

Функции. Теория пределов.

План

- I. Величины постоянные и переменные
 - II. Понятие функции:
 - 1. определение функции
 - 2. область определения, значения
 - 3. сложная функция
 - 4. способы задания функции
 - III. Основные элементарные функции, их свойства, графики
 - IV. Непрерывность функции. Предел функции
 - V. Бесконечно малые и бесконечно большие величины
 - VI. Основные теоремы о пределах
 - VII. Методы раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$
-

I. Величины постоянные и переменные

При изучении закономерностей, встречающихся в природе, все время приходится иметь дело с величинами постоянными и величинами переменными.

Def1: Постоянной величиной называется величина, сохраняющая одно и то же значение.

Def2: Переменной величиной называется величина, которая может принимать различные числовые значения.

Обозначение: *переменная величина: $x, y, z, v, u...$*

постоянная величина: $a, b, c...$

Def3: Множество всех числовых значений переменной величины называется областью изменения этой величины

Часто будем рассматривать случай, когда известна и область изменения X , и порядок, в котором она принимает свои числовые значения. В этом случае будем говорить об упорядоченной переменной величине.

1) числовая последовательность $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$

2) Арифметическая и геометрическая прогрессии

Рассмотрим числовую бесконечную последовательность:

$$x = x_n, n \in \mathbb{N}$$

Def1: Если при $n \rightarrow \infty$ $x_n \rightarrow a$ говорят, что a – есть предел переменной величины

$$x = x_n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \# \quad x_n = \frac{1}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

II. Понятие функции

1. Определение функции

Изучая какое-нибудь явление, мы обычно имеем дело с совокупностью переменных величин, которые связаны между собой так, что значения одних величин полностью определяют значение других.

Пусть D и E – непустые числовые множества, а x и y – соответственно их элементы. Если каждому $x \in D$ ставиться в соответствии по некоторому закону только одно значение $y \in E$ то говорят, что между переменными x и y существует **функциональная зависимость** и называют x независимой переменной (v -аргументом), а y – зависимой переменной (v -функцией)

Символическая запись функции: $y = f(x) \quad (x \in D)$

2. Область определения, значения

- **Def:** Областью определения D функции называется множество значений x , для которых функция определена (имеет смысл)
- **Def:** Множеством значений E функции называются все значения, которые принимает зависимая переменная

Функция f отображает множество D на множестве E .

Для функций f и g , заданных на одном и том же множестве D , можно определить их сумму, разность, произведение и частное. Это новые функции:

$$f(x) + g(x); f(x) - g(x); f(x) \cdot g(x); f(x) / g(x); (x \in D)$$

где в случае частного предполагается, что $g(x) \neq 0$ на D .

3. Сложная функция

- **Def:** Если функция f отображает множество D на множество E , а функция F отображает множество E на множество G , то функция $z=F(f(x))$ называется функцией от функций f и F (или сложной функцией). Она определена на множестве D и отображает D на G .
-

4. Способы задания функции

□ **Аналитический способ** – это способ задания функций при помощи формул.

Например: $y=2x$; $y=x+1$; $y=\lg x$.

Если уравнение, с помощью которого задана функция, не разрешено относительно y , то функция называется неявной.

Например: $2x+3y-5=0$ – уравнение неявно задающее функцию.

$$y=(5-2x)/3$$

Функция задана не одной, а несколькими переменными.

Например:

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 0 \\ -x^2, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

□ **Табличный способ** – это способ задания функции при помощи таблицы. Примерами такого задания являются таблицы логарифмов и т.п.

Недостатком табличного способа является то, что функция задается не для всех значений аргумента.

□ **Графический способ** – это способ задания функции при помощи графика. Графиком функции $y=f(x)$ называется множество точек $(x; y)$ плоскости (XOY) координаты которых связаны соотношением $y=f(x)$. Само равенство $y=f(x)$ называется Уравнением это графика

III. Основные элементарные функции, их свойства, графики

1. Целая рациональная функция

Многочлен вида $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$ - целая рациональная функция.

Пример: $y = kx + b$ – линейная функция. Её график – прямая линия. При $b = 0$ линейная функция $y = kx$ выражает прямо пропорциональную зависимость y от x .

2. Дробно-рациональная функция

Эта функция определяется как отношение двух многочленов:

$$y = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n}$$

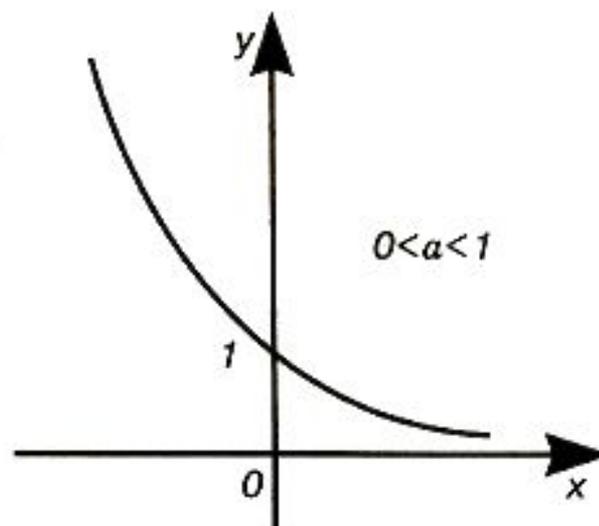
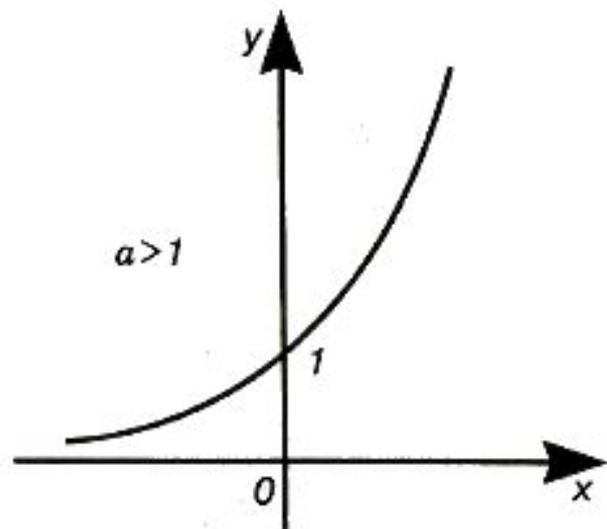
Пример: $y = k/x$ – обратно пропорциональная зависимость между x и y .
Её график – равносторонняя гипербола.

3. Степенная функция

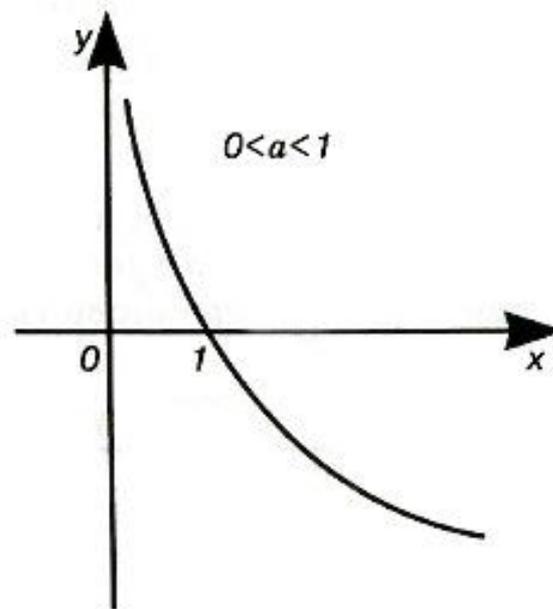
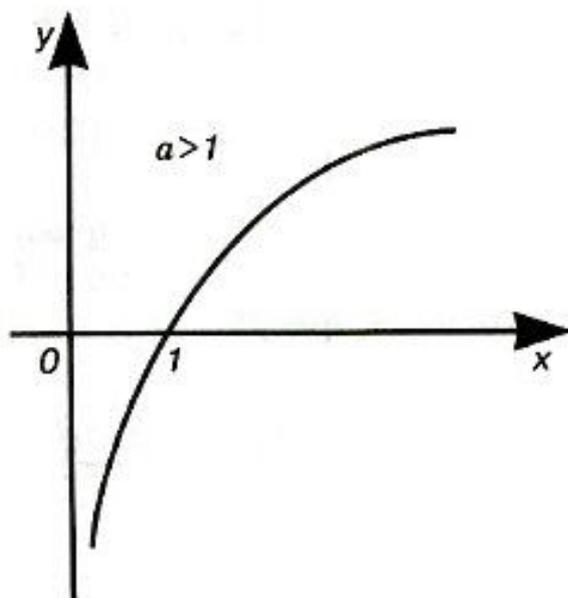
$y = x^a$, где

Пример₁: $a \in R$
 $y = ax^2$ *Пример₂:* $y = \sqrt{x}$

4. Показательная функция $y=a^x$, $a>0$ и $a\neq 1$

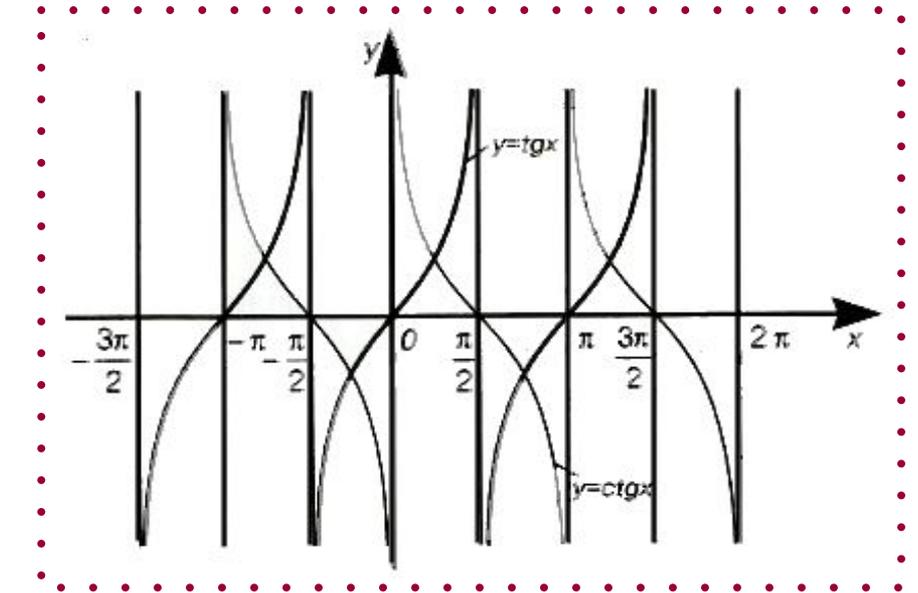
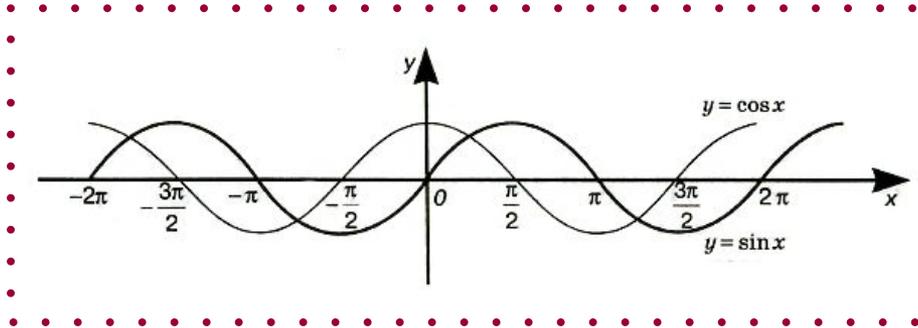


5. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$ и $a \neq 1$



6. Тригонометрические функции

$$y = \cos x; y = \sin x; y = \operatorname{tg} x; y = \operatorname{ctg} x$$

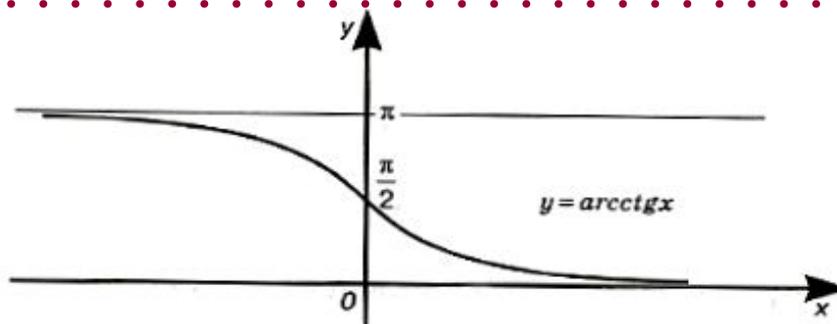
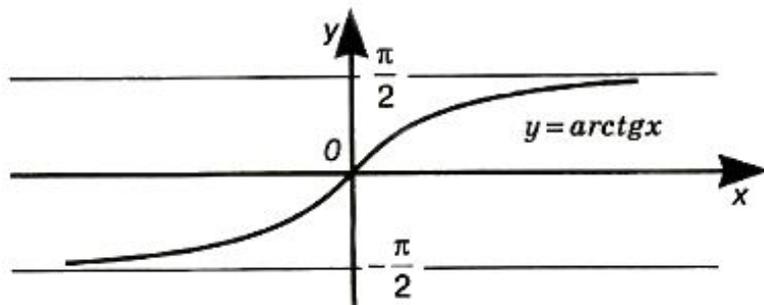
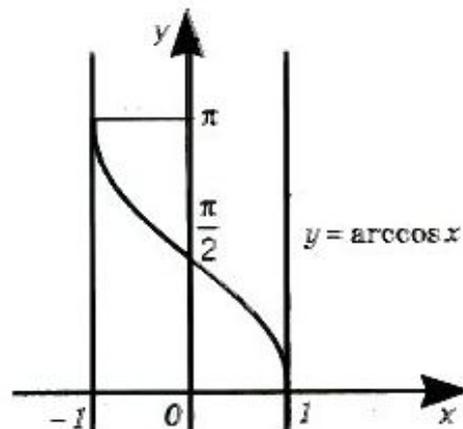
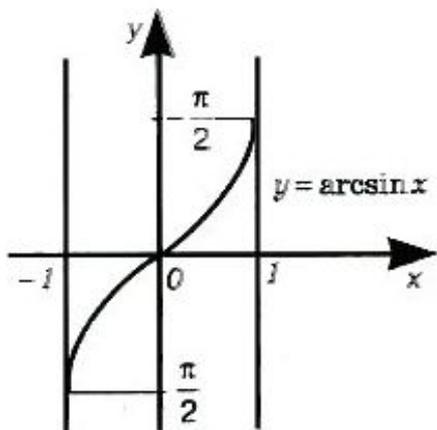


Переменная x обычно выражается в радианах.

7. Обратные тригонометрические функции

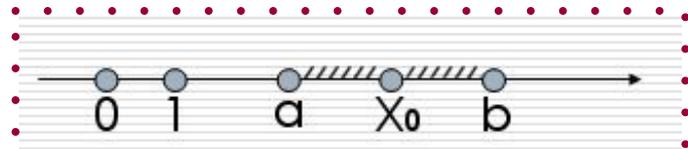
$y = \arcsin x$; $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, $-1 \leq x \leq 1$; $y = \arccos x$ $|x| \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi$;

$y = \arctg x$ $|y| < \pi/2$; $y = \text{arcctg} x$ $0 < y < \pi$

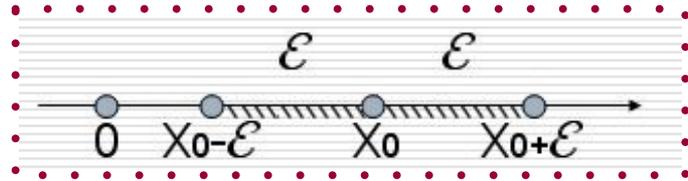


IV. Непрерывность и предел функции

Def: Окрестностью данной точки X_0 называется произвольный интервал $(a; b)$, содержащий внутри себя эту точку.



Часто рассматривают ε - окрестность точки X_0 , когда эта точка является центром окрестности.



В этом случае число называется радиусом окрестности $(X_0 - \varepsilon; X_0 + \varepsilon;)$

Предел функции

Понятие предела является одним из важнейших понятий, лежащих в основе математического анализа. Каждая операция математического анализа связана с соответствующим предельным переходом.

Def: Число A называется **пределом** функции $y=f(x)$ при стремлении x к a (или в точке a), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$

Обозначается это так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$

Другими словами, число A есть предел функции $f(x)$ в точке $x=a$, если для всех x , достаточно близких к числу a и отличных от него, соответствующие им значения функции $f(x)$ оказываются сколь угодно близкими к числу A (естественно, в тех точках x , в которых функция $f(x)$ определена).

Непрерывность функции

Если при постепенном изменении аргумента функция также изменяется постепенно, то говорят, что функция непрерывна. При этом малому изменению аргумента соответствует малое изменение функции. Дадим строгое определение:

Def: Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0* , если она определена в некоторой окрестности этой точки (включая саму эту точку) и предел функции в точке x_0 существует и равен значению функции в самой этой точке, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A = f(x_0)$$

V. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

- **Def:** Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$$

- **Def:** Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \infty$$

VI. Основные теоремы о пределах

Теорема 1: Для того, чтобы число A было пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была представлена в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ бесконечно мала.

Следствие 1: Функция не может в одной точке иметь 2 различных предела.

Теорема 2: Предел постоянной величины равен самой постоянной.

Теорема 3: Если функция $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$) для всех x в некоторой окрестности точки a , кроме, быть может, самой точки a , и в точке a имеет предел, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq 0$).

Основные теоремы о пределах

Теорема 4: Если функция $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют пределы при $x \rightarrow a$ то при $x \rightarrow a$ имеет пределы также их сумма $f_1(x)+f_2(x)$, произведение $f_1(x) \cdot f_2(x)$, и при условии $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$ частное $f_1(x)/f_2(x)$, причем

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) / \lim_{x \rightarrow a} f_2(x).$$

Следствие 2: Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow a$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n \quad \text{где } n - \text{натуральное число.}$$

Следствие 3: Постоянный множитель можно выносить за

знак предела
$$\lim_{x \rightarrow a} C f(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad C - \text{const}$$

VII. Методы раскрытия неопределенностей

1. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Методы:

1. Разложение числителя и знаменателя на множители с последующим сокращением.
2. Устранение иррациональных разностей.
Домножение на сопряженное.
3. Первый замечательный предел.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

2. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

Метод: Деление на наибольшую степень

Th: Предел отношения двух многочленов (при условии, что аргумент стремится к ∞) равен пределу отношения их старших членов.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n+1} + \dots + b_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m}{b_0 x^n} = \begin{cases} 0 & (m < n) \\ \frac{a_0}{b_0} & (m = n) \\ \infty & (m > n) \end{cases}$$

Здесь $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$

Примеры:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 14x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n - 1}{n^4 + 2n}$$
