции
III. Основные элементарные функции, их свойства, графики
IV. Непрерывность функции. Предел функции
V. Бесконечно малые и бесконечно большие величины
VI. Основные теоремы о пределах
VII. Методы раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

I. Величины постоянные и переменные

При изучении закономерностей, встречающихся в природе, все время приходится иметь дело с величинами постоянными и величинами переменными.

Def1: **Постоянной величиной называется величина, сохраняющая одно и то же значение.**

Def2: **Переменной величиной называется величина, которая может принимать различные числовые значения.**
Обозначение: ***переменная величина:*** $x, y, z, v, u\ldots$
постоянная величина: $a, b, c\ldots$

Def3: **Множество всех числовых значений переменной величины называется <u>областью изменения этой величины</u>**

Часто будем рассматривать случай, когда известна и область изменения X, и порядок, в котором она принимает свои числовые значения. В этом случае будем говорить об упорядоченной переменной величине.

 # 1) числовая последовательность $x_{\mathrm{n}} = \frac{1}{n},\ \mathrm{n} \in \mathrm{N}$

2) Арифметическая и геометрическая прогрессии

Рассмотрим числовую бесконечную последовательность:

$$x = x_n,\ \mathrm{n} \in \mathrm{N}$$

Def1: Если при $n \to \infty$ $x_n \to a$**, то говорят, что a – есть предел переменной величины**

$$x = x_n \qquad \lim_{\mathrm{n} \to \infty} x_n = a \qquad \# \quad x_n = \frac{1}{n} \qquad \lim_{\mathrm{n} \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

II. Понятие функции
1. Определение функции

Изучая какое-нибудь явление, мы обычно имеем дело с совокупностью переменных величин, которые связаны между собой так, что значения одних величин полностью определяют значение других.

Пусть D и E – непустые числовые множества, а x и y – соответственно их элементы. Если каждому $x \in D$ ставиться в соответствии по некоторому закону только одно значение $y \in E$ то говорят, что между переменными x и y существует ***функциональная зависимость*** и называют x независимой переменной (v-аргументом), а y – зависимой переменной (v-функцией)

Символическая запись функции: $y = f(x) \;\; (x \in D)$

2. Область определения, значения

- **Def:** Областью определения D функции называется множество значений x, для которых функция определена (имеет смысл)
- **Def:** Множеством значений E функции называются все значения, которые принимает зависимая переменная

Функция f отображает множество D на множестве E .

Для функций f и g, заданных на одном и том же множестве D, можно определить их сумму, разность, произведение и частное. Это новые функции:

$$f(x)+g(x);\ f(x)-g(x);\ f(x)\cdot g(x);\ f(x)/g(x);\ (x\in D)$$

Где в случае частного предполагается, что $g(x)\neq 0$ на D.

3. Сложная функция

- **Def:** **Если функция f отображает множество D на множестве E, а функция F отображает множество E на множестве G, то функция $z=F(f(x))$ называется функцией от функций f и F (или сложной функцией). Она определена на множестве D и отображает D на G.**

4. Способы задания функции

- **Аналитический способ** – это способ задания функций при помощи формул.

Например: $y=2x$; $y=x+1$; $y=\lg x$.

Если уравнение, с помощью которого задана функция, не разрешено относительно y, то функция называется *неявной*.

Например: $2x+3y-5=0$ – уравнение неявно задающее функцию.

$$y=(5-2x)/3$$

Функция задана не одной, а несколькими переменными.

Например:
$$y=\begin{cases} x^2, \text{если } x \le 0 \\ -x^2, \text{если } x \ge 0 \end{cases}$$

- **Табличный способ** – это способ задания функции при помощи таблицы. Примерами такого задания являются таблицы логарифмов и т.п.
Недостатком табличного способа является то, что функция задается не для всех значений аргумента.

- **Графический способ** – это способ задания функции при помощи графика. Графиком функции $y=f(x)$ называется множество точек (х; у) плоскости (Х0У) координаты которых связаны соотношением $y=f(x)$. Само равенство $y=f(x)$ называется Уравнением это графика

III. Основные элементарные функции, их свойства, графики

1. *Целая рациональная функция*

Многочлен вида $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots a_mx^m$ -целая рациональная функция.
Пример: $y=kx+b$ – линейная функция. Её график – прямая линия. При $b=0$ линейная функция $y=kx$ выражает прямо пропорциональную зависимость у от х.

2. *Дробно-рациональная функция*

Эта функция определяется как отношение двух многочленов:

$$y=\frac{a_0+a_1x+\dots+a_mx^m}{b_0+b_1x+\dots+b_nx^n}$$

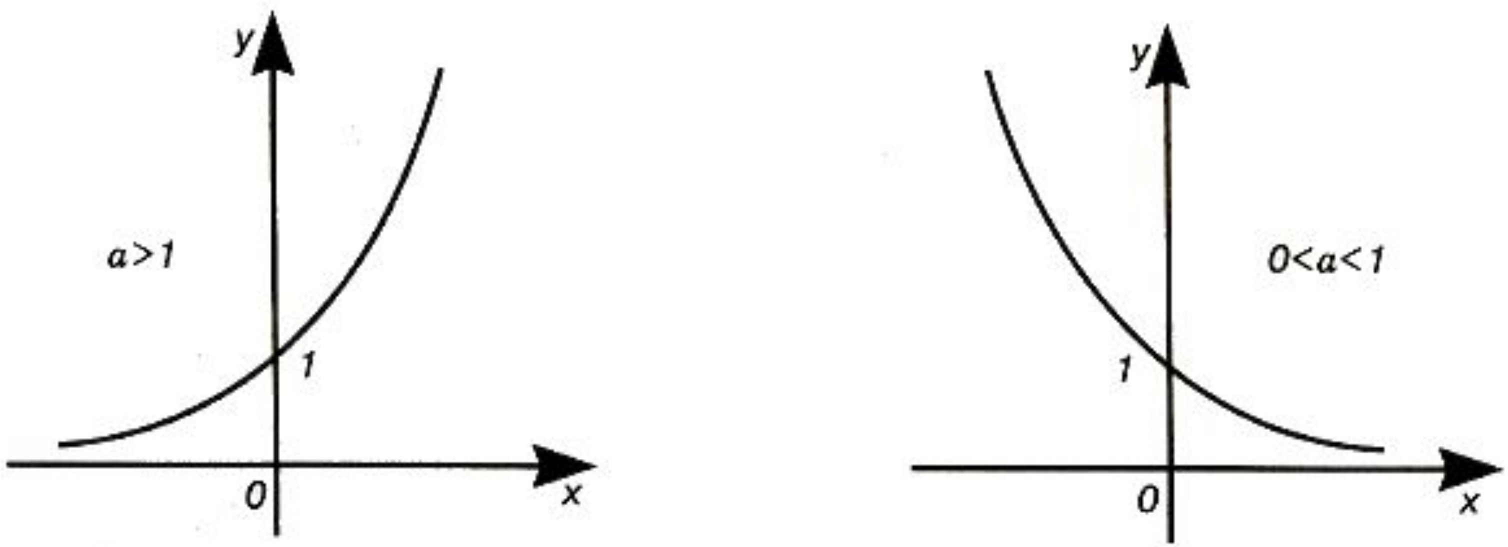
Пример: $y=k/x$ – обратно пропорциональная зависимость между х и у.
Её график – равносторонняя гипербола.

3. *Степенная функция*

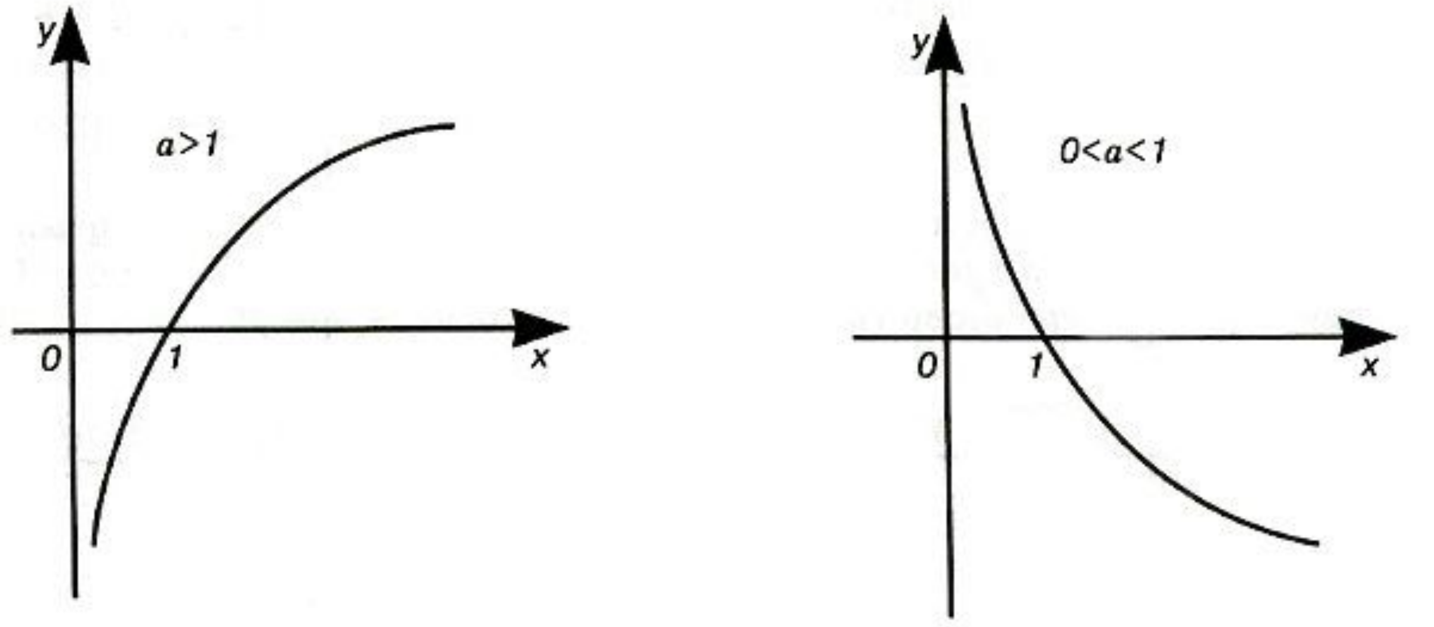
$y=x^a$, где $a\in R$

Пример₁: $y=ax^2$ *Пример₂*: $y=\sqrt{x}$

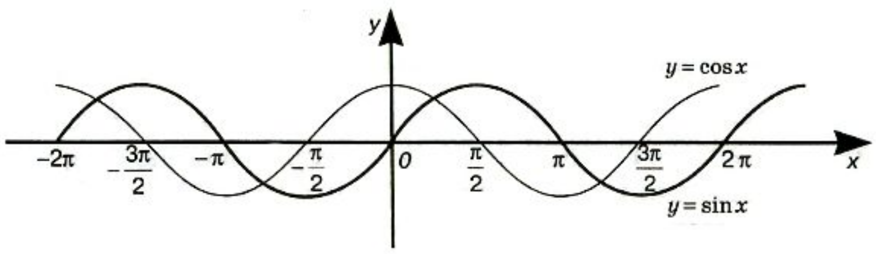
4. Показательная функция $y=a^x$, $a>0$ и $a\neq1$

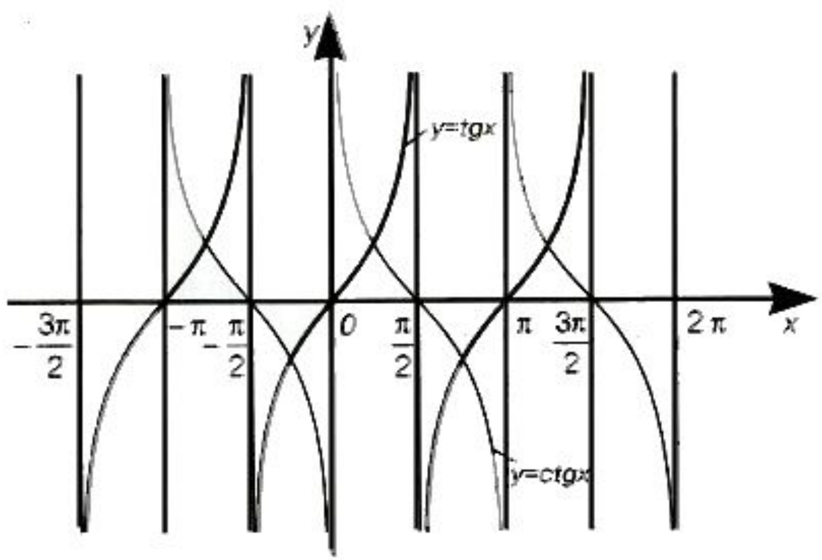


5. *Логарифмическая функция* $y=\log_a x$, a>0 и a≠0



6. Тригонометрические функции
y=cosx; y=sinx; y=tgx; y=ctgx



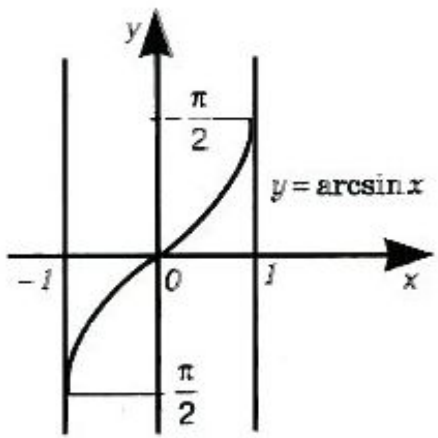


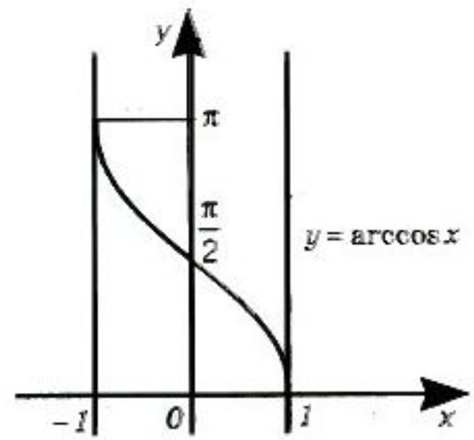
Переменная х обычно выражается в радианах.

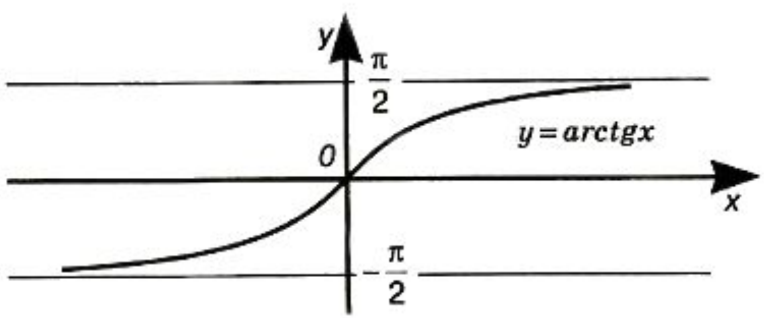
7. Обратные тригонометрические функци

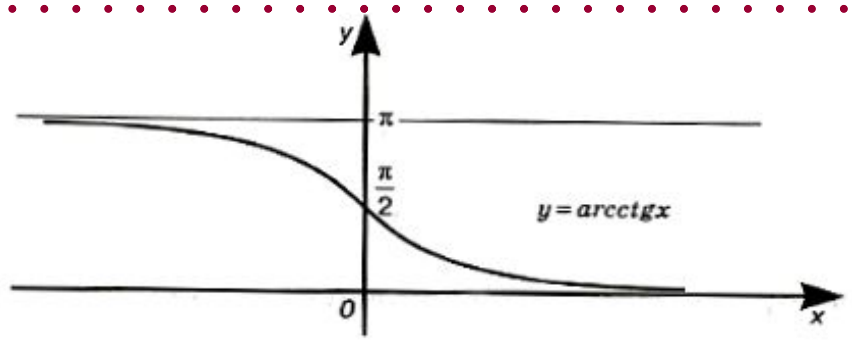
y=arcsin x; $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, $-1 \le x \le 1$; **y=arccos x** $|x| \le 1$, $0 \le y \le \pi$;

y=arctg x $|y| < \pi/2$; **y=arcctg x** $0 < y < \pi$



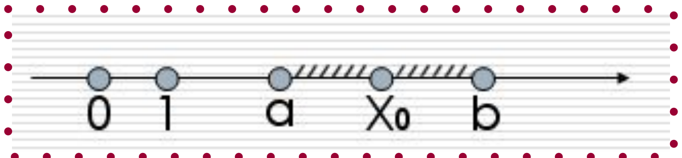




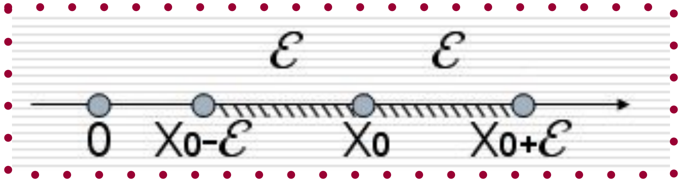


IV. Непрерывность и предел функции

Def: <u>Окрестностью данной точки X_0</u> называется произвольный интервал (a; b), содержащий внутри себя эту точку.



Часто рассматривают ε- окрестность точки X_0, когда эта точка является центром окрестности.



В этом случае число называется радиусом окрестности $\left(X_0-\varepsilon; X_0+\varepsilon;\right)$

Предел функции

Понятие предела является одним из важнейших понятий, лежащих в основе математического анализа. Каждая операция математического анализа связана с соответствующим предельным переходом.

Def: *Число A называется* ***пределом*** *функции $y=f(x)$ при стремлении x к a (или в точке a), если для любого числа $\boldsymbol{\varepsilon}>0$ существует такое число $\delta=\delta(\boldsymbol{\varepsilon})>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, имеет место неравенство* $|f(x)-A|<\varepsilon$

Обозначается это так: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ *или $f(x)\to A$ при $x\to a$*

Другими словами, число A есть предел функции $f(x)$ вточке x=a, если для всех x, достаточно близких к числу a и отличных от него, соответствующие им значения функции $f(x)$ оказываются сколь угодно близкими к числу A (естественно, в тех точках x, в которых функция $f(x)$ определена).

Непрерывность функции

Если при постепенном изменении аргумента функция также изменяется постепенно, то говорят, что функция непрерывна. При этом малому изменению аргумента соответствует малое изменение функции. Дадим строгое определение:

Def: *Функция* $f(x)$ *называется* ***непрерывной в точке*** x_0, *если она определена в некоторой окрестности этой точки (включая саму эту точку) и предел функции в точке* x_0 *существует и равен значению функции в самой этой точке, т.е.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A = f(x_0)$$

V. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

- **Def:** Функция $\alpha(x)$ называется **<u>бесконечно малой</u>** при x→a, если

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$$

- **Def:** Функция $\alpha(x)$ называется **<u>бесконечно большой</u>** при x→a, если

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=\infty$$

VI. Основные теоремы о пределах

Теорема 1: Для того, чтобы число А было пределом функции f(x) при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была представлена в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая.

Следствие 1: Функция не может в одной точке иметь 2 различных предела.

Теорема 2: Предел постоянной величины равен самой постоянной.

Теорема 3: Если функция $f(x) \geq 0 (f(x) \leq 0)$ для всех x в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a, и в точке a имеет предел , то $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq 0$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq 0$

Основные теоремы о пределах

Теорема 4: Если функция $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют приделы при $x \to a$, то при $x \to a$ имеет пределы также их сумма $f_1(x)+f_2(x)$, произведение $f_1(x)\cdot f_2(x)$, и при условии $\lim f_2(x) \neq 0$ частное $f_1(x)/f_2(x)$, причем

$$\lim_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x),$$

$$\lim_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to a} f_1(x) / \lim_{x\to a} f_2(x).$$

Следствие 2: Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то

$$\lim_{x\to a}(f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n$$ **где n – натуральное число.**

Следствие 3: Постоянный множитель можно выносить за знак предела $\lim_{x\to a} Cf(x) = C\lim_{x\to a} f(x), \mathrm{C} - \mathrm{const}$

VII. Методы раскрытия неопределенностей

1. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Методы:

1. Разложение числителя и знаменателя на множители с последующим сокращением.
2. Устранение иррациональных разностей. Домножение на сопряженное.
3. Первый замечательный предел.

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

2. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

Метод: Деление на наибольшую степень

Th: Предел отношения двух многочленов (при условии, что аргумент стремится к ∞) равен пределу отношения их старших членов.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m+1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n+1}+\ldots+b_n}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m}{b_0x^n}=\begin{cases}0 & (\mathrm{m}<\mathrm{n})\\ \dfrac{a_0}{b_0} & (\mathrm{m}=\mathrm{n})\\ \infty & (\mathrm{m}>\mathrm{n})\end{cases}$$

Здесь $\mathrm{a}_0 \neq 0$ и $\mathrm{b}_0 \neq 0$

Примеры:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 14x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n-1}{n^4+2n}$$