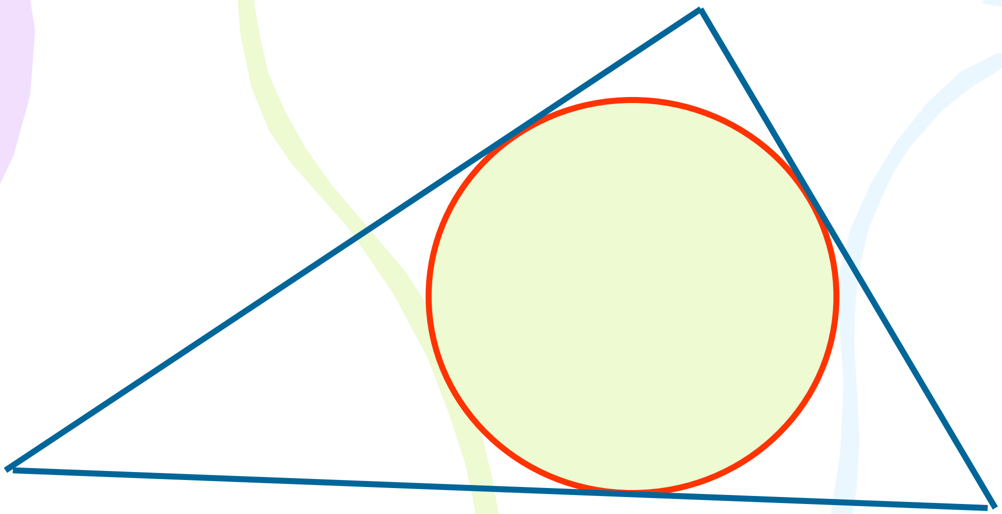
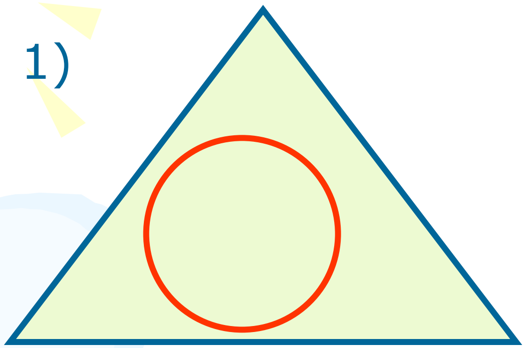
Вписанная окружность



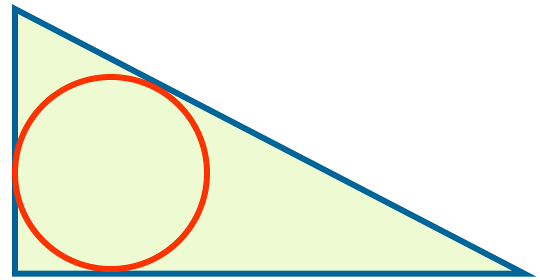
Определение: **окружность называется вписанной в треугольник, если все стороны треугольника касаются окружности.**

На каком рисунке окружность вписана в треугольник:

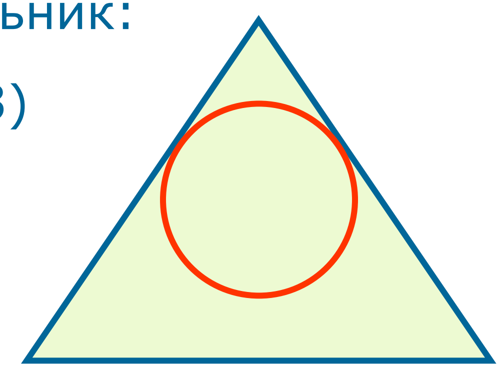
1)



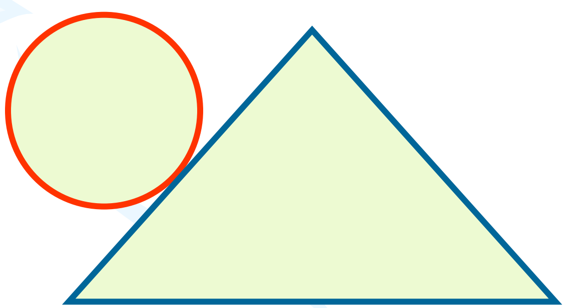
2)



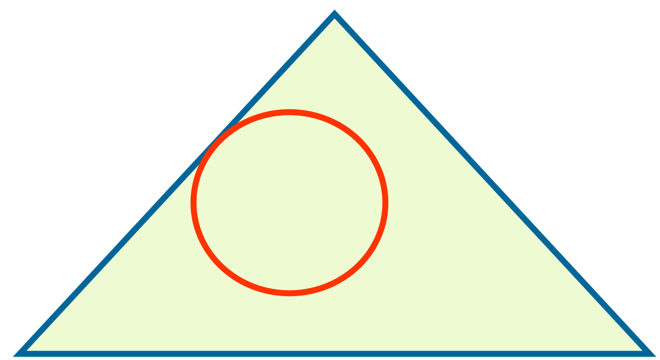
3)



4)



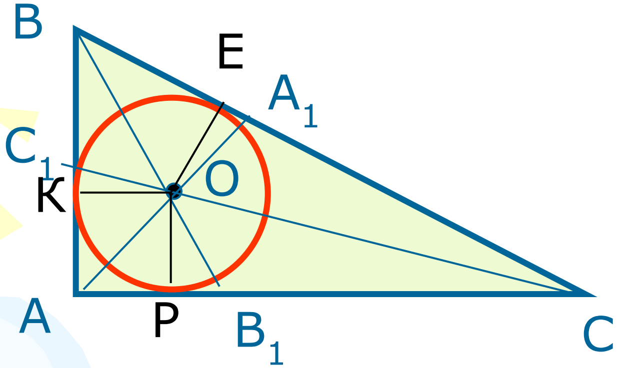
5)



Если окружность вписана в треугольник, то треугольник описан около окружности.

Теорема. **В треугольник можно вписать окружность, и притом только одну.**

Её центр – точка пересечения биссектрис треугольника.



Дано: $\triangle ABC$

Доказать: существует Окр.(O;r), вписанная в треугольник

Доказательство:

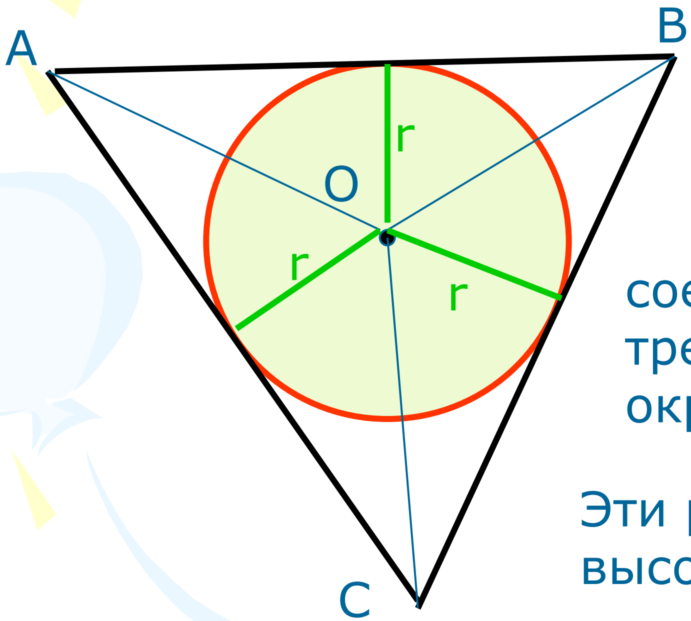
Проведём биссектрисы треугольника: AA_1, BB_1, CC_1.
По свойству (замечательная точка треугольника) биссектрисы пересекаются в одной точке – O,
и эта точка равноудалена от всех сторон треугольника, т. е :

OK = OE = OP, где $OK \perp AB$, $OE \perp BC$, $OP \perp AC$, значит,
O – центр окружности, а AB, BC, AC – касательные к ней.

Значит, окружность вписана в $\triangle ABC$.

Важная формула

Дано: Окр.(O;r) вписана в $\triangle$ ABC,
$p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$ – полупериметр.



Доказать: $\mathbf{S_{ABC} = p \cdot r}$

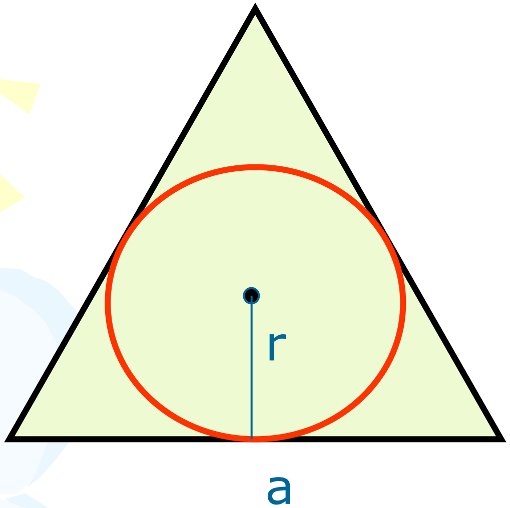
Доказательство:

соединим центр окружности с вершинами треугольника и проведём радиусы окружности в точки касания.

Эти радиусы являются высотами треугольников AOB, BOC, COA.

$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} AC \cdot r =$
$= \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot r = \frac{1}{2} P \cdot r.$

Задача: в равносторонний треугольник со стороной 4 см вписана окружность. Найдите её радиус.



Решение:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{и} \quad S = p \cdot r$$

$$S = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

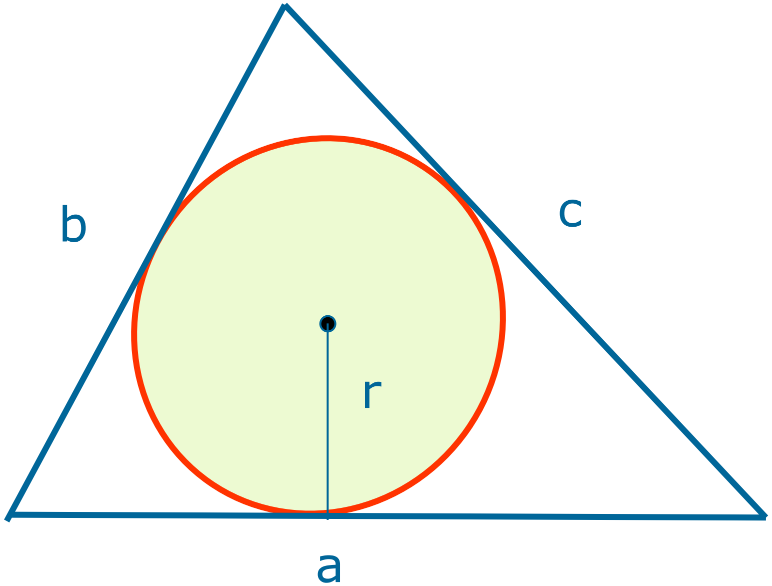
P = ½ ·4 · 3 = ½ · 12 = 6(см) - полупериметр

$$4\sqrt{3} = 6 \cdot r$$

$$r = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ (см)}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (см)

Вывод формулы для радиуса вписанной в треугольник окружности

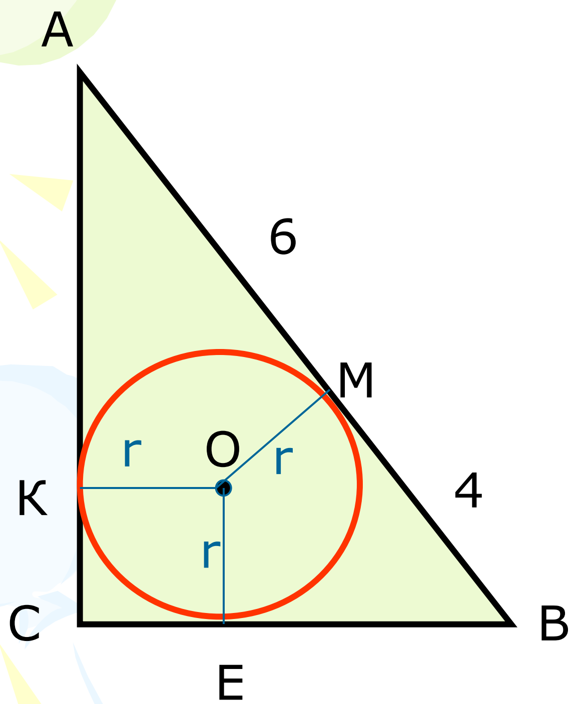


$$S = p \cdot r = ½\, P \cdot r = ½\, (a + b + c) \cdot r$$

$$2S = (a + b + c) \cdot r$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c}$$

Задача: в прямоугольный треугольник вписана окружность, гипотенуза точкой касания делится на отрезки 6 см и 4 см. Найдите радиус вписанной окружности.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^0$

Окр.(О;r) вписана,

АМ = 6 см, ВМ = 4 см

Найти: r.

Решение:

АВ = АМ + ВМ = 6 + 4 = 10(см)

Т. к. Окр.(О;r) вписана в $\triangle ABC$, то АВ, АС,ВС – касательные и по свойству касательных, проведённых из одной точки: АМ = АК = 6 см, ВЕ = ВМ = 4 см, СК = СЕ

Т. к. $\angle C = 90^0$, то СКОЕ – квадрат, поэтому СК = СЕ = r.

АС= 6+ r, ВС = 4 + r

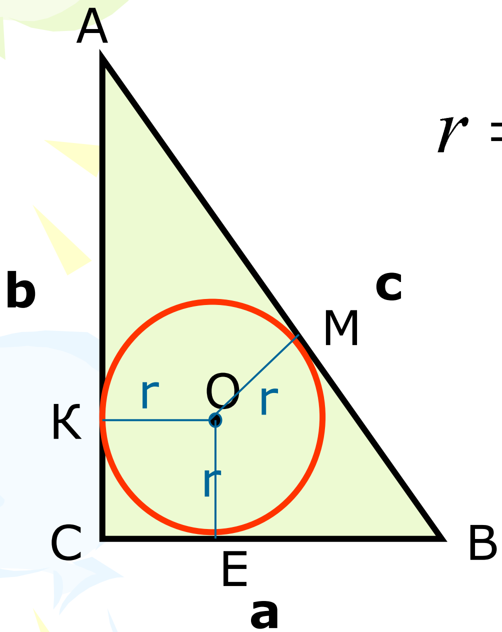
По теореме Пифагора: $AC^2 + BC^2 = AB^2$

$(6 + r)^2 + (4 + r)^2 = 10^2$

Решив квадратное уравнение, получим r = 2 см

Ответ: 2 см

Нужная формула для радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник



$$r = \frac{a+b-c}{2}; a, b$$ - **катеты, c - гипотенуза**

Доказательство:

Т. к. Окр.(О;r) вписана в треугольник АВС, у которого угол С – прямой, то

АС, ВС, АВ – касательные и

СКОЕ – квадрат, значит, СК = СЕ = r

По свойству касательных: ВЕ = ВМ = a - r

АК = АМ = b - r

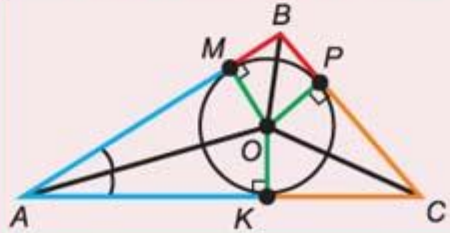
АВ = АМ + ВМ

c = b – r + a - r

2r = a + b - c

r = ½ (a + b – c)

ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК



AB, BC, AC – касательные

Отрезки касательных равны:

$AM = AK$, $BM = BP$, $CP = CK$

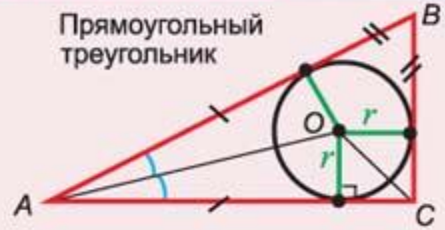
$OM = OK = OP = r$

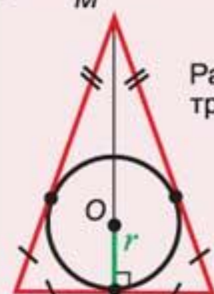
AO, BO, CO – биссектрисы углов

ПОЛОЖЕНИЕ ЦЕНТРА ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ

Произвольный треугольник

Прямоугольный треугольник



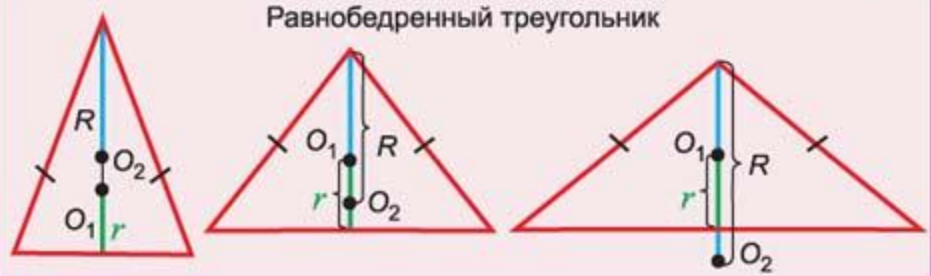


Равнобедренный треугольник

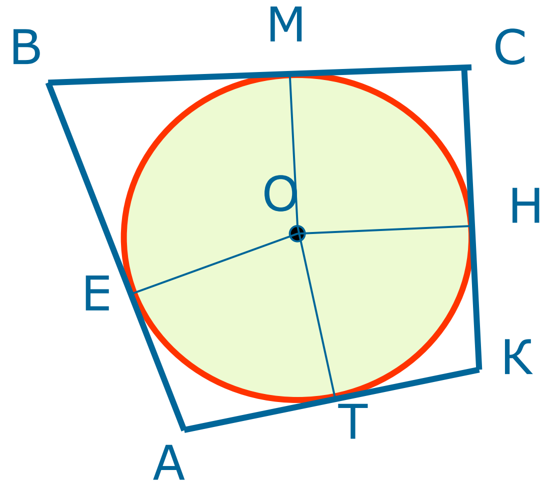
Равнобедренный прямоугольный треугольник

ЦЕНТРЫ И РАДИУСЫ ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТЕЙ

Равнобедренный треугольник

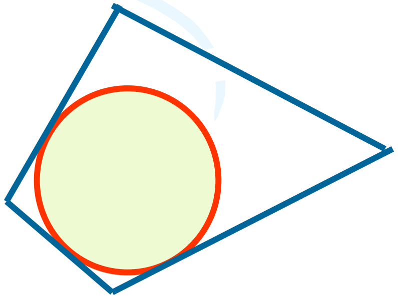


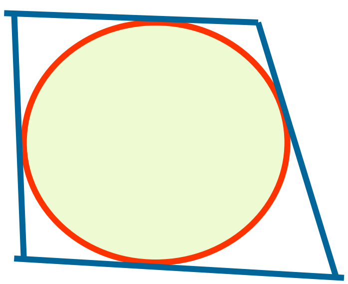
Окружность, вписанная в четырёхугольник

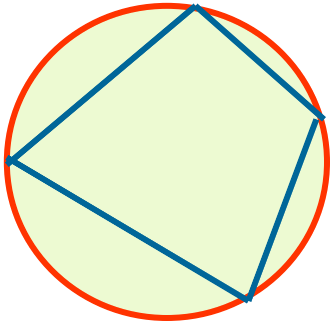


Определение: **окружность называется вписанной в четырёхугольник, если все стороны четырёхугольника касаются её.**

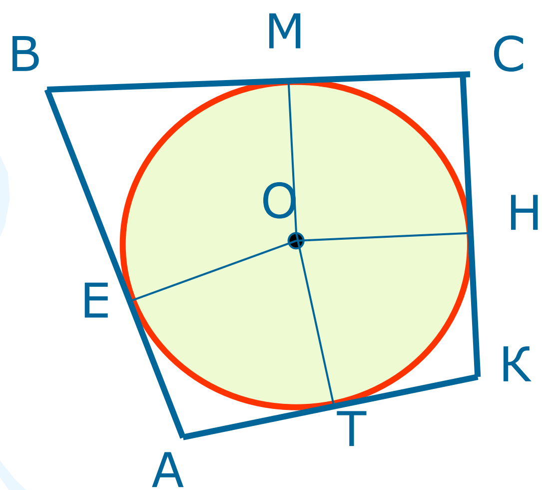
На каком рисунке окружность вписана в четырёхугольник:

1) 

2) 

3) 

Теорема: **если в четырёхугольник вписана окружность, то суммы противоположных сторон четырёхугольника равны** (в любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны).

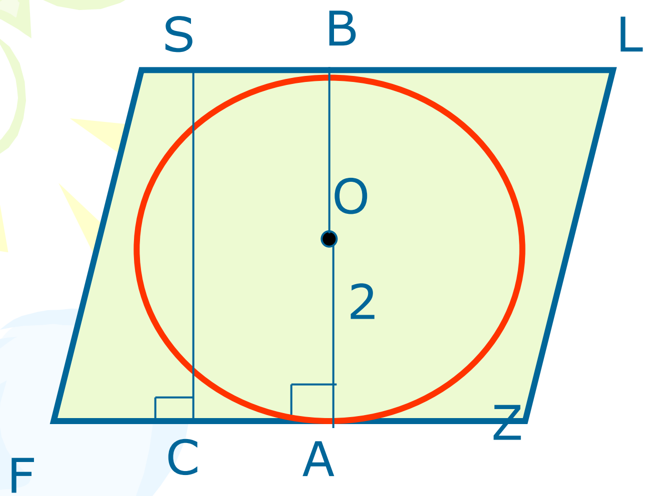


AB + CK = BC + AK.

Обратная теорема: **если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.**

(доказательство – в учебнике № 724)

Задача: в ромб, острый угол которого 60^0, вписана окружность, радиус которой равен 2 см. Найти периметр ромба.



Дано: Окр.(О; 2 см) вписана в ромб FSLZ, $\angle F = 60^0$.

Найти: P_{FSLZ}

Решение:

Т. к. окружность вписана в ромб, то стороны ромба касаются окружности, значит, $AB \perp FZ$, AB = 2r = 4см – диаметр.

Проведём $SC \perp FZ$, SC = AB (как перпендикуляры между параллельными прямыми), SC = 4см

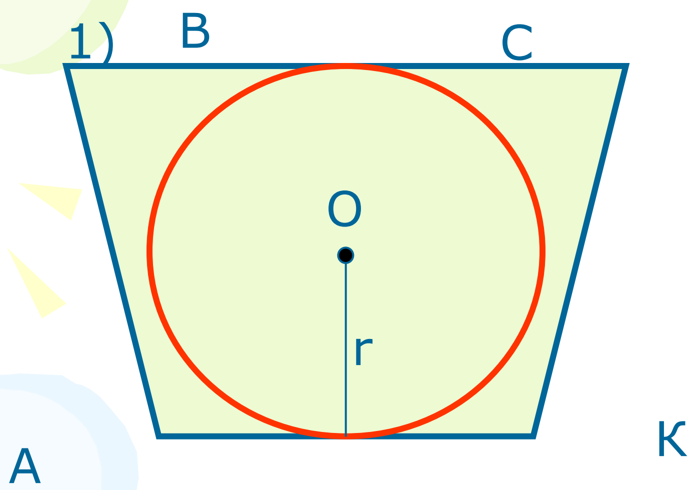
$\triangle$ FSC – прямоугольный, $SinF = \frac{SC}{FS}; Sin60^0 = \frac{4}{FS}; \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{FS}; FS = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$P_{FSLZ} = 4FS = 4 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$ (см).

Ответ: $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ см

Реши задачи

1)

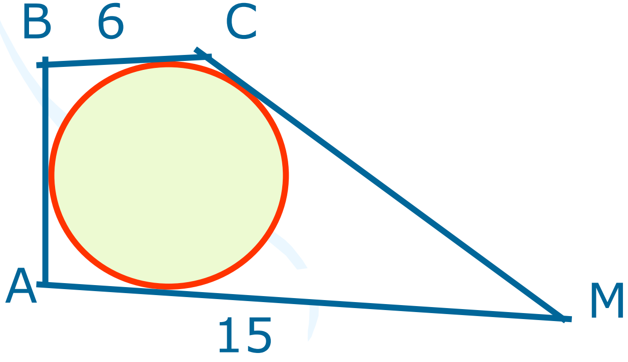


Дано: Окр.(O; r) вписана в ABCK,

$P_{ABCK} = 10$

Найти: BC + AK

2)



Дано: ABCM описан около Окр.(O; r)

BC = 6, AM = 15,

CM = 2 AB

Найти: AB, CM