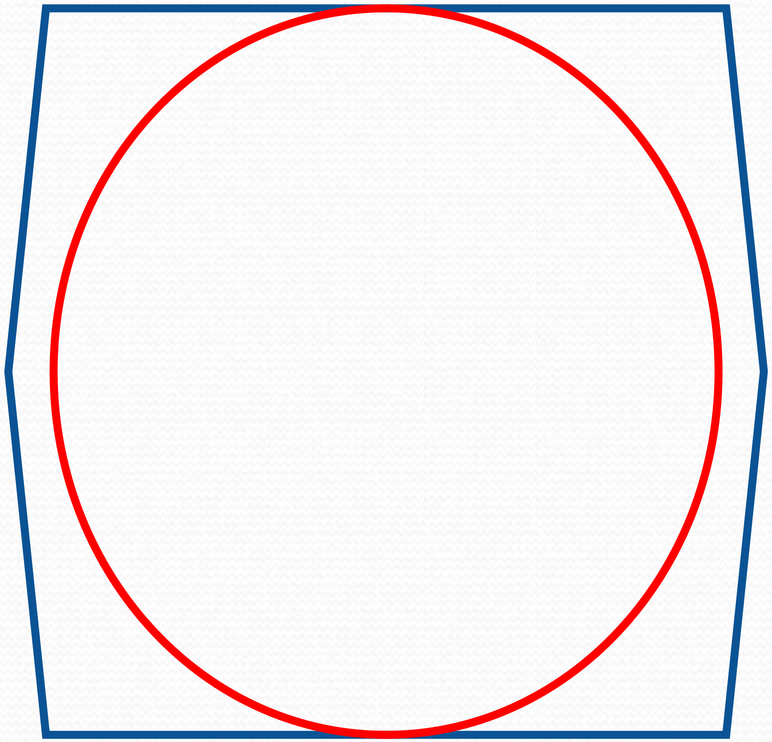
Вписанная и описанная окружности

Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется **вписанной** в многоугольник, а многоугольник - **описанным** около этой окружности.

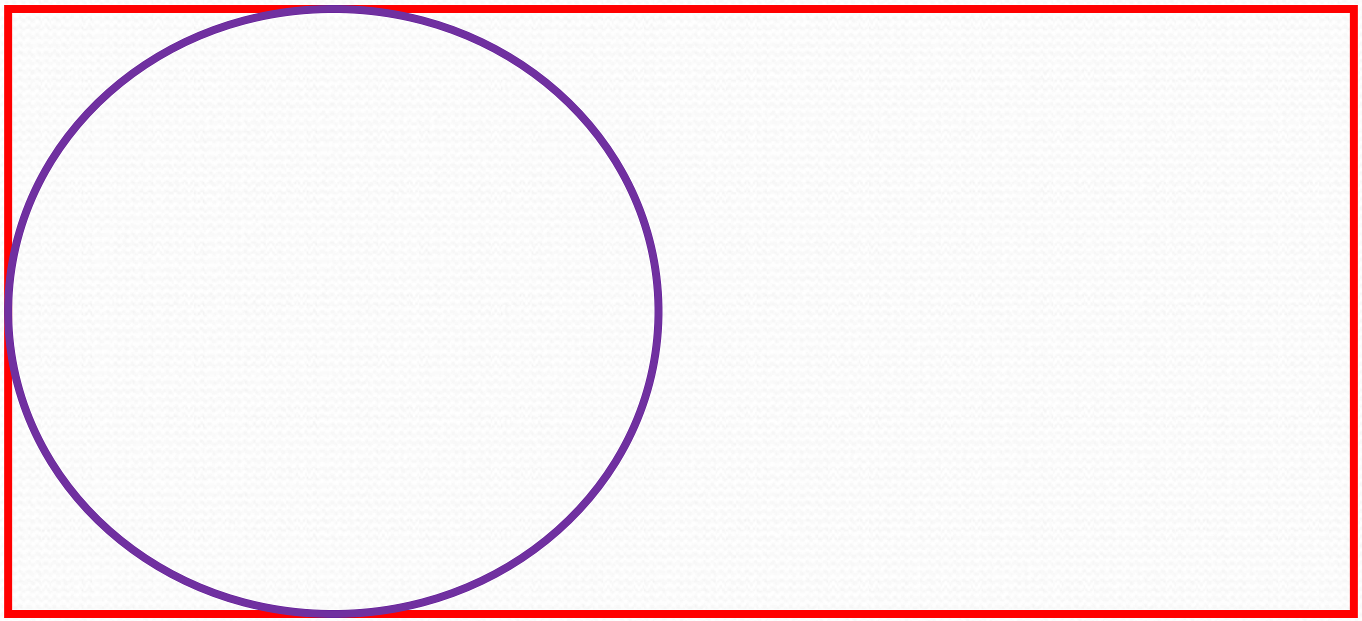


- Центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис всех внутренних углов многоугольника.
- Радиус вписанной окружности вычисляется по формуле:

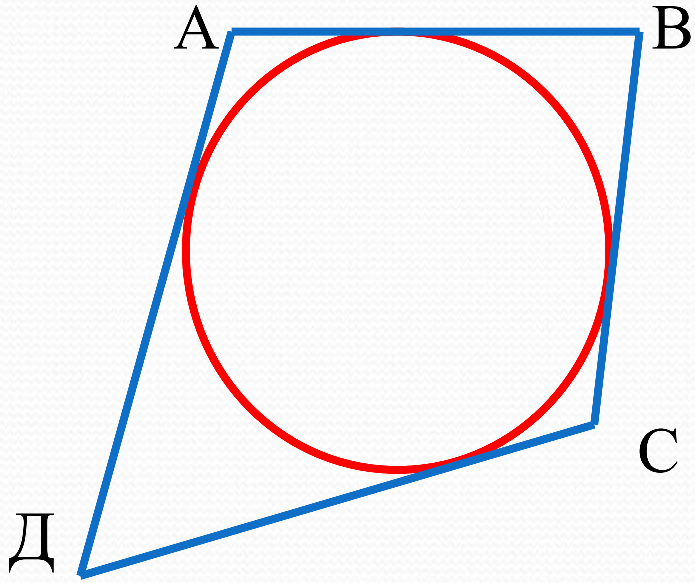
$$\mathbf{r = S/p},$$

где S – площадь, а p – полупериметр многоугольника.

- Не во всякий многоугольник можно вписать окружность.



В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.

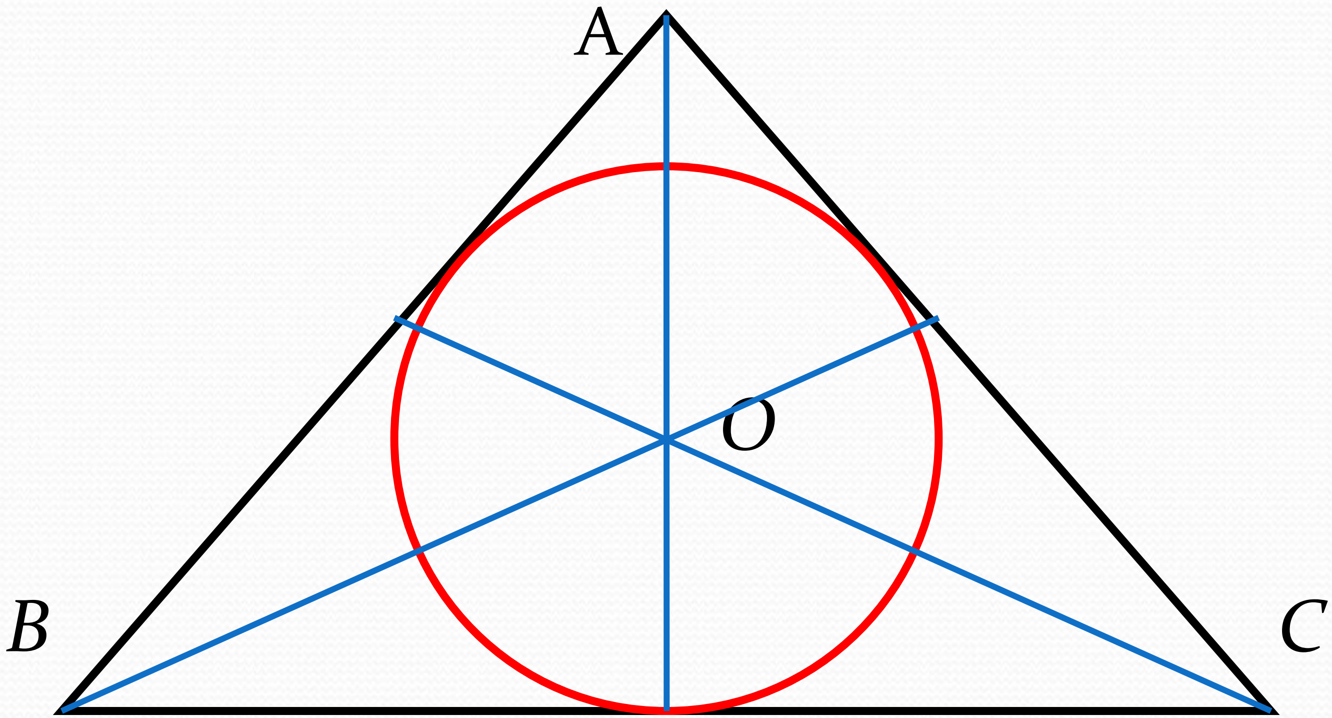


АВ + СД = ВС + АД

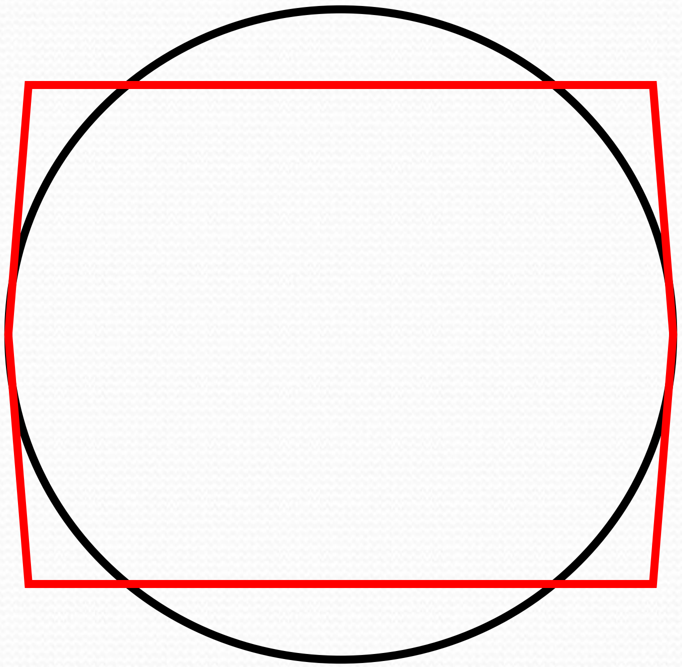
Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.

В любой треугольник можно вписать окружность.

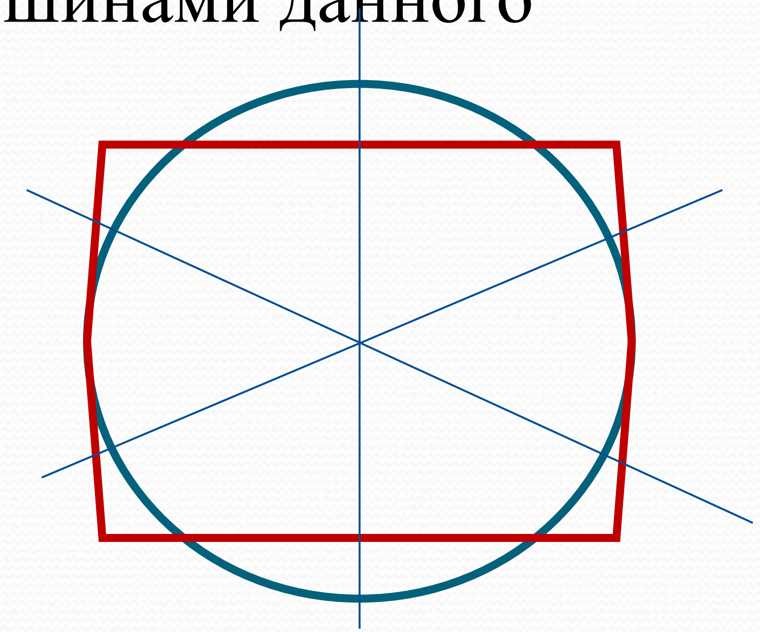
Центр окружности - точка пересечения биссектрис треугольника.



Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется **описанной** около многоугольника, а многоугольник - **вписанным** в эту окружность.

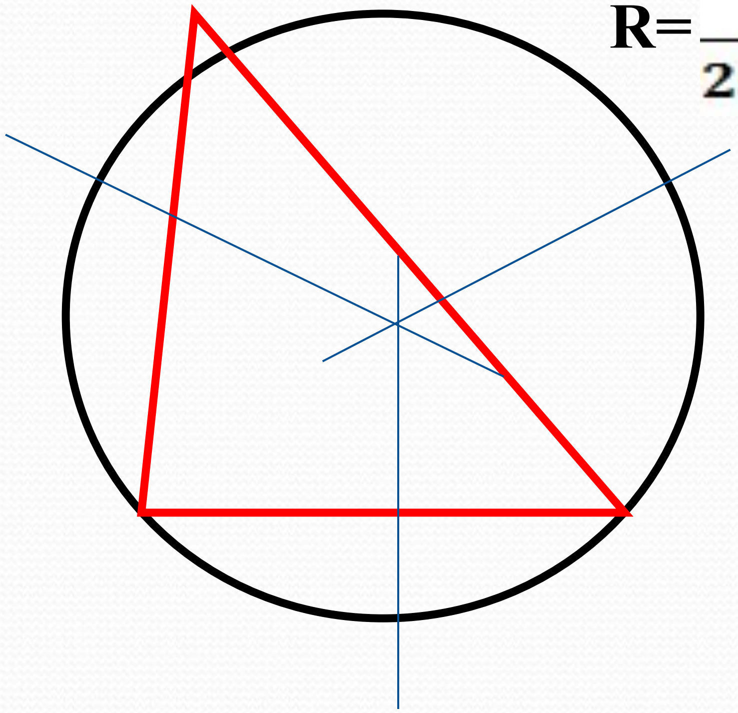


- Центр описанной окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам многоугольника.
- Радиус вычисляется как радиус окружности, описанной около треугольника, определённого любыми тремя вершинами данного многоугольника.



Около любого треугольника можно описать окружность.

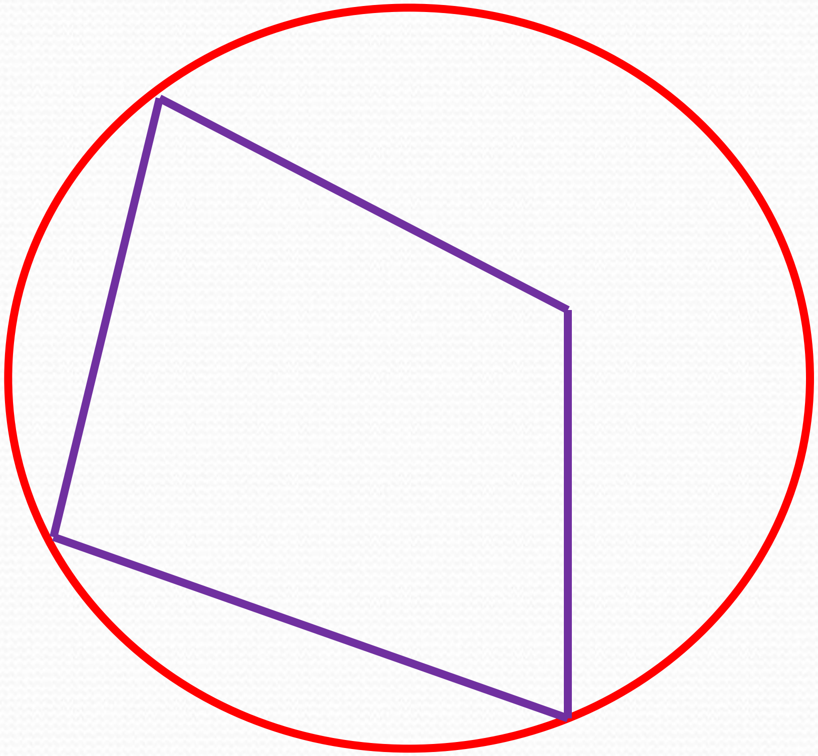
Центр окружности - точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.



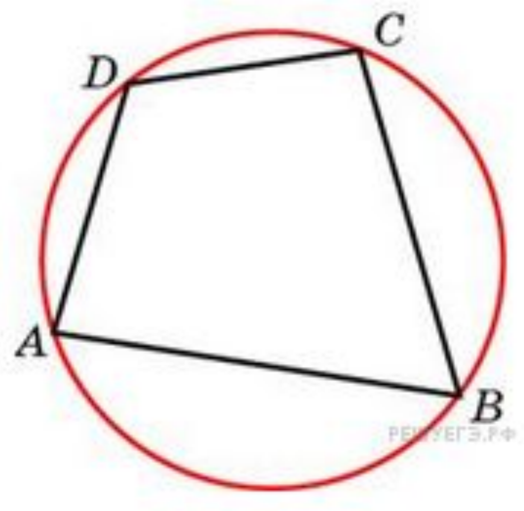
$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Около четырёхугольника не всегда можно описать окружность.



Около четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.



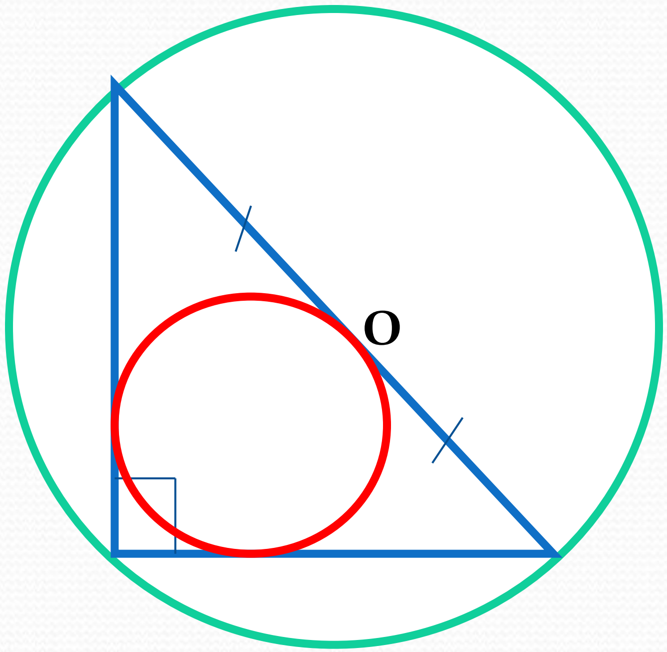
$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности совпадает с серединой гипотенузы.(гипотенуза является диаметром)

Радиус вписанной окружности находится по формуле:

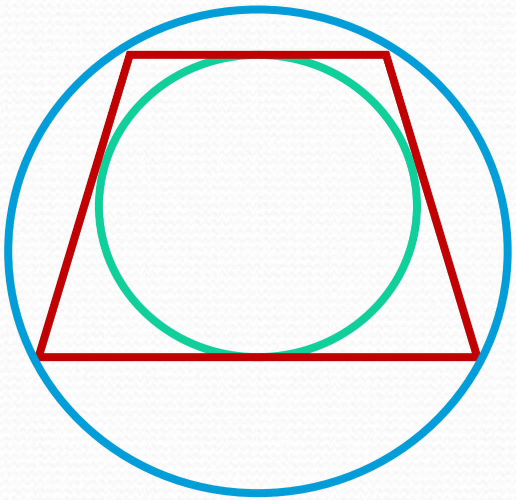
$\mathbf{r} = \dfrac{a+b-c}{2}$, где a и b – катеты, c – гипотенуза.

R = d/2

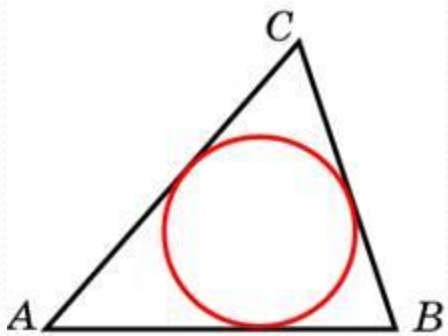


Только около равнобокой трапеции можно описать окружность.

В равнобедренную трапецию можно вписать окружность, если боковая сторона равна средней линии.



Площадь треугольника равна 24, а радиус вписанной окружности равен 2. Найдите периметр этого треугольника.



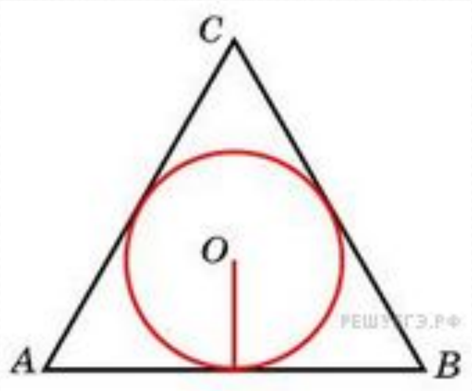
Решение.

Из формулы $S=pr$, где p - полупериметр, находим, что периметр описанного многоугольника равен отношению удвоенной площади к радиусу вписанной окружности:

$$P=\frac{2S}{r}=\frac{2\cdot 24}{2}=24$$

Ответ: 24

Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 6.

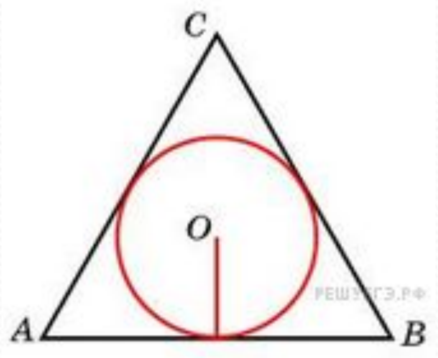


Решение.

Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен одной трети высоты. Поэтому он равен 2.

Ответ: 2.

Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 6. Найдите высоту этого треугольника.



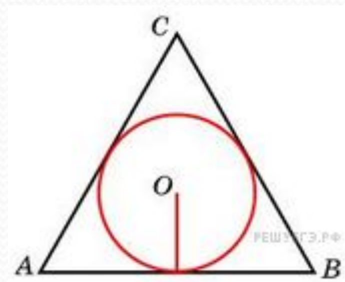
Решение.

$$r = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} AC^2 \sin 60^\circ}{3AC} = \frac{AC \sin 60^\circ}{3} = \frac{h}{\sin 60^\circ} \cdot \frac{\sin 60^\circ}{3} = \frac{h}{3},$$

значит, $h = 3r = 18.$

Ответ: 18.

Сторона правильного треугольника равна √3. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



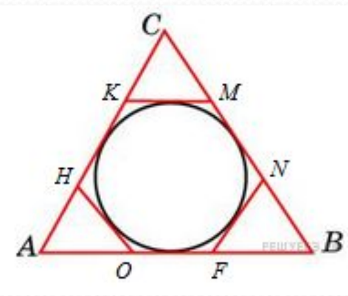
Решение.

Радиус вписанной в треугольник окружности равен отношению площади к полупериметру:

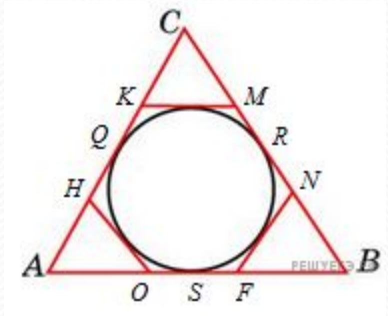
$$r = \frac{S_{ABC}}{p_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AB^2 \sin A}{\frac{3AB}{2}} = \frac{\sqrt{3}\sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

К окружности, вписанной в треугольник *ABC*, проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольников равны 6, 8, 10. Найдите периметр данного треугольника.



Решение.



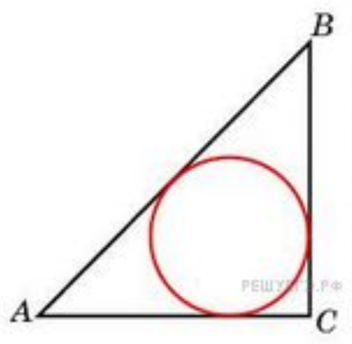
Отрезки касательных, проведенных к окружности из точек K,H,O,F,N,M соответственно равны друг другу. Поэтому

$$CQ + CR = P_{CKM},\ AQ + AS = P_{AHO},\ BS + BR = P_{BFN}.$$

Следовательно, $$P_{ABC} = P_{AOH} + P_{KCM} + P_{FNB} = 24.$$

Ответ: 24.

Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны $2 + \sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

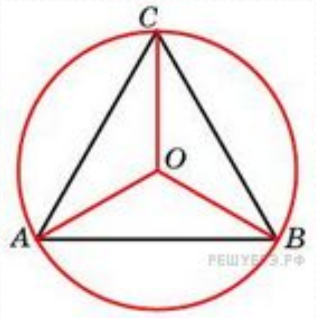


Решение.

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{2a - a\sqrt{2}}{2} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2} = \frac{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{2} = 1.$$

Ответ: 1.

Сторона правильного треугольника равна$\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



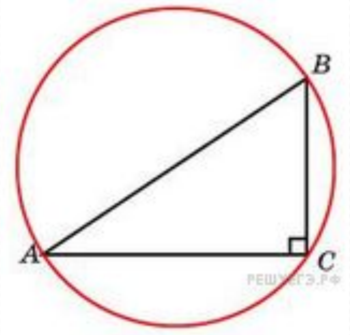
Решение.

Треугольник правильный, значит, все углы равны по 60°.

$$R = \frac{AC}{2\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.$$

Ответ: 1.

Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



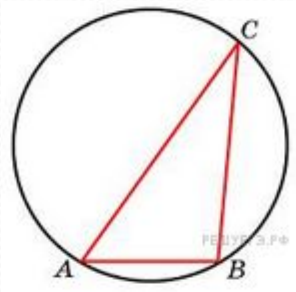
Решение.

Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым, значит, гипотенуза является диаметром и

R = 12/2=6.

Ответ: 6.

Сторона треугольника равна 1. Противолежащий ей угол равен 30°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



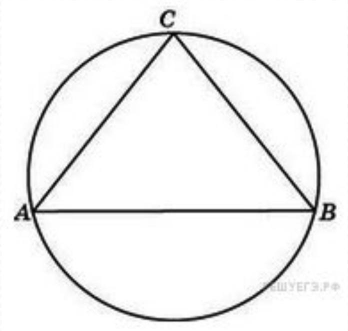
Решение.

По теореме синусов имеем:

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle C} = \frac{R}{2\sin 30^\circ} = 1.$$

Ответ: 1.

Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 40, основание равно 48. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



Решение.

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Для нахождения площади треугольника, воспользуемся формулой Герона

S = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

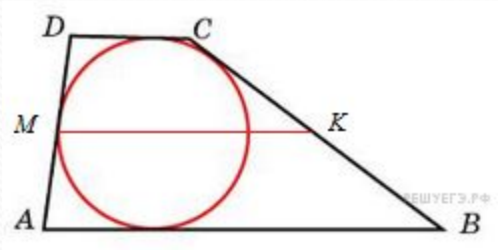
$$R = \frac{40 \cdot 40 \cdot 48}{4 \cdot \sqrt{64 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 16}} = \frac{10 \cdot 40 \cdot 48}{24 \cdot 8 \cdot 4} = 25.$$

Ответ: 25

Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.

Решение.

В выпуклый четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда АВ + СД = ВС + АД



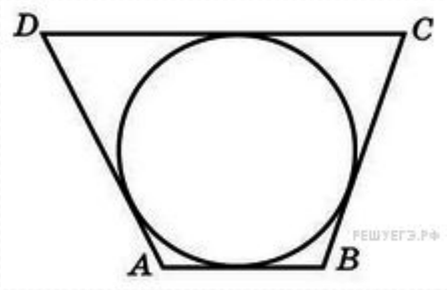
$$MK = \frac{DC + AB}{2} = \frac{AD + BC}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Ответ: 4.

Три стороны описанного около окружности четырехугольника относятся (в последовательном порядке) как 1:2:3. Найдите большую сторону этого четырехугольника, если известно, что его периметр равен 32.

Решение.

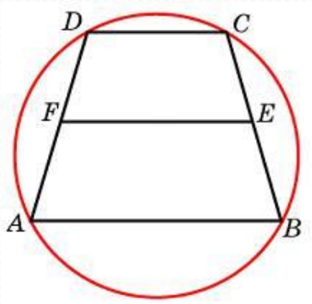
В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда АВ+СД = АД+ВС.



Пусть меньшая сторона равна х, тогда х +3х=Р/2; 4х=16; х=4. Тогда большая сторона равна Р/2 – 4=16-4=12

Ответ: 12

Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 22, средняя линия равна 5. Найдите боковую сторону трапеции.



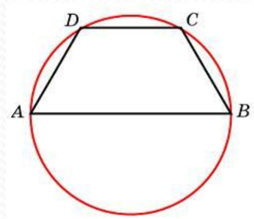
Решение.

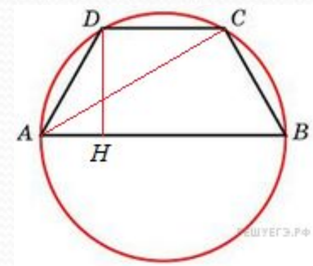
Трапеция – равнобедренная, т. к. вокруг неё описана окружность.

$$AD = \frac{P_{ABCD} - (AB + CD)}{2} = \frac{P_{ABCD}}{2} - \frac{AB + CD}{2} = \frac{P_{ABCD}}{2} - FE = 11 - 5 = 6.$$

Ответ: 6.

Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию, угол при основании равен 60°, большее основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности этой трапеции.





Решение.

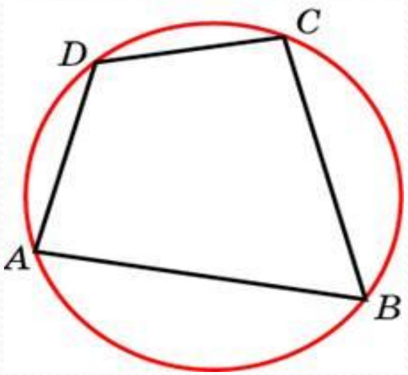
Окружность, описанная вокруг трапеции, описана и вокруг треугольника ADC. Это треугольник равнобедренный, угол при вершине равен 120°, углы при основании равны 30°. Найдем его боковую сторону:

AD=DC=AB-2AH=AB-2ADcos 60°=12-AD, откуда AD=6

$$R = \frac{AD}{2\sin\angle DCA} = \frac{6}{2\sin 30^\circ} = 6.$$

Ответ: 6.

Углы А, В и С четырехугольника АВСД относятся как1:2:3 . Найдите угол Д , если около данного четырехугольника можно описать окружность. Ответ дайте в градусах.

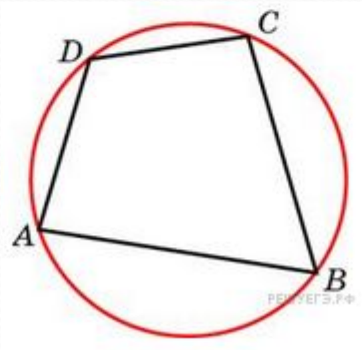


Решение.

Пусть угол А равен х°. Учитывая, что сумма противоположных углов во вписанном четырёхугольнике равна 180°, получим: х+3х=180; 4х=180; х=45. Угол В равен 2х=2·45=90. Тогда угол Д равен 180-90=90.

Ответ: 90.

Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 82° и 58° . Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

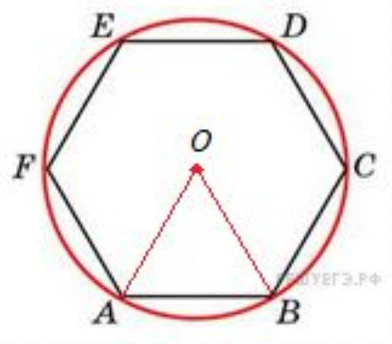


Решение.

Так как во вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°, то больший угол равен 180° - 58°= 122°

Ответ: 122.

Периметр правильного шестиугольника равен 72. Найдите диаметр описанной окружности.

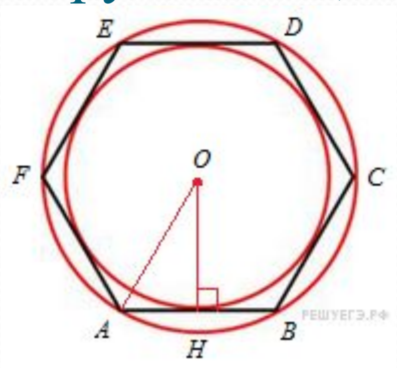


Решение.

Рассмотрим треугольник AOB. Он равносторонний, т.к. AO=OB=R и угол AOB равен 60°, тогда D=2R=2AO= 2AB=2·12=24

Ответ: 24.

Около окружности, радиус которой равен √3/2, описан правильный шестиугольник. Найдите радиус окружности, описанной около этого шестиугольника.



Решение.

Угол правильного шестиугольника равен 120° , тогда угол OAH в прямоугольном треугольнике OAH равен 60°. Следовательно,

$$R = OA = \frac{OH}{\sin\angle OAH} = \frac{r}{\sin\angle OAH} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = 1.$$

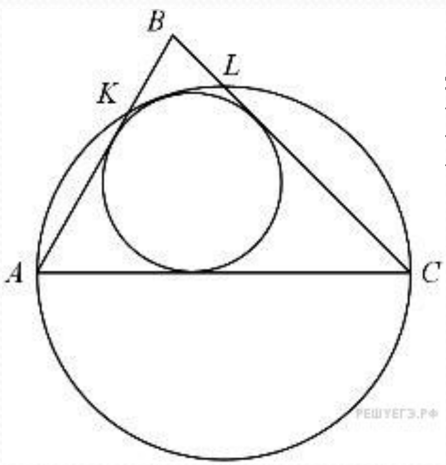
Ответ: 1.

С4. В треугольнике ABC известны стороны: AB=6, BC=8, AC=9. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Решение.

Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

1)Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника. Четырехугольник AKLC — вписанный, следовательно, $\angle KAC = 180^\circ - \angle KLC = \angle BLK$.



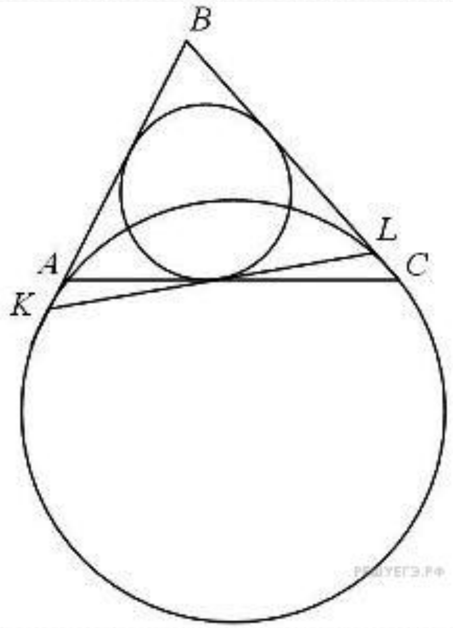
Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK , так ...бщий. Пусть коэффициент подобия равен k, тогда BL=kAB, ...C. Суммы противоположных сторон описанного ... AKLC равны:

$$AK + LC = KL + AC;$$

$$AB(1-k) + BC(1-k) = AC(1+k) \Leftrightarrow k = \frac{AB + BC - AC}{AC + AB + BC}$$

Подставляя известные значения сторон, находим

k = $\frac{6+8-9}{9+6+8}$ = $\frac{5}{23}$ KL=kAC=45/23



2)Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB. Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK , так как угол ABC — общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, то есть, треугольники LBK и ABC равны, поэтому KL=AC= 9. Заметим, что BK=BC>AB и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB.

Если точка L лежит на продолжении стороны BC, то BL>BC, но, аналогично предыдущему случаю, получаем BL=AB<BC. Значит, этот случай не достигается.

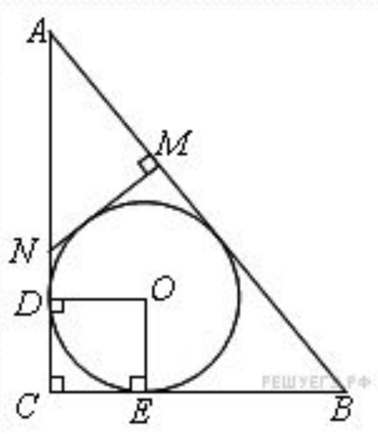
Ответ:45/23; 9.

С 4. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 24, а отношение катетов треугольника равно 5/12.

Решение.

Обозначим треугольник ABC, отношение катетов равен 5/12, AC=5x-катет, BC=12x-катет, AB=13x— гипотенуза. Заметим, что окружность, о которой говорится в условии, — окружность, вписанная в треугольник *ABC*. Пусть *O* — её центр, а *D* и *E* — точки касания с катетами *AC* и *BC* соответственно. Тогда, так как *ODCE* — квадрат, радиус этой окружности.

$OD=EC=\frac{AC+BC-AB}{2}=\frac{12x+5x-13x}{2}=2x$. Пусть прямая MN



на AB, касается окружности, пересекает AB в точке M, а AC в

гольный треугольник ANM подобен треугольнику ABC. В нём

AN=10. У описанного четырёхугольника суммы

х сторон равны: BC+MN=BM+CN; 12x+24=(13x-26)+(5x-10),

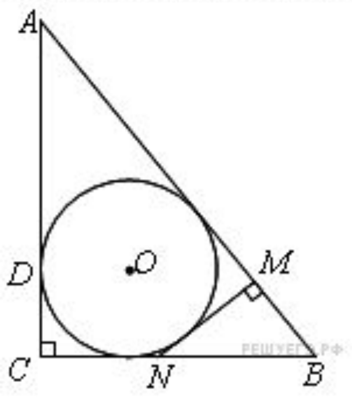
x=10.

r=2x=20

Пусть прямая MN перпендикулярна AB, касается окружности, пересекает AB в точке M, а BC в точке N. Прямоугольный треугольник NBM подобен треугольнику ABC. В нём MN=24, BM=57,6, BN=62,4. У описанного четырёхугольника суммы противоположных сторон равны:

MN+AC=CN+AM; 24+5x=(12x-62,4)+(13x-57,6), откуда находим: x=7,2.

r=2x=14,4



Ответ: 20 или 14,4.

Список используемой литературы и ресурсов :

1. Атанасян Л.С. Геометрия, 7-9: учеб. для общеобразоват. учреждений-М.: Просвещение, 2010.

2. ЕГЭ-2013. типовые экзаменационные варианты: 10вариантов / под ред. А.Л.Семёнова, И.В.Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2012

3.mathege.ru

4.reshuege.ru