Вневписанная окружность

Подготовила:
ученица 8 класса
МБОУ СШ №47
Поэтова Ольга

Руководитель:
учитель математики
МБОУ СШ №47
Зенченко М.А

Цель

- Научиться решать геометрические задачи, которые приводят к появлению вневписанной окружности, и составить алгоритм их решения.

Задачи

- 1. Ввести определение вневписанной окружности треугольника и рассмотреть ее свойство.
- 2.Проанализировать какие задачи в ОГЭ приводят к появлению вневписанной окружности треугольника, и рассмотреть их решение.
- 3.Составить алгоритм решения задач, которые приводят к появлению вневписанной окружности.

Понятие вневписанной окружности

- **Определение:**
  Вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной из его сторон и продолжений двух других.

Понятие вневписанной окружности

- Пусть на плоскости заданы три прямые, которые попарно пересекаются в точках A, B и C (рис.1).
  Вопрос: сколько существует точек, равноудаленных от этих прямых?

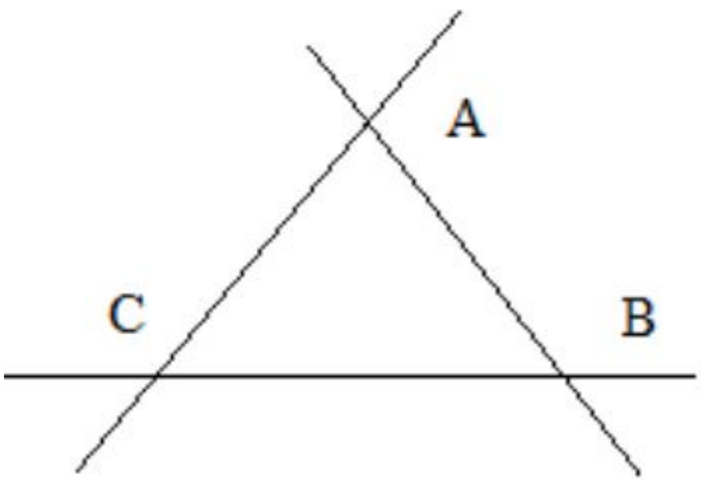


Рис. 1

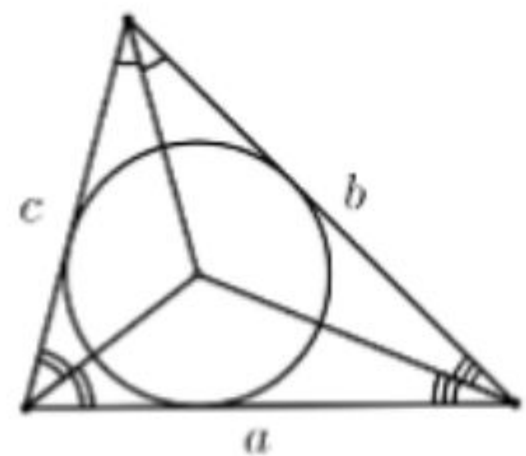


Рис. 2

- Многие дают немедленный ответ: конечно одна, а именно, центр окружности, вписанной в треугольник АВС(рис.1), но этот ответ неверен. Действительно, рассмотрим, например, биссектрисы внешних углов В и С треугольника АВС (рис.3). Так как сумма углов, образованных ими со стороной ВС, меньше, чем 180°, то эти биссектрисы пересекутся в некоторой точке ОА. Тогда точка ОА равноудалена от прямых АВ, АС и ВС.

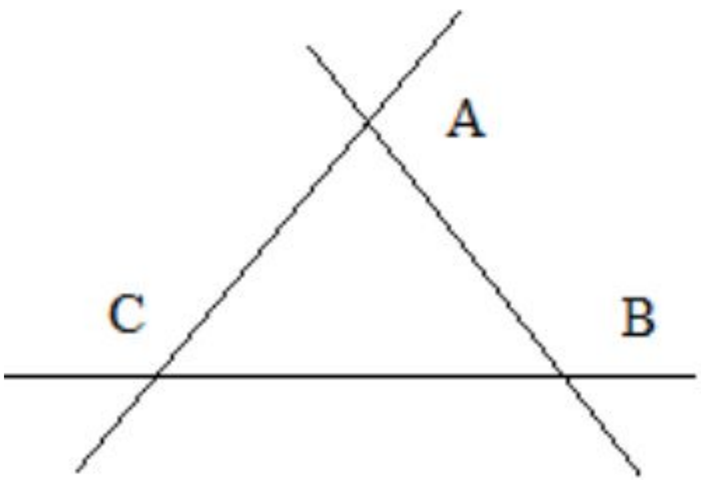


Рис. 1

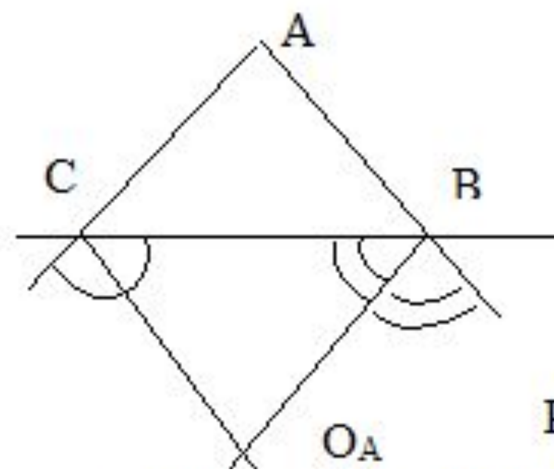
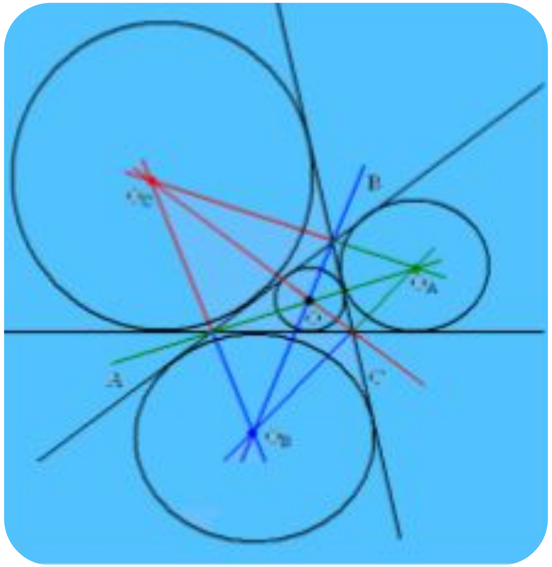


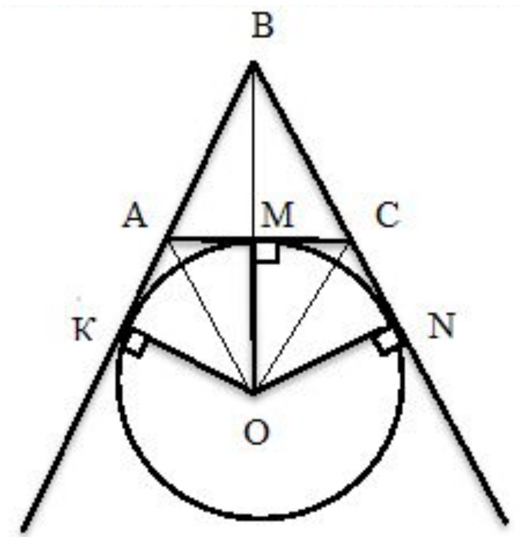
Рис. 3

- Аналогично, рассматривая другие пары внешних углов треугольника АВС, получим еще две точки, обладающие требуемым свойством. Таким образом, помимо центра окружности О, вписанной в треугольник АВС, существуют, по крайней мере, еще три точки ОА, ОВ, ОС равноудаленные от заданных прямых. Каждая из этих точек является центром окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других сторон.
- **Определение:** ***Вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной из его сторон и продолжений двух других[2,11].***



Свойство вневписанной окружности

- **Свойство:** *Центр вневписанной окружности в треугольник есть точка пересечения биссектрисы внутреннего угла треугольника, противолежащего той стороне треугольника, которой окружность касается, и биссектрис двух внешних углов треугольника*.

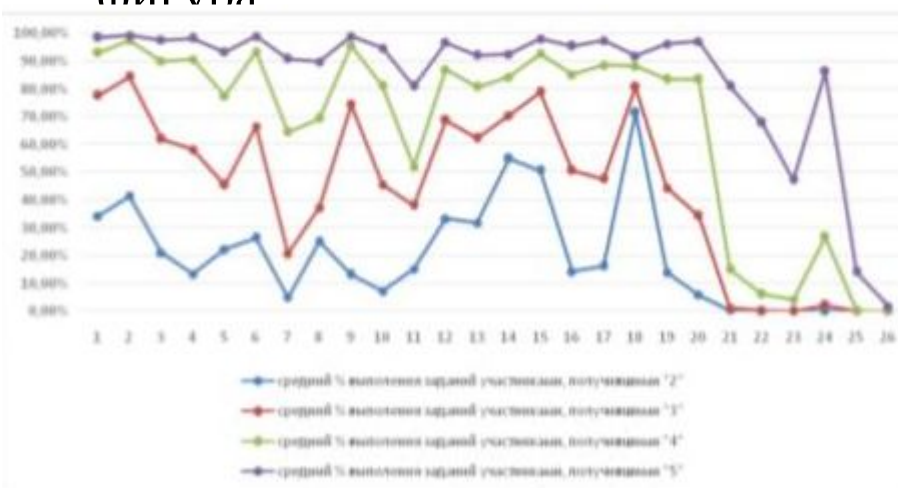


Свойство вневписанной окружности

- **Доказательство:**
  Т. к. окружность касается сторон угла САК, то центр окружности О равноудален от сторон этого угла, следовательно, он лежит на биссектрисе угла САК. Аналогично, точка О лежит на биссектрисе угла ACN. Т. к. окружность касается прямых ВА и ВС, то она вписана в угол АВС, а значит, её центр лежит на биссектрисе угла АВС.
  Ч.т. д.

Вневписанная окружность в задачах

- По итогам ОГЭ прошлого года многие девятиклассники даже не приступали к решению задач №26[8].
- Проанализировав эти задания[4,6-10,12], я заметила, что в №26 встречаются три вида задач про вневписанную окружность и что условия следующих задач не содержат термина «вневписанная окружность». Она появляется в решении как вспомогательная фигура



Задача 1. Алгоритм решения

- 1. Обозначить O – центр вневписанной окружности, Q – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, M – точку касания окружностей.
- 2. Вычислить AM=CM= CA:2 = a:2.
- 3. Рассмотреть лучи AQ и AO как биссектрисы смежных углов и сделать вывод что угол OAQ прямой.
- 4. Рассмотреть прямоугольный треугольник AQO и используя свойство пропорциональных отрезков записать: AM2= QM·MO.
- 5. Вычислить QM= AM2MO= (a:2)2r
- 6. Записать ответ.

Задача 2. Алгоритм решения

- 1. Обозначить Q – центр вневписанной окружности, O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, QM и ON- радиусы, проведенные в точки касания окружностей с прямой AC, S- центр окружности описанной около треугольника ABC, r – радиус окружности, описанной около треугольника ABC.
- 2. Рассмотреть лучи BO и BQ как биссектрисы смежных углов и сделать вывод что угол OAQ прямой.
- 3. Рассмотреть прямоугольный треугольник BOQ и используя свойство пропорциональных отрезков вычислить BK по формуле BK =$\sqrt{OK \cdot QK} = \sqrt{a \cdot b}$.
- 4. Обозначить AN через x.

Задача 2. Алгоритм решения

- 5. Рассмотреть подобные прямоугольные треугольники ANO и AMQ и найти коэффициент подобия как отношение радиуса вневписанной окружности к вписанной: $k=b/a$. Обозначить через полученное значение k: $AM = k x$, $MN = k x - x=(k-1)x$.
- 6. Рассмотреть равные отрезки MC, CK и CN, как касательные, проведенных из одной точки, и вычислить $CN=CK=CM=\sqrt{a\cdot b}$, $MN=2CK=2\sqrt{a\cdot b}$, затем $AN=x=2\sqrt{a\cdot b}:((k-1)x)$, $AB = AC= AN + NC=2\sqrt{a\cdot b}:((k-1)x)+\sqrt{a\cdot b}$.
- 7. Рассмотреть прямоугольный треугольник ABK и найти AK: $AK=\sqrt{AB^2-BK^2}$.

Задача 2. Алгоритм решения

- 8. Рассмотреть прямоугольный треугольник SBK, в котором по теореме Пифагора r2 = (AK - r)2 +BK2 , выразить и вычислить *r*= AB² 2AK.
- 9. Записать ответ.

Задача 3. Алгоритм решения

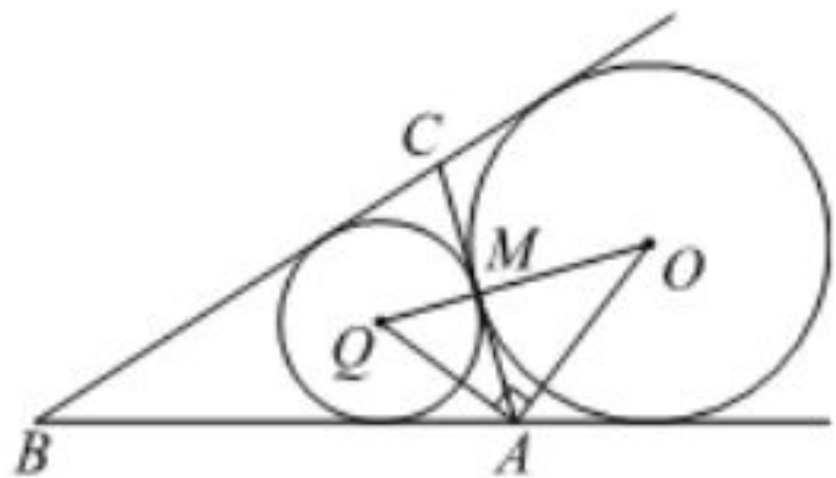
- 1. Обозначить М – центр вневписанной окружности, О – центр вписанной окружности и вычислить ОМ= а + b.
- 2. Провести перпендикуляр ОР из центра вписанной окружности на радиус МС вневписанной окружности. Вычислить МР = МС - РС =МС – ОА= b- а.
- 3. Рассмотреть прямоугольный треугольник ОРМ и найти ОР =$\sqrt{OM^2 - MP^2}$.
- 4. Опустить перпендикуляр BQ из точки В на прямую CD. Рассмотреть прямоугольные треугольники: BQD и OPM (подобны по двум углам), записать BQ/BD=OP/OM. Откуда вычислить BQ= OP ·BDOM.
- 5. Записать ответ.

ЗАДАЧА 1. Нахождение радиуса окружности вписанного в треугольник.

- (Демонстрационный вариант 2018г., КИМ[7])
- **«Основание АС равнобедренного треугольника равно 12. Окружность радиуса 8 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания АС. Найдите радиус окружности вписанной в треугольник АВС».**
- ***Решение:***
- Сделаем чертеж к данной задачи. Так как окружность касается стороны треугольника и продолжения двух других сторон, то – это вневписанная окружность.
- Пусть О – центр вневписанной окружности, Q – центр окружности, вписанной в треугольник АВС.
- Так как центр вписанной окружности и вневписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис, то AQ -биссектриса угла ВАС, а АО – биссектриса смежного с ним угла.

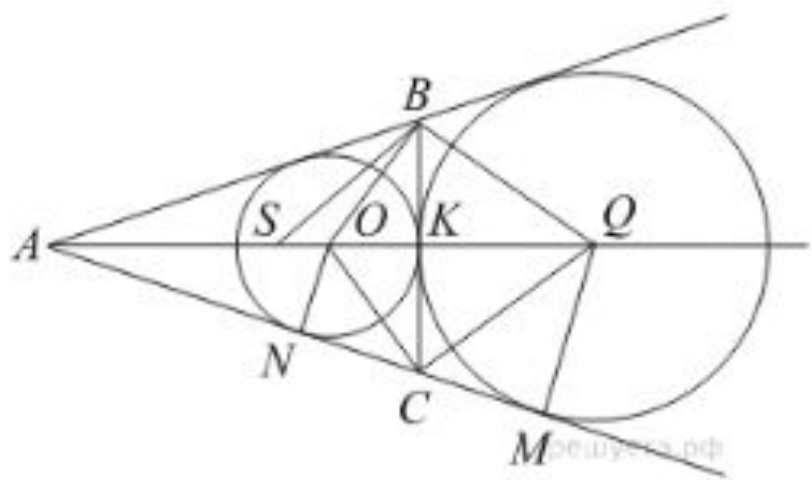
ЗАДАЧА 1. Нахождение радиуса окружности вписанного в треугольник.

- (Демонстрационный вариант 2018г., КИМ[7])
- ΔAQO – прямоугольный треугольник, так как биссектрисы смежных углов образуют прямой угол.
- AM – высота, проведенная к гипотенузе, AM = ½ AC = 6.
- AM^2= QM·MO. Следовательно, QM= AM^2 MO=6^2 8=36 8=4,5
- QM – радиус вписанной в ΔABC окружности, следовательно r = 4,5.
- Ответ: 4,5.



ЗАДАЧА 2. Нахождение радиуса окруж - ности описанной около треугольника.

- (Решу ОГЭ[9])
- **«Две касающиеся внешним образом в точке К окружности, радиусы которых равны 36 и 45, вписаны в угол с вершиной А. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку К, пересекает стороны угла в точках В и С. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника АВС.»**



ЗАДАЧА 2. Нахождение радиуса окруж - ности описанной около треугольника.

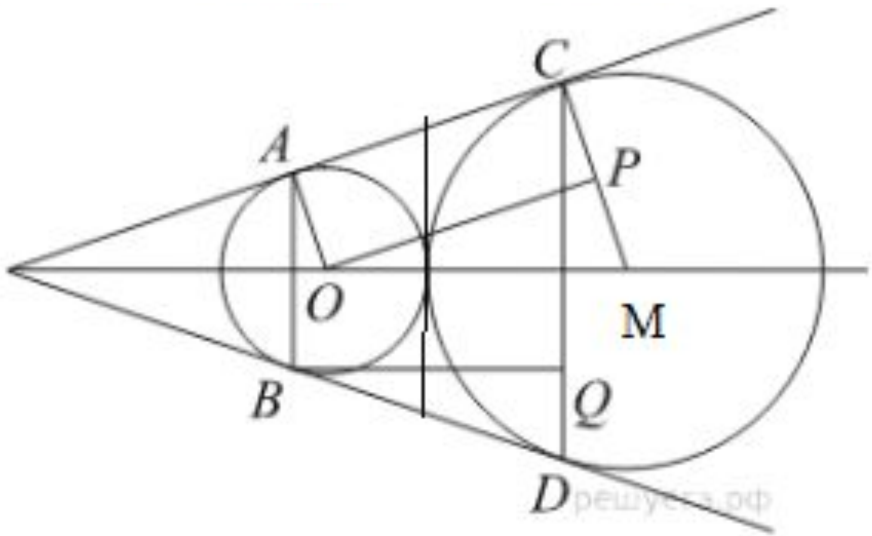
- (Решу ОГЭ[9])
- *__Решение:__*
- Пусть Q – центр вневписанной окружности, O – центр вписанной окружности в треугольник ABC, QM и ON- радиусы, проведенные в точки касания окружностей с прямой AC, S- центр окружности описанной около треугольника ABC, r – радиус окружности, описанной около треугольника ABC.
- BO -биссектриса угла ABK, а BQ – биссектриса смежного с ним угла. Значит ΔOBQ – прямоугольный. Следовательно, находим $BK = \sqrt{OK \cdot QK} = \sqrt{36 \cdot 45} = 18\sqrt{5}$.
- Пусть AN = x. Прямоугольные треугольники ANO и AMQ подобны с коэффициентом 45/36 = 1,25, значит, AM = 1,25x, MN = 0,25x.

ЗАДАЧА 2. Нахождение радиуса окруж - ности описанной около треугольника.

- (Решу ОГЭ[9])
- Отрезки MC, CK и CN равны как отрезки касательных, проведенных из одной точки, значит, $BK = CK = 18\sqrt{5}$, $0{,}25x = MN = 2CK = 36\sqrt{5}$, откуда $AN = x = 144\sqrt{5}$, $AC = AB = 1{,}125x = 162\sqrt{5}$.
- В прямоугольном треугольнике ABK находим катет AK:
- $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = 360$.
- В прямоугольном треугольнике SBK по теореме Пифагора имеем r2 = (AK - r)2 +BK2,
- r= AB² 2AK=1622·5 2·360=182,25
- Ответ: 182,25.

ЗАДАЧА 3. Нахождение расстояния между прямыми.

- (Ященко И.В., Шестаков С.А. «ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс» [12])
- **«Окружности радиусов 60 и 90 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D – на второй. При этом AC и BD – общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.»**



ЗАДАЧА 3. Нахождение расстояния между прямыми.

- (Ященко И.В., Шестаков С.А. «ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс» [12])
- ***Решение:***
- Линия центров вписанной и вневписанной окружностей проходит через точку касания, поэтому расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов, т.е. $OM=150$. Опустим перпендикуляр OP из центра меньшей окружности на радиус MC второй окружности. Тогда $MP = MC-PC = MC – OA=90-60=30$
- Из прямоугольного треугольника OPM находим, что $OP = \sqrt{OM^2 - PM^2} = 60\sqrt{6}$
- Опустим перпендикуляр BQ из точки B на прямую CD. Прямоугольный треугольник BQD подобен прямоугольному треугольнику OPM по двум углам, поэтому $BQBD=OPOM$. Следовательно, $BQ= OP \cdot BDOM=60\sqrt{6}\cdot 60\sqrt{6}150=144$.
- Ответ: 144.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- В результате проделанной работы я выяснила, что собой представляют вневписанные окружности треугольника, каким свойством они обладают[2-4]. Оказалось, что вневписанные окружности треугольника используются в школьной программе мало, но зато их можно встретить на олимпиадах, ОГЭ[2-12].
- Проанализировав задания[4,6-10,12], которые приводят к появлению вневписанной окружности, я заметила, что встречаются три вида задач про вневписанную окружность и что условия следующих задач не содержат термина «вневписанная окружность». Она появляется в решении как вспомогательная фигура. Также во всех задачах совпадают обозначения, отличаются только числовые значения. Используем эти обозначения при составлении алгоритма решения задач, которые приводят к появлению вневписанной окружности. Данные алгоритмы помогут другим учащимся полноценно подготовиться к ОГЭ по данной теме. Используя которые учащимся будет очень легко решить задачи, подставив свои значения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Я не жалею, что потратила время на изучение этой темы, т.к. узнала новое понятие вневписанной окружности треугольника. Также, я научилась лучше рассуждать, анализировать и систематизировать, и я уверена, что опыт выполнения этой работы пригодится мне в будущем. Данный материал выходит за рамки школьной программы и будет полезен учащимся при подготовке к итоговой аттестации.
- Исследование можно продолжить, изучив другие свойства окружности, также свойства вневписанной окружности прямоугольного треугольника и их применение в ЕГЭ. Работа может быть использована на уроках геометрии в 8-9 классах.