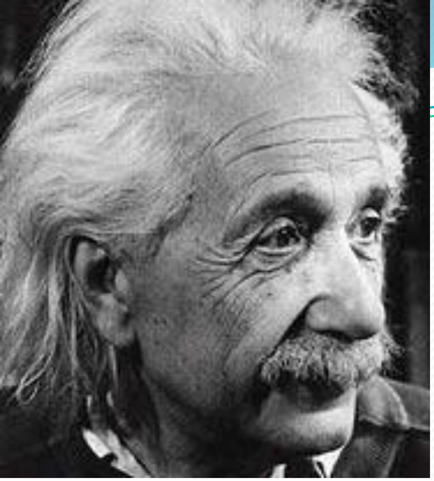
ВИДЫ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СПОСОБЫ ИХ РЕШЕНИЯ



Умные мысли

Мне приходится делить время между <u>политикой</u> и <u>уравнениями</u>.

Однако уравнения, по-моему, гораздо важнее. Политика существует для данного момента, а <u>уравнения будут существовать вечно.</u>

Считаем устно

1) Представить в виде степени:

$\sqrt[3]{6^2}$; $3^{-4}\cdot 81$; $2^{-2}\cdot 16$; $(\frac{7}{5})^3\cdot\frac{25}{49}$

$6^{\frac{2}{3}}$ 3^0 2^2 $(\frac{7}{5})^1$

Решите уравнения

$3^{2x} = 3^4;$

$x = 2$

$(\frac{1}{7})^x = -49;$

Корней нет

$5^{x+1} = 0;$

Корней нет

$2^{3-x} = 1;$

$x = 3$

- Методы решения ПУ
  - Вынесение общего множителя за скобки
  - Метод логарифмировия
  - Метод введения новой переменной
  - Метод уравнивания показателей
  - Графический метод
  - Метод составления отношений
  - Метод использования однородности

Метод уравнивания показателей

$1) 5^{x} = 125$

$2) 2^{3x-6} = 2$

$3) 3^{x-1} = -3$

$4) 5^{\sin x} = 5$

$5) 8^{|x|} = 8$

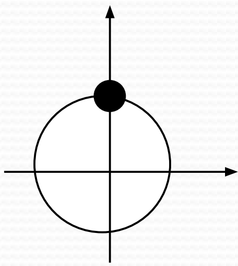
$6) 11^{5x-8} = 7^{0}$

$1) 5^{x} = 5^{3}, x = 3$

$2) 2^{3x-6} = 2^{1}, 3x-6=1, x = 2\frac{1}{3}$

3) Корней нет

$4) 5^{\sin x} = 5^{1}, \sin x = 1,$



$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$5) 8^{|x|} = 8^{1}, |x| = 1, x = \pm 1$

$6) 11^{5x-8} = 11^{0}, 5x-8=0, x = 1{,}6$

Вынесение общего множителя за скобки

$$3^{x+2} - 3^{x} = 72$$

$$3^{x}(3^{2} - 1) = 72;$$

$$3^{x} = \frac{72}{8};$$

$$3^{x} = 9;$$

$$3^{x} = 3^{2};$$

$$x = 2$$

Ответ: 2

Вынесение общего множителя за скобки

$$2^x - 2^{x-4} = 15$$

$$2^{x-4}(2^4 - 1) = 15;$$

$$2^{x-4} = \frac{15}{15};$$

$$2^{x-4} = 1;$$

$$2^{x-4} = 2^0;$$

$$x = 4$$

Ответ: 4

Вынесение общего множителя за скобки

$$3^{12x-1} - 9^{6x-1} - 27^{4x-1} + 81^{3x+1} = 2192$$

$$3^{12x-1} - 3^{12x-2} - 3^{12x-3} + 3^{12x+4} = 2192$$

$$3^{12x-3}(3^2 - 3^1 - 1 + 3^7) = 2192;$$

$$3^{12x-3}(9 - 3 - 1 + 2187) = 2192;$$

$$3^{12x-3}2192 = 2192;$$

$$3^{12x-3} = 1;$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Ответ:0,25

Метод составления отношений

$$2 \cdot 3^{x-1} - 3^{x-2} = 5^{x-2} + 4 \cdot 5^{x-3}$$

$$3^{x-2}(2 \cdot 3 - 1) = 5^{x-3}(5 + 4);$$

$$5 \cdot 3^{x-2} = 5^{x-3} \cdot 3^2;$$

$$3^{x-4} = 5^{x-4};$$

$$\left\{\frac{3^{x-4}}{5^{x-4}} = 1;\right.$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-4} = \left(\frac{3}{5}\right)^0$$

$$x = 4$$

Ответ: 4

Метод составления отношений

$$5^{2x-1}+4^{x}=5^{2x}-4^{x+1}$$

$$5^{2x-1}(1-5)=2^{2x}(-2^{2}-1);$$

$$-5^{2x-1}\cdot 4=-2^{2x}\cdot 5;$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2x-1}=\frac{5}{2};$$

$$2x-1=1;$$

$$x=1$$

Ответ: 1

Метод составления отношений

$$2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$$

$$2^{x^2-1}(1+2^3) = 3^{x^2-1}(1+3);$$

$$(\frac{2}{3})^{x^2-1} = (\frac{2}{3})^2$$

$$x^2 - 1 = 2;$$

$$x = \pm\sqrt{3};$$

Ответ: $\pm\sqrt{3}$

1) $4^{\frac{2}{x}} - 5 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 4 = 0$

ОДЗ : x≠0

$(4^{\frac{1}{x}})^2 - 5 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 4 = 0;$

Пусть $4^{\frac{1}{x}} = t, t > 0.$

$t^2 - 5t + 4 = 0;$

$D = 25 - 16 = 9;$

$t_1 = 4, t_2 = 1.$

Вернемся к замене:

$$\left[\begin{array}{l} 4^{\frac{1}{x}} = 4 \\ 4^{\frac{1}{x}} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x} = 1 \\ \frac{1}{x} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ решений\_нет \end{array}\right.$$

Ответ: 1

2) $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$

$5^{2(x+1)} \cdot 5^{-3} + 5^{x+1} = 250;$

Пусть $5^{x+1} = t, t > 0.$

$\frac{1}{125} t^2 + t - 250 = 0;$

$D = 9;$

$t_1 = -250 < 0,$

$t_2 = 125,$

Вернемся к замене:

$5^{x+1} = 125;$

$5^{x+1} = 5^3;$

$x = 2;$

Ответ: 2

3) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

$3^{2(x^2-1)} - 9 \cdot 4 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0;$

$3^{2(x^2-1)} - 4 * 3^{(x^2-1)} + 3 = 0$

Пусть $3^{x^2-1} = t, t > 0.$

$t^2 - 4t + 3 = 0;$

$D = 16 - 12 = 4;$

$t_1 = 3, t_2 = 1.$

Вернемся к замене:

$$\left[\begin{array}{l} 3^{x^2-1} = 3 \\ 3^{x^2-1} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 1 \\ x^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ x^2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: 0,1,-1

Метод введения новой переменной

$$4^{\frac{2}{x}} - 5 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 4 = 0$$

ОДЗ : x≠0

$$(4^{\frac{1}{x}})^2 - 5 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 4 = 0;$$

Пусть $4^{\frac{1}{x}} = t, t > 0.$

$$t^2 - 5t + 4 = 0;$$

$$D = 25 - 16 = 9;$$

$$t_1 = 4, t_2 = 1.$$

Вернемся к замене:

$$\left[\begin{array}{l} 4^{\frac{1}{x}} = 4 \\ 4^{\frac{1}{x}} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x} = 1 \\ \frac{1}{x} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ решений\_нет \end{array}\right.$$

Ответ: 1

Метод введения новой переменной

$$5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$$

$$5^{2(x+1)} \cdot 5^{-3} + 5^{x+1} = 250;$$

Пусть $5^{x+1} = t, t > 0.$

$$\frac{1}{125}t^2 + t - 250 = 0;$$

$$t_1 = -250 < 0,$$

$$t_2 = 125,$$

Вернемся к замене:

$$5^{x+1} = 125;$$

$$5^{x+1} = 5^3;$$

$$x = 2;$$

Ответ: 2

Метод введения новой переменной

$$9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$$

$$3^{2(x^2-1)} - 9 \cdot 4 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0;$$

$$3^{2(x^2-1)} - 4 \cdot 3^{(x^2-1)} + 3 = 0;$$

Пусть $3^{x^2-1} = t, t > 0.$

$$t^2 - 4t + 3 = 0;$$

$$t_1 = 3, t_2 = 1.$$

Вернемся к замене:

$$\left[\begin{array}{l} 3^{x^2-1} = 3 \\ 3^{x^2-1} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 1 \\ x^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ x^2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: 0,1,-1

Использование однородности

$$64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$$

$$64 \cdot 3^{2x} - 84 \cdot 3^x \cdot 4^x + 27 \cdot 4^{2x} = 0$$

Разделив обе части уравнения на 4^{2x}, получим:

$$64 \cdot (\frac{3}{4})^{2x} - 84 \cdot (\frac{3}{4})^x + 27 = 0$$

Пусть $(\frac{3}{4})^x = t, t > 0.$

$$64t^2 - 84t + 27 = 0;$$

$$t_1 = \frac{3}{4}, t_2 = \frac{9}{16}.$$

Вернемся к замене:

$$\left[\begin{array}{l} (\frac{3}{4})^x = \frac{3}{4} \\ (\frac{3}{4})^x = \frac{9}{16} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Ответ: 1 или 2

Использование однородности

$$9^{x+1} + 45 \cdot 6^{x} + 9 \cdot 2^{2x+2} = 0$$

$$3^{2x+2} + 45 \cdot 3^{x}2^{x} + 9 \cdot 2^{2x+2} = 0;$$

$$3^{2x} \cdot 3^{2} + 45 \cdot 3^{x} \cdot 2^{x} + 9 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{2} = 0;$$

Разделив обе части уравнения на 2^{2x}, получим:

$$(\frac{3}{2})^{2x} \cdot 3^{2} + 45(\frac{3}{2})^{x} + 36 = 0$$

Пусть $(\frac{3}{2})^{x} = t, t > 0.$

$$9t^{2} + 45t + 36 = 0;$$

$$t^{2} + 5t + 4 = 0;$$

$$t_{1} = -1 < 0,$$

$$t_{1} = -4 < 0,$$

Ответ: нет решения

Использование однородности

$$10^{\frac{2}{x}} + 25^{\frac{1}{x}} = 4{,}25 \cdot 50^{\frac{1}{x}}$$

ОДЗ : x≠0

$$5^{\frac{2}{x}} \cdot 2^{\frac{2}{x}} + 5^{\frac{2}{x}} = 4{,}25 \cdot 5^{\frac{2}{x}} \cdot 2^{\frac{2}{x}}$$

Разделив обе части уравнения на $5^{\frac{2}{x}}$, получим:

$$2^{\frac{2}{x}} + 1 = 4{,}25 \cdot 2^{\frac{1}{x}}$$

Пусть $2^{\frac{1}{x}} = t, t > 0.$

$$t^2 - 4{,}25t + 1 = 0;$$

$$t_1 = 4, t_2 = \frac{1}{4}.$$

Вернемся к замене:

$$\left[\begin{array}{l} 2^{\frac{1}{x}} = 4 \\ 2^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{\frac{1}{x}} = 2^2 \\ 2^{\frac{1}{x}} = 2^{-2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0{,}5 \\ x = -0{,}5 \end{array}\right.$$

Ответ: 0,5 или -0,5

Уравнение вида: $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x b^x + Cb^{2x} = 0$.

И решаются они с использованием однородности. Все члены этого уравнения содержат степени с разными основаниями, но показатели степеней в крайних членах уравнения вдвое больше, чем показатели степеней среднего члена. Это уравнение легко можно привести к виду уравнения на слайде 9, разделив его на $b^{2x} \neq 0$, получим квадратное уравнение: $A(\frac{a}{b})^{2x} + B \cdot (\frac{a}{b})x + C = 0$.

С помощью подстановки $(\frac{a}{b})^x = y$, уравнение принимает вид: $Ay^2 + B \cdot y + C = 0$, который мы уже разобрали.

Использование монотонности функции

$$3^x + 4^x = 5^x$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$$

Т.к функция

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$$

является убывающей, то горизонтальная прямая y=1 пересекает график функции f не более, чем в одной точке. Следовательно, уравнение имеет не более одного корня. Методом перебора находим, что x=2

Ответ: 2

$$3^{x-1} + 5^{x-1} = 34$$

Т.к функция

$$f(x)3^{x-1} + 5^{x-1}$$

является возрастающей, то горизонтальная прямая y=34 пересекает график функции f не более, чем в одной точке. Следовательно, уравнение имеет не более одного корня. Методом перебора находим, что x=3

Ответ: 3