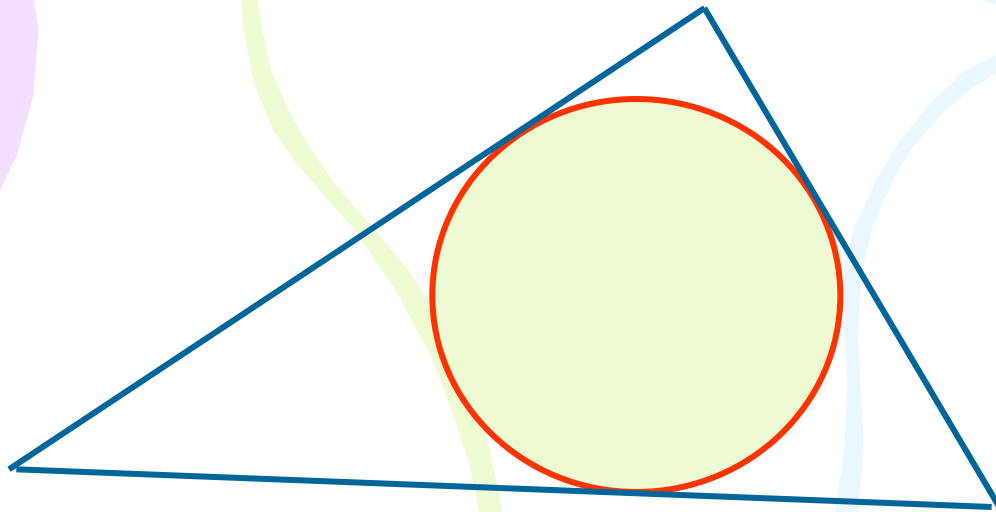


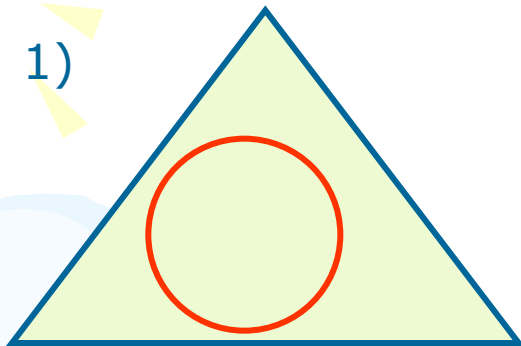
Вписанная окружность



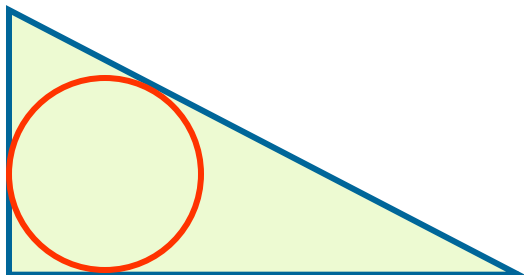
Определение: окружность называется вписанной в треугольник, если все стороны треугольника касаются окружности.

На каком рисунке окружность вписана в треугольник:

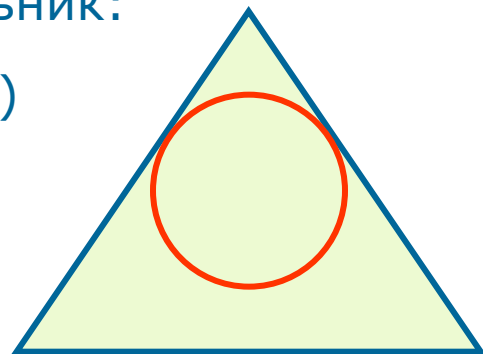
1)



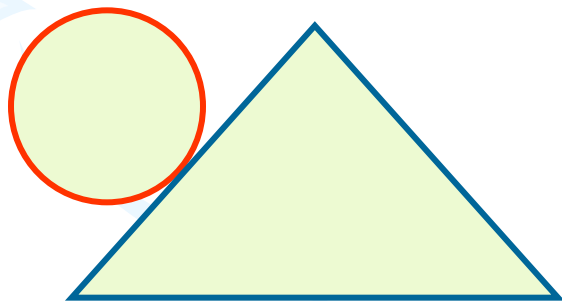
2)



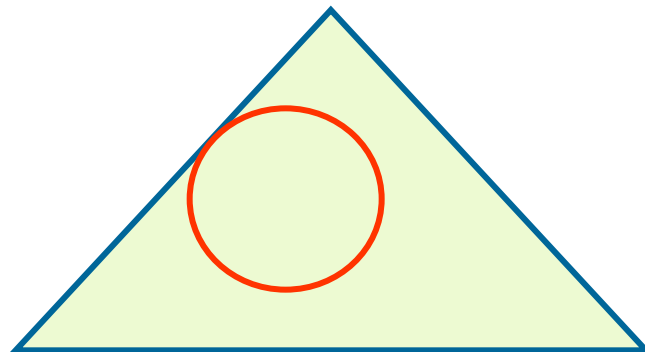
3)



4)



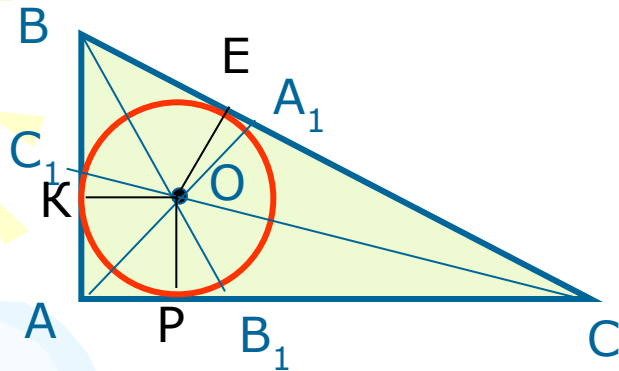
5)



Если окружность вписана в треугольник, то треугольник описан около окружности.

Теорема. **В треугольник можно вписать окружность, и притом только одну.**

Её центр – точка пересечения биссектрис треугольника.



Дано: $\triangle ABC$

Доказать: существует Окр.(O;r),
вписанная в треугольник

Доказательство:

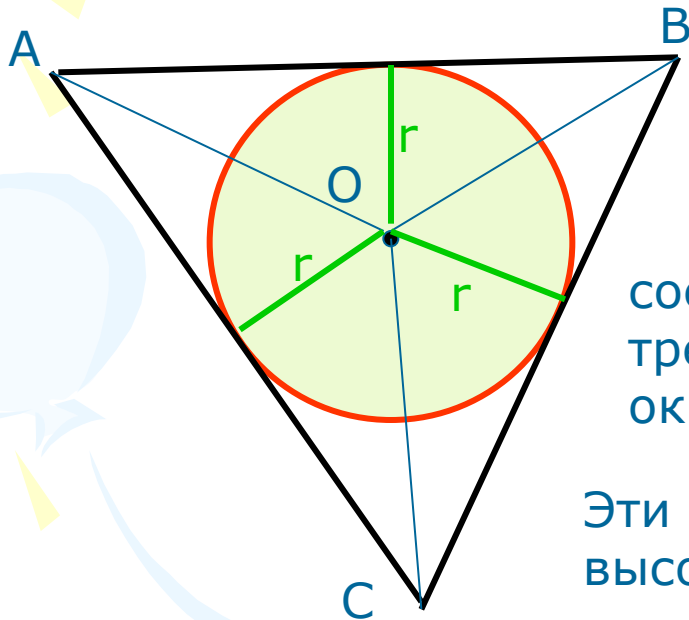
Проведём биссектрисы треугольника: AA_1 , BB_1 , CC_1 .
По свойству (замечательная точка треугольника)
биссектрисы пересекаются в одной точке – O,
и эта точка равноудалена от всех сторон треугольника, т. е. :

$OK = OE = OP$, где $OK \perp AB$, $OE \perp BC$, $OP \perp AC$, значит,
O – центр окружности, а AB, BC, AC – касательные к ней.

Значит, окружность вписана в $\triangle ABC$.

Важная формула

Дано: Окр.(O;r) вписана в $\triangle ABC$,
 $p = \frac{1}{2} (AB + BC + AC)$ – полупериметр.



Доказать: $S_{ABC} = p \cdot r$

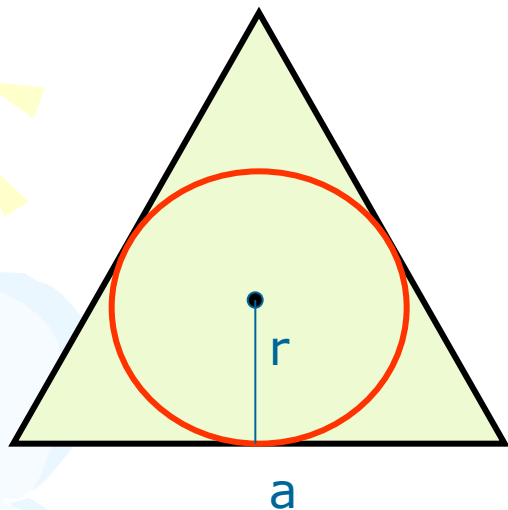
Доказательство:

соединим центр окружности с вершинами треугольника и проведём радиусы окружности в точки касания.

Эти радиусы являются высотами треугольников AOB, BOC, COA.

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} AC \cdot r = \\ &= \frac{1}{2} (AB + BC + AC) \cdot r = \frac{1}{2} P \cdot r. \end{aligned}$$

Задача: в равносторонний треугольник со стороной 4 см вписана окружность. Найдите её радиус.



Решение:

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad \text{и} \quad S = p \cdot r$$

$$S = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

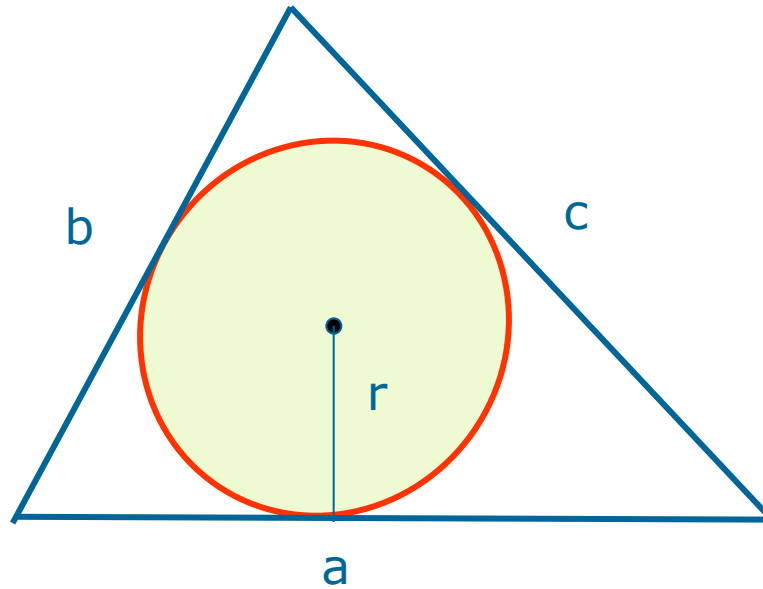
$$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6(\text{см}) - \text{полупериметр}$$

$$4\sqrt{3} = 6 \cdot r$$

$$r = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} (\text{см})$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\sqrt{3}}{3} (\text{см})$$

Вывод формулы для радиуса вписанной в треугольник окружности

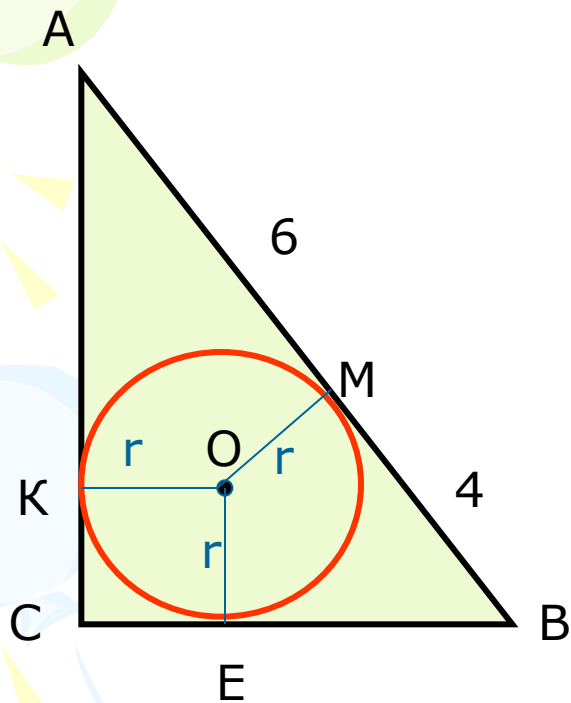


$$S = p \cdot r = \frac{1}{2} P \cdot r = \frac{1}{2} (a + b + c) \cdot r$$

$$2S = (a + b + c) \cdot r$$

$$r = \frac{2S}{a + b + c}$$

Задача: в прямоугольный треугольник вписана окружность, гипотенуза точкой касания делится на отрезки 6 см и 4 см. Найдите радиус вписанной окружности.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$
Окр.(O;r) вписана,
 $AM = 6$ см, $BM = 4$ см

Найти: r.

Решение:

$$AB = AM + BM = 6 + 4 = 10(\text{см})$$

Т. к. Окр.(O;r) вписана в $\triangle ABC$, то AB, AC, BC – касательные и по свойству касательных, проведённых из одной точки: $AM = AK = 6$ см, $BE = BM = 4$ см, $CK = CE$

Т. к. $\angle C = 90^\circ$, то $CKOE$ – квадрат, поэтому $CK = CE = r$,

$$AC = 6 + r, BC = 4 + r$$

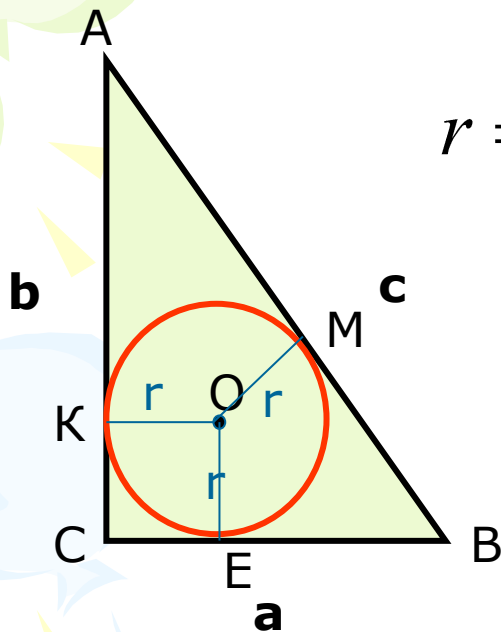
По теореме Пифагора: $AC^2 + BC^2 = AB^2$

$$(6 + r)^2 + (4 + r)^2 = 10^2$$

Решив квадратное уравнение, получим $r = 2$ см

Ответ: 2 см

Нужная формула для радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник



$$r = \frac{a + b - c}{2}; a, b - \text{катеты, } c - \text{гипотенуза}$$

Доказательство:

Т. к. Окр.(O;r) вписана в треугольник ABC, у которого угол C – прямой, то AC, BC, AB – касательные и

CKOE – квадрат, значит, CK = CE = r

По свойству касательных: BE = BM = a - r

AK = AM = b - r

AB = AM + BM

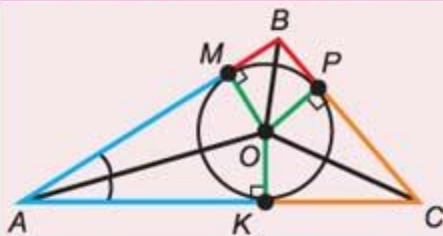
c = b - r + a - r

2r = a + b - c

$r = \frac{1}{2} (a + b - c)$

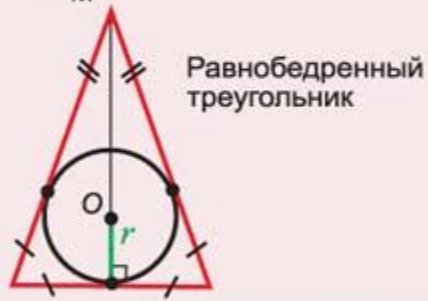
3

ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК

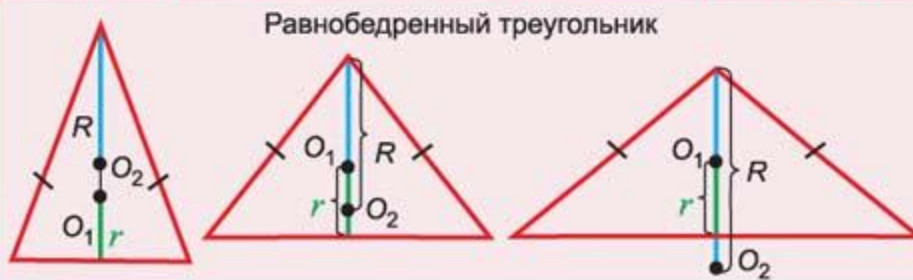


AB, BC, AC – касательные
 Отрезки касательных равны:
 $AM = AK, BM = BP, CP = CK$
 $OM = OK = OP = r$
 AO, BO, CO – биссектрисы углов

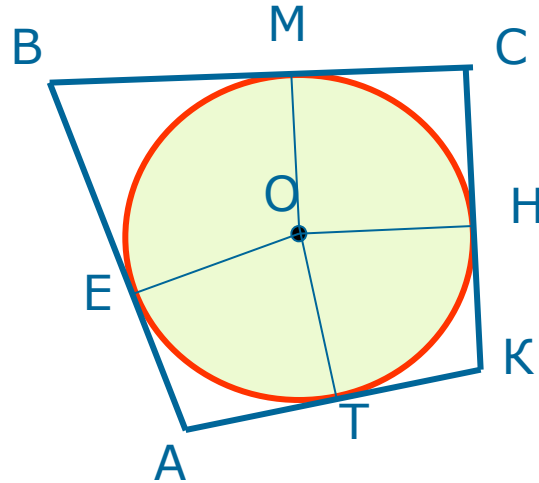
ПОЛОЖЕНИЕ ЦЕНТРА ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ



ЦЕНТРЫ И РАДИУСЫ ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТЕЙ



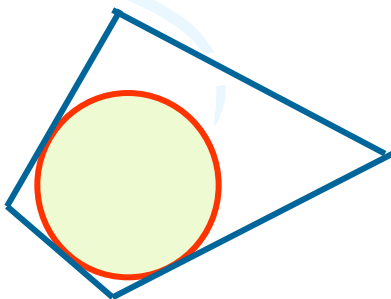
Окружность, вписанная в четырёхугольник



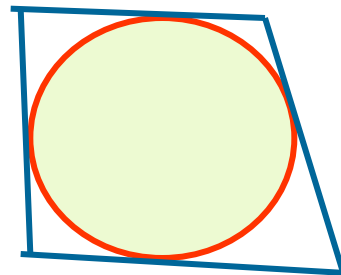
Определение: **окружность называется вписанной в четырёхугольник, если все стороны четырёхугольника касаются её.**

На каком рисунке окружность вписана в четырёхугольник:

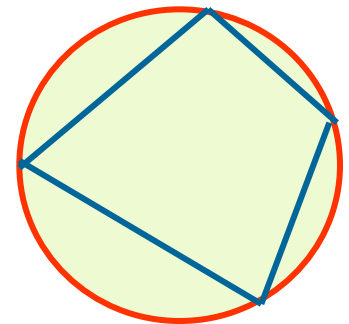
1)



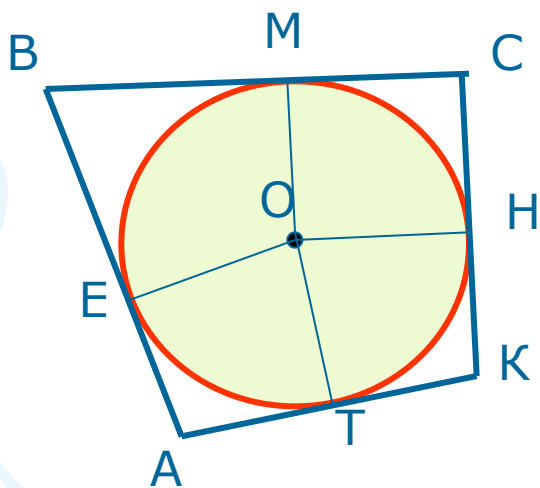
2)



3)



Теорема: **если в четырёхугольник вписана окружность, то суммы противоположных сторон четырёхугольника равны** (в любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны).

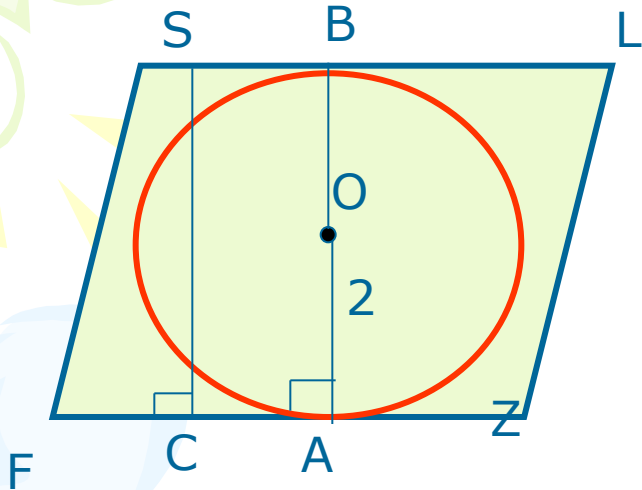


$$AB + CK = BC + AK.$$

Обратная теорема: **если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.**

(доказательство – в учебнике № 724)

Задача: в ромб, острый угол которого 60° , вписана окружность, радиус которой равен 2 см. Найти периметр ромба.



Дано: Окр.(O; 2 см) вписана в ромб FSLZ, $\angle F = 60^\circ$.

Найти: P_{FSLZ}

Решение:

Т. к. окружность вписана в ромб, то стороны ромба касаются окружности, значит, $AB \perp FZ$, $AB = 2r = 4$ см – диаметр.

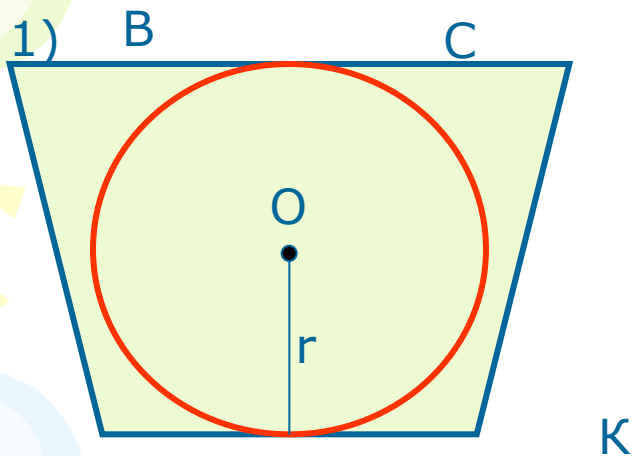
Проведём $SC \perp FZ$, $SC = AB$ (как перпендикуляры между параллельными прямыми), $SC = 4$ см

$$\triangle FSC - \text{прямоугольный, } \sin F = \frac{SC}{FS}; \sin 60^\circ = \frac{4}{FS}; \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{FS}; FS = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$P_{FSLZ} = 4FS = 4 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ (см).}$$

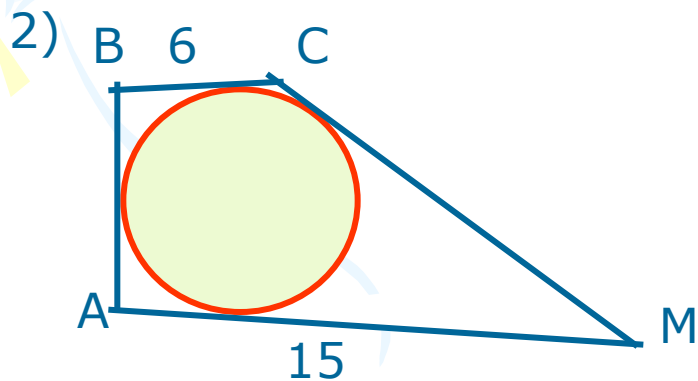
Ответ: $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ см

Реши задачи



Дано: Окр.($O; r$) вписана в $ABCK$,
 $P_{ABCK} = 10$

Найти: $BC + AK$



Дано: $ABCM$ описан около Окр.($O; r$)
 $BC = 6$, $AM = 15$,

$$CM = 2 AB$$

Найти: AB, CM