



ВКОШП-2011


Разбор задач

Санкт-Петербург, 2011

Задача А

Наибольший общий делитель

$$\text{НОД}(a, b) = \begin{cases} a, b = 0 \\ b, a = 0 \\ \text{НОД}(a - b, b), a \geq b \\ \text{НОД}(a, b - a), a < b \end{cases}$$

- 
- Автор задачи – Виталий Аксёнов
 - Условие – Виталий Аксёнов
 - Подготовка тестов – Виталий Аксёнов
 - Разбор – Виталий Аксёнов

Постановка задачи

- Дано n чисел и число d
- Надо найти какой-нибудь поднабор из чисел, такой что их наибольший общий делитель равен d

Как решать?

- Взять все числа, которые делятся на d
- Теперь взять у них у всех наибольший общий делитель
- Если он равен d , то выводим это множество, если нет, то вывести -1


Обоснование

- Пусть есть какой-то другой набор, который удовлетворяет нас
- Все элементы из этого набора обязаны делиться на d , а, значит, этот набор является подмножеством нашего
- Следовательно НОД этого набора может быть только больше, чем НОД нашего, а, значит, если наш набор не удовлетворяет, то и другой тоже

Задача В

Защита беженцев



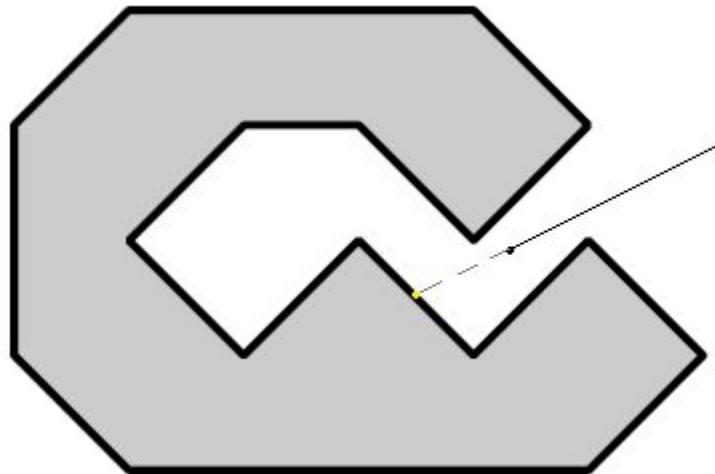
- 
- Автор задачи – Алексей Цыпленков
 - Условие – Антон Банных
 - Подготовка тестов – Антон Банных
 - Разбор – Виталий Аксёнов

Постановка задачи

- Дан многоугольник P
- Точка называется защищённой, если любой луч проведённый из него пересекается с многоугольником P
- Надо найти многоугольник, состоящий из защищённых точек

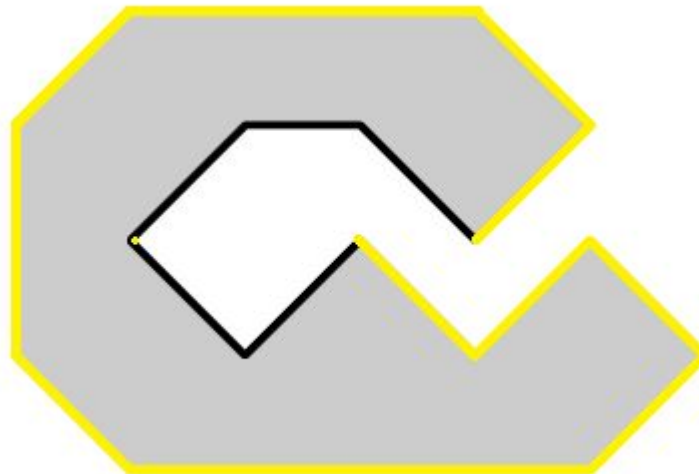
Как решать?

- Если из какой-то точки луч уходит на бесконечность, продлим его в другую сторону до пересечения со стороной (будем считать такую точку на стороне освещённой)
- Назовём такую операцию “освещением”



Как решать?

- Утверждение: если сделать такую операцию для каждой точки, для которой существует луч выходящий на бесконечность, то на каждой стороне может быть максимум 1 освещённый отрезок

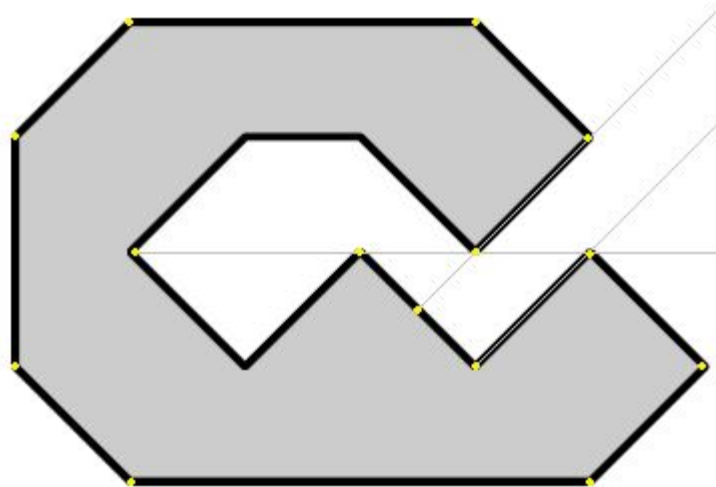


Как решать? (продолжение)

- Проведем лучи для всех пар вершин
- Для всех таких лучей проведем нашу операцию “освещение”
- На каждой стороне получили набор освещённых точек

Как решать? (продолжение)

- Утверждается, что освещённый отрезок на стороне ограничен самой левой освещённой точкой на стороне и самой правой освещённой точкой стороне




Как решать? (продолжение)

- Осталось восстановить ответ
- Утверждение: вершины нашего нового многоугольника – концы невырожденных “освещённых” частей

Задача С

Телефонный номер



- 
- Автор задачи – Михаил Дворкин
 - Условие – Евгений Курпилянский
 - Подготовка тестов – Евгений Курпилянский
 - Разбор – Павел Кунявский

Постановка задачи

- Дан телефонный номер – последовательность чисел, разделенных дефисами
- Необходимо найти все телефонные номера, которые произносятся также как и данный

Как решать?

- Найдем последовательность слов, которые используются при произношении данного номера
- Заметим, что слова «тысяча» и «миллион» (в разных формах) всегда употребляются вместе с предыдущим словом, поэтому форма этих слов не важна
- Следовательно, каждое слово можно хранить как его числовое значение

Как решать? (продолжение)

- Нужно перебрать всевозможные расстановки дефисов между словами и вывести все, которые являются корректными телефонными номерами
- Для определения корректности записи нужно понимать можно ли «склеить» несколько слов в одно число

Обоснование


- Количество слов в тестах меньше 100 (так как цифр не больше 50)
- Количество телефонных номеров в ответе не больше 100000
- Следовательно, перебор будет работать быстро с отсечением – не перебирать дальше, если следующую группу слов нельзя «склеить» в одно число

Задача D

Гостиница



CATS' HOUSE
HOSTEL

- 
- Автор задачи – Антон Банных
 - Условие – Антон Ахи
 - Подготовка тестов – Антон Ахи
 - Разбор – Антон Ахи

Постановка задачи

- Дано число n
- Надо его разложить на сумму двоек и троек с минимальным числом слагаемых


Как решать?

- Понятно, что нам не имеет смысла иметь в сумме больше двух двоек, так как 3 двойки = 2 тройки
- Если $n \equiv 0 \pmod{3}$, то ответ $(n/3, 0)$
- Если $n \equiv 1 \pmod{3}$, то ответ $((n-4)/3, 2)$
- Если $n \equiv 2 \pmod{3}$, то ответ $((n-2)/3, 1)$

Задача E

Парад



- 
- Автор задачи – Сергей Поромов
 - Условие – Сергей Мельников
 - Подготовка тестов – Сергей Мельников
 - Разбор – Сергей Мельников

Постановка задачи

- Есть последовательность из n чисел
- Надо разбить их на убывающую и возрастающую подпоследовательности

Как решать?

- Будем считать динамику `less[i]` и `greater[i]`
- Разбиение чисел хорошее – разбиение чисел на возрастающую и убывающую подпоследовательности

Как решать? (продолжение)

- В какой последовательности находится i -ый элемент:
 - В убывающей, $less[i]$ равен минимальному из последних элементов всех возрастающих последовательностей во всех хороших разбиениях чисел с индексами от 1 до $i-1$

Как решать? (продолжение)

- В возрастающей, `greater[i]` равен максимуму из последних элементов всех убывающих последовательностей во всех хороших разбиениях чисел с индексами от 1 до $i-1$

Пересчёт

- **Less[i]**
 - if $a[i+1] < \text{greater}[i]$ then $\text{less}[i+1] = a[i]$
 - if $a[i+1] < a[i]$ then $\text{less}[i+1] = \min(\text{less}[i+1], \text{less}[i])$
- **Greater[i]**
 - if $a[i+1] > \text{less}[i]$ then $\text{greater}[i+1] = a[i]$
 - if $a[i+1] > a[i]$ then $\text{greater}[i+1] = \min(\text{greater}[i+1], \text{greater}[i])$


Как решать? (продолжение)

- Если мы не смогли посчитать `less[n]` или `greater[n]`, то ответ – Impossible
- А иначе, нужно просто восстановить ответ по этой динамике

Задача F

Магазин



- 
- Автор задачи – Николай Ведерников
 - Условие – Николай Ведерников
 - Подготовка тестов – Николай Ведерников
 - Разбор – Николай Ведерников

Постановка задачи

- Дано n стоимостей товаров и известно, что k -ый бесплатно
- Найти минимальное число денег, которое нужно потратить, чтобы купить все товары


Как решать?

- Отсортируем все цены в порядке убывания
- Разобьём их на группы по k , начиная с первого, и из каждой группы, может быть кроме последней, можно не платить за минимальный элемент (то есть не платить за элемент, номер которого делится на k)
- Корректность такого алгоритма понять несложно

Задача G

Занос



- 
- Автор задачи – Николай Ведерников
 - Условие – Виталий Аксёнов
 - Подготовка тестов – Виталий Аксёнов
 - Разбор – Николай Ведерников

Постановка задачи

- Дано 5 чисел
 - Максимальная скорость автомобиля - v
 - Длина первого отрезка трассы - x
 - Длина второго отрезка трассы - y
 - Максимальное ускорение при разгоне - a
 - Максимальное ускорение при торможении - b
- Найти минимальное время за которое можно преодолеть трассу при условии, что скорость между двумя отрезками равна 0

Как решать?


- Заметим, что ситуация с разгоном и ситуация с торможением совершенно одинаковы, то есть при торможении мы считаем, что едем в другую сторону и ускоряемся
- Задача свелась к:
 - Максимальная скорость машины – v
 - Максимальное ускорение машины – a
 - Длина отрезка - x

Как решать? (продолжение)

- Понятно, что нам надо сразу разогнаться с ускорением a до скорости v , а далее ехать с постоянной скоростью
- 2 случая:
 - Успеваем разогнаться: $\frac{v^2}{2a} < x$, тогда ответ –
$$\frac{v}{a} + \frac{x - \frac{v^2}{2a}}{v}$$
 - Не успеваем разогнаться: $\frac{v^2}{2a} \geq x$, тогда ответ –
$$\sqrt{\frac{2x}{a}}$$

Задача Н Чай



- 
- Автор задачи – Антон Ахи
 - Условие – Антон Ахи
 - Подготовка тестов – Антон Ахи
 - Разбор – Антон Ахи

Постановка задачи

- Дан чайник объёма V и мощностью N , температура воды в чайнике опускается не ниже 20 градусов и поднимается не выше 100, вода в чайнике остывает со скоростью k градусов в секунду
- Дано m запросов, состоящих из двух чисел – время прихода члена жюри t_i и объём его кружки a_i , надо на каждый запрос вернуть время в секундах, когда член жюри начнёт пить чай

Как решать?

- Отсортируем членов жюри по временам прихода
- И просто нужно запросы жюри обрабатывать в таком порядке прямо как написано в условии


Подводные камни

- Нужно не забывать, что минимальная температура воды в чайнике – 20 градусов
- Изначально чайник был пуст

Задача I

Командная олимпиада



- 
- Автор задачи – Юрий Петров
 - Условие – Никита Иоффе
 - Подготовка тестов – Никита Иоффе
 - Разбор – Никита Иоффе

Постановка задачи

- Дана перестановка чисел $1, 1, 2, 2, \dots, n, n$
- Требуется найти такую перестановку, что минимальное расстояние между двумя одинаковыми элементами было максимально и сумма расстояний между старыми и новыми позициями минимальна

Как решать?

- Заметим, что нам подходят только перестановки, что расстояние между двумя одинаковыми ровно n , то есть теперь положение i в первой половине однозначно задаёт положение i во второй половине

Как решать?


(продолжение)

- Построим полный двудольный граф и на ребре из i в j напишем расстояние между положениями i в изначальной перестановке и когда они будут стоять на позициях j и $j+n$
- Осталось просто на этом графе найти минимальное взвешенное полное парасочетание

Задача J

Поезда



- 
- Автор задачи – Виталий Аксёнов
 - Условие – Никита Иоффе
 - Подготовка тестов – Никита Иоффе
 - Разбор – Павел Кунявский

Постановка задачи

- Найти k -ую в лексикографическом порядке последовательность, которую можно отсортировать стеком

Как решать?

- Заметим, что количество таких перестановок из n элементов равно числу Каталана, так как каждой такой перестановке можно взаимнооднозначно сопоставить правильную скобочную последовательность длины $2n$

Как решать? (продолжение)

- Если мы на первое место поставим число i , то последовательность выглядит следующим образом:
 $i(\text{ХП}[1..i-1])(\text{ХП}[i+1..n])$, где $\text{ХП}[a..b]$ – последовательность из чисел от a до b , которая сортируется стеком

Таким образом количество $\text{ХП}[1..n]$, где на первом месте стоит i равно $C_{i-1} * C_{n-i+1}$, где C_i – i -ое число Каталана


Как решать? (продолжение)

- Теперь просто решаем стандартную задачу о восстановлении k -ого комбинаторного объекта, то есть ставим поочерёдно на первое место числа от 1 до n и проверяем, а потом запускаемся рекурсивно от частей $[1..i-1]$ и $[1..n-i+1]$

Задача К

Королевская династия



- 
- Автор задачи – Глеб Евстропов
 - Условие – Михаил Пядёркин
 - Подготовка тестов – Михаил Пядёркин
 - Разбор – Олег Давыдов

Постановка задачи


- Дано подвешенное дерево из n вершин
- Дано m запросов, состоящих из 2 чисел – v и k
- Для каждого запроса надо вывести количество потомков вершины v на расстоянии k

Как решать?

- Обойдём dfs-ом вершины, и отметим для каждой времена входа $in[v]$ и выхода $out[v]$, а также для каждой высоты будем хранить набор вершин, которые находятся на этой высоте

Как решать? (продолжение)

- Обрабатываем запрос:
 - Пусть $h[v]$ – высота вершины v
 - Рассмотрим набор вершин, находящихся на высоте $h[v]+k$
 - Среди них нужно найти количество таких, у которых времена входа от $in[v]$ до $out[v]$
 - Бинарный поиск



Спасибо за внимание!
Вопросы?

<http://neerc.ifmo.ru/school>