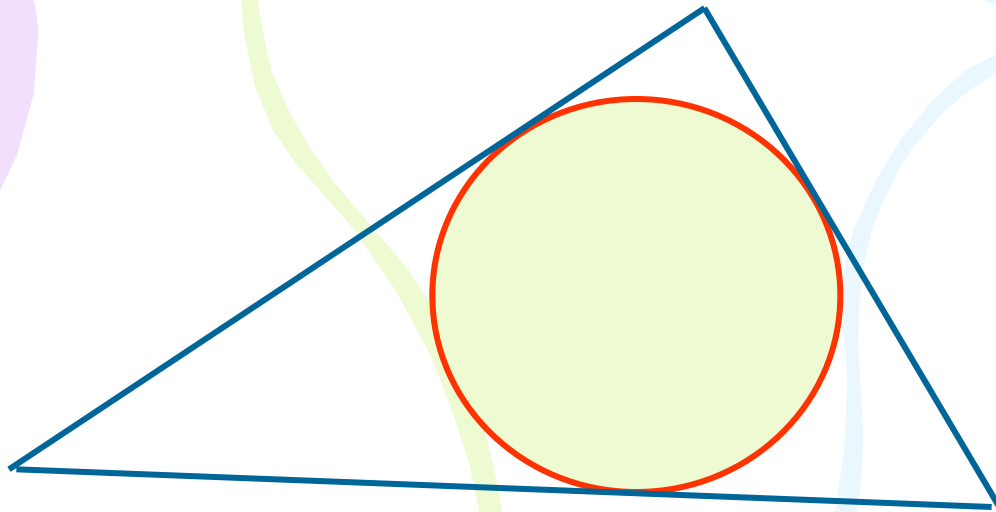


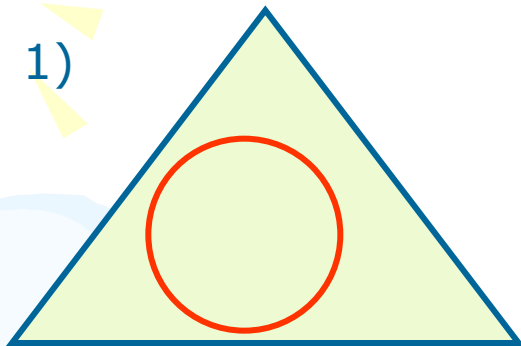
# Вписанная окружность



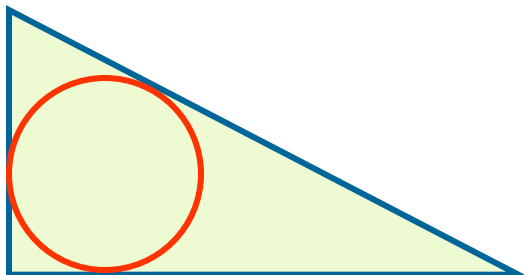
**Определение:** окружность называется вписанной в треугольник, если все стороны треугольника касаются окружности.

На каком рисунке окружность вписана в треугольник:

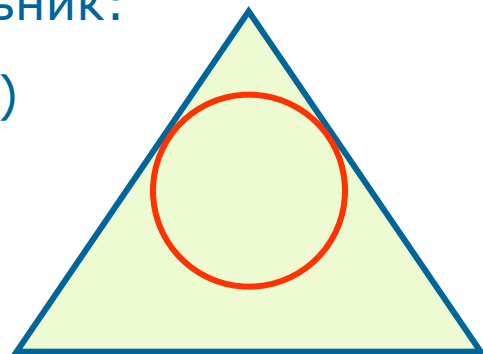
1)



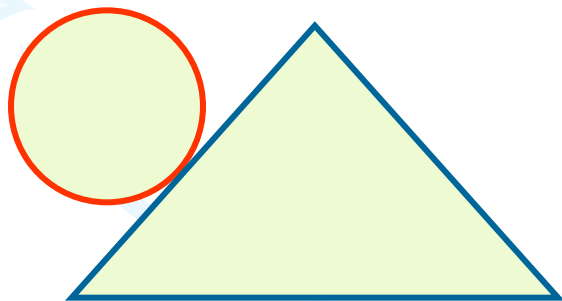
2)



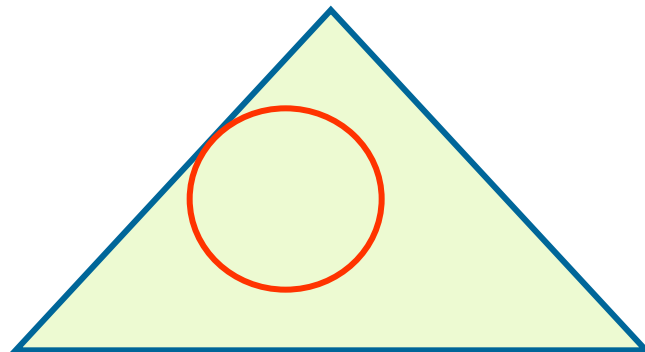
3)



4)



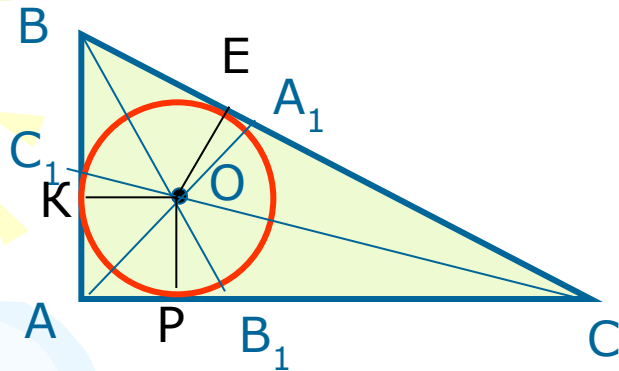
5)



**Если окружность вписана в треугольник, то треугольник описан около окружности.**

Теорема. **В треугольник можно вписать окружность, и притом только одну.**

**Её центр – точка пересечения биссектрис треугольника.**



Дано:  $\triangle ABC$

Доказать: существует Окр.(O;r),  
вписанная в треугольник

Доказательство:

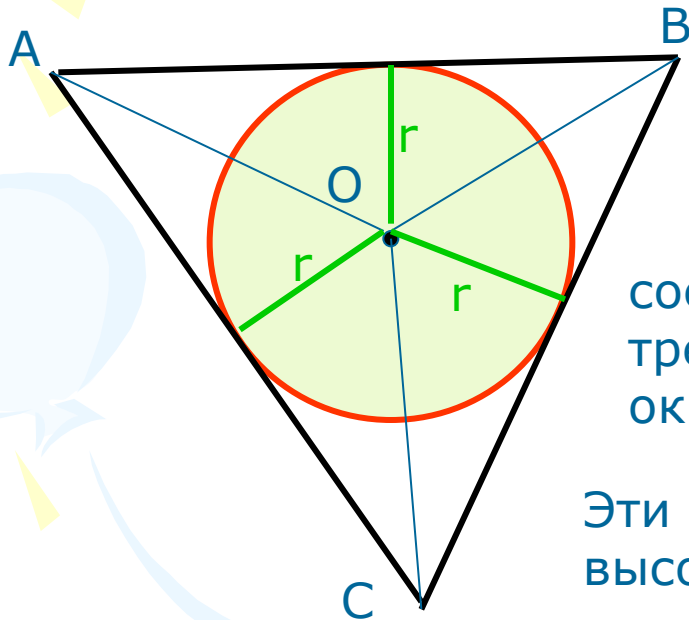
Проведём биссектрисы треугольника:  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ .  
По свойству (замечательная точка треугольника)  
биссектрисы пересекаются в одной точке – O,  
и эта точка равноудалена от всех сторон треугольника, т. е. :

$OK = OE = OP$ , где  $OK \perp AB$ ,  $OE \perp BC$ ,  $OP \perp AC$ , значит,  
O – центр окружности, а AB, BC, AC – касательные к ней.

Значит, окружность вписана в  $\triangle ABC$ .

# Важная формула

Дано: Окр.(O;r) вписана в  $\triangle ABC$ ,  
 $p = \frac{1}{2} (AB + BC + AC)$  – полупериметр.



Доказать:  $S_{ABC} = p \cdot r$

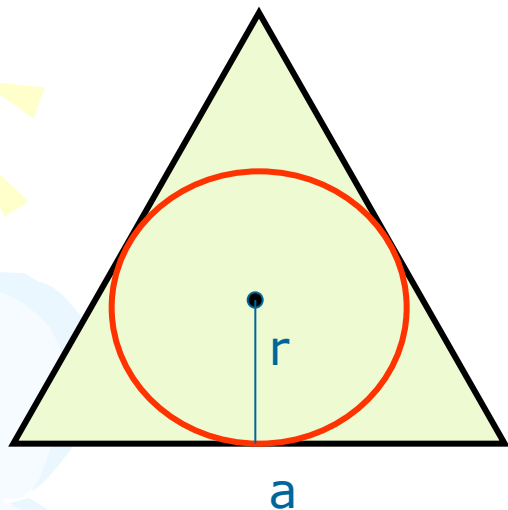
Доказательство:

соединим центр окружности с вершинами треугольника и проведём радиусы окружности в точки касания.

Эти радиусы являются высотами треугольников AOB, BOC, COA.

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} AC \cdot r = \\ &= \frac{1}{2} (AB + BC + AC) \cdot r = \frac{1}{2} P \cdot r. \end{aligned}$$

Задача: в равносторонний треугольник со стороной 4 см вписана окружность. Найдите её радиус.



Решение:

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad \text{и} \quad S = p \cdot r$$

$$S = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

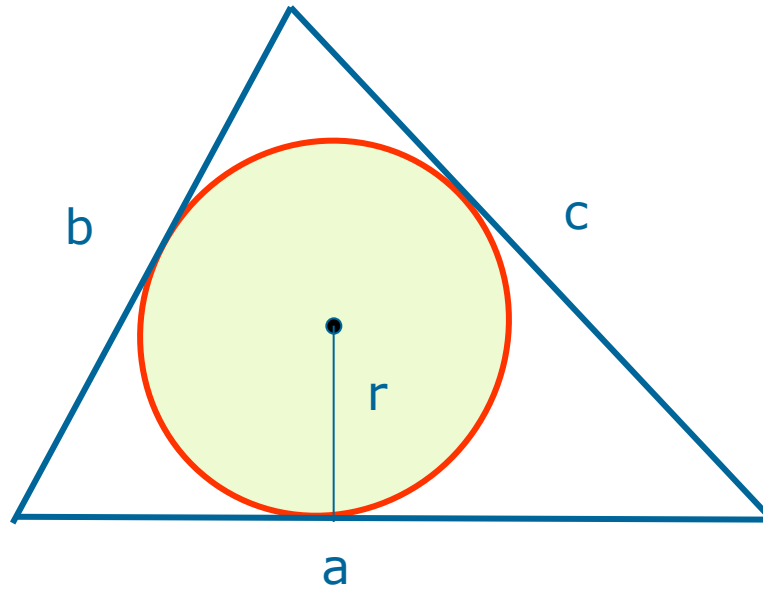
$$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6(\text{см}) - \text{полупериметр}$$

$$4\sqrt{3} = 6 \cdot r$$

$$r = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} (\text{см})$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\sqrt{3}}{3} (\text{см})$$

## Вывод формулы для радиуса вписанной в треугольник окружности

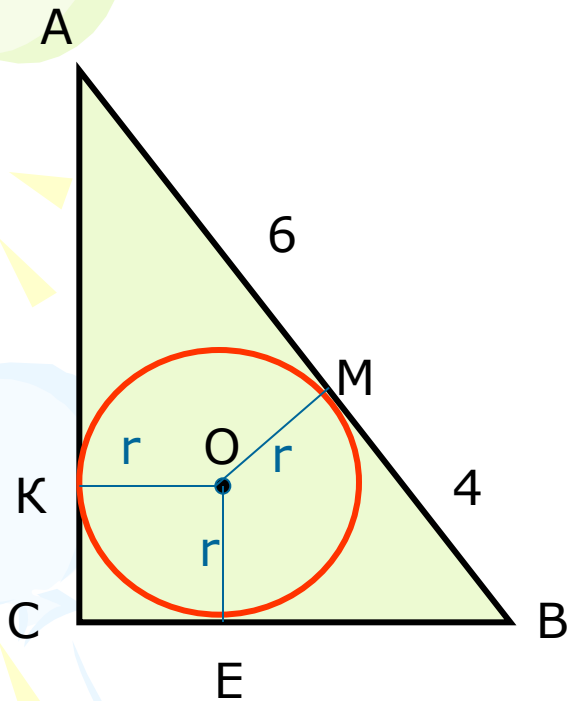


$$S = p \cdot r = \frac{1}{2} P \cdot r = \frac{1}{2} (a + b + c) \cdot r$$

$$2S = (a + b + c) \cdot r$$

$$r = \frac{2S}{a + b + c}$$

Задача: в прямоугольный треугольник вписана окружность, гипотенуза точкой касания делится на отрезки 6 см и 4 см. Найдите радиус вписанной окружности.



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$   
Окр.(O;r) вписана,  
 $AM = 6$  см,  $BM = 4$  см

Найти: r.

Решение:

$$AB = AM + BM = 6 + 4 = 10(\text{см})$$

Т. к. Окр.(O;r) вписана в  $\triangle ABC$ , то  $AB, AC, BC$  – касательные и по свойству касательных, проведённых из одной точки:  $AM = AK = 6$  см,  $BE = BM = 4$  см,  $CK = CE$

Т. к.  $\angle C = 90^\circ$ , то  $CKOE$  – квадрат, поэтому  $CK = CE = r$ ,

$$AC = 6 + r, BC = 4 + r$$

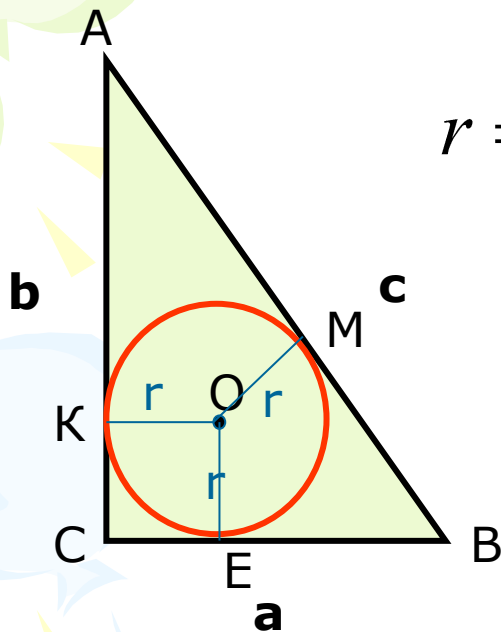
По теореме Пифагора:  $AC^2 + BC^2 = AB^2$

$$(6 + r)^2 + (4 + r)^2 = 10^2$$

Решив квадратное уравнение, получим  $r = 2$  см

Ответ: 2 см

# Нужная формула для радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник



$$r = \frac{a + b - c}{2}; a, b - \text{катеты, } c - \text{гипотенуза}$$

Доказательство:

Т. к. Окр.(O;r) вписана в треугольник ABC, у которого угол C – прямой, то AC, BC, AB – касательные и

CKOE – квадрат, значит, CK = CE = r

По свойству касательных: BE = BM = a - r

AK = AM = b - r

AB = AM + BM

c = b - r + a - r

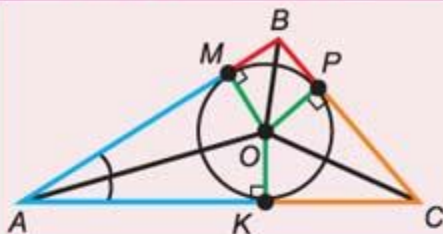
2r = a + b - c

r =  $\frac{1}{2}(a + b - c)$



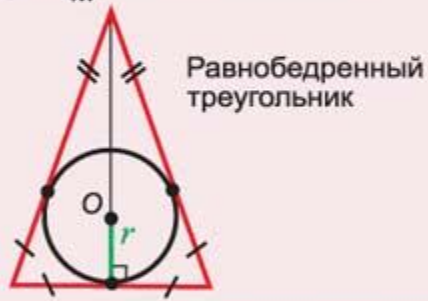
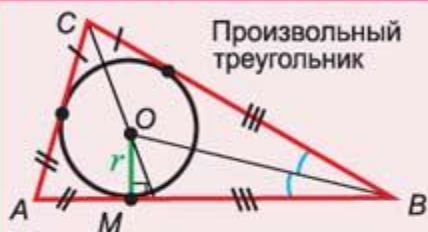
# 3

## ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК

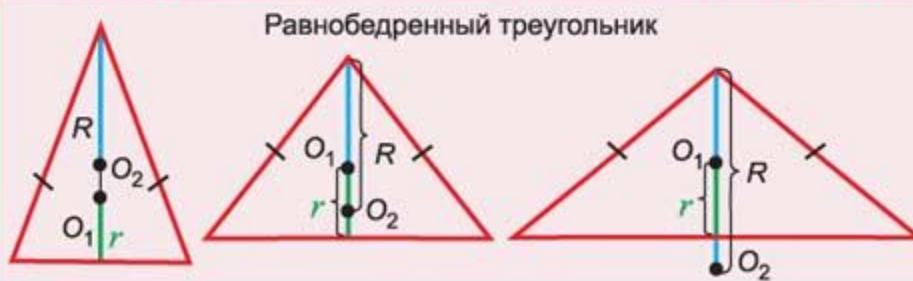


$AB, BC, AC$  – касательные  
 Отрезки касательных равны:  
 $AM = AK, BM = BP, CP = CK$   
 $OM = OK = OP = r$   
 $AO, BO, CO$  – биссектрисы углов

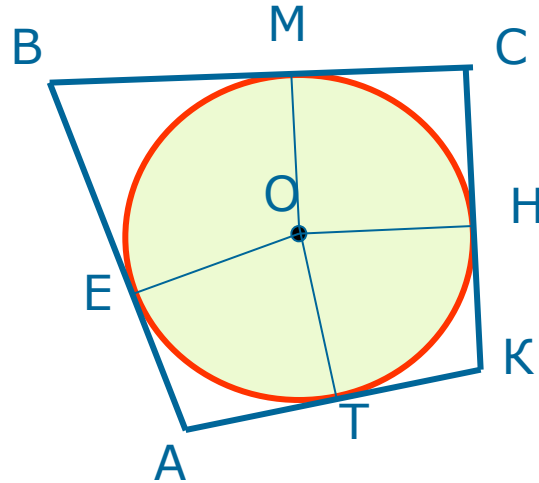
### ПОЛОЖЕНИЕ ЦЕНТРА ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ



### ЦЕНТРЫ И РАДИУСЫ ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТЕЙ



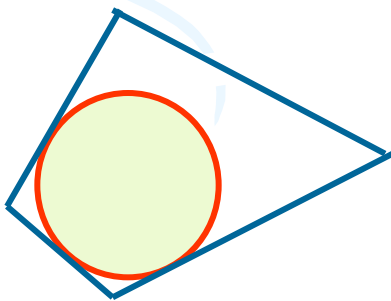
# Окружность, вписанная в четырёхугольник



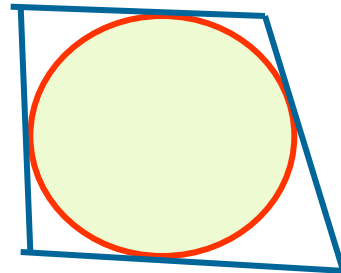
Определение: **окружность называется вписанной в четырёхугольник, если все стороны четырёхугольника касаются её.**

На каком рисунке окружность вписана в четырёхугольник:

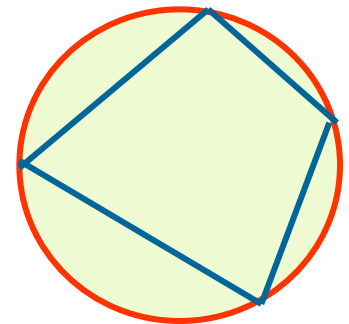
1)



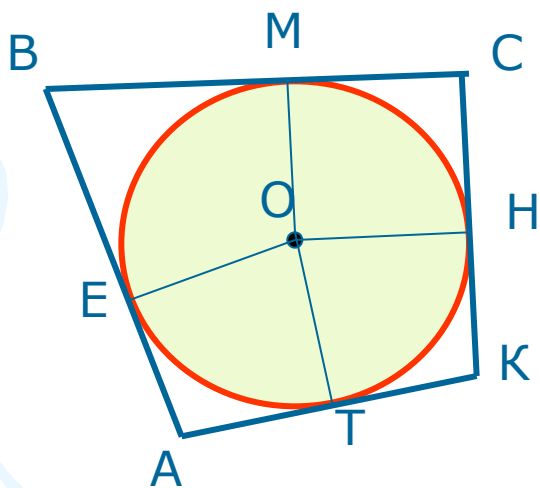
2)



3)



Теорема: **если в четырёхугольник вписана окружность, то суммы противоположных сторон четырёхугольника равны** ( в любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны).

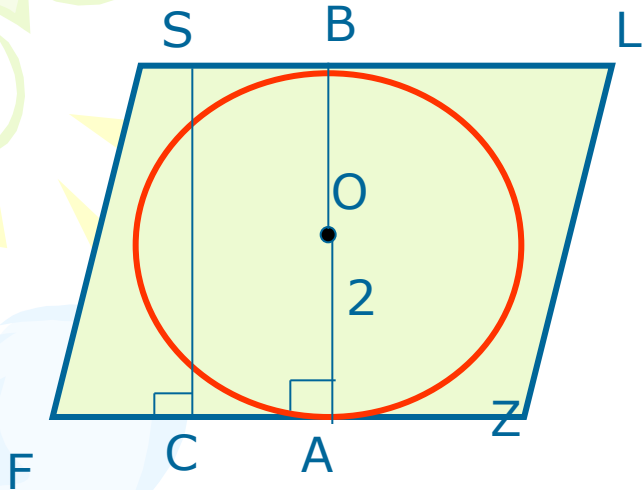


$$AB + CK = BC + AK.$$

Обратная теорема: **если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.**

( доказательство – в учебнике № 724 )

Задача: в ромб, острый угол которого  $60^\circ$ , вписана окружность, радиус которой равен 2 см. Найти периметр ромба.



Дано: Окр.(O; 2 см) вписана в ромб FSLZ,  $\angle F = 60^\circ$ .

Найти:  $P_{FSLZ}$

Решение:

Т. к. окружность вписана в ромб, то стороны ромба касаются окружности, значит,  $AB \perp FZ$ ,  $AB = 2r = 4$  см – диаметр.

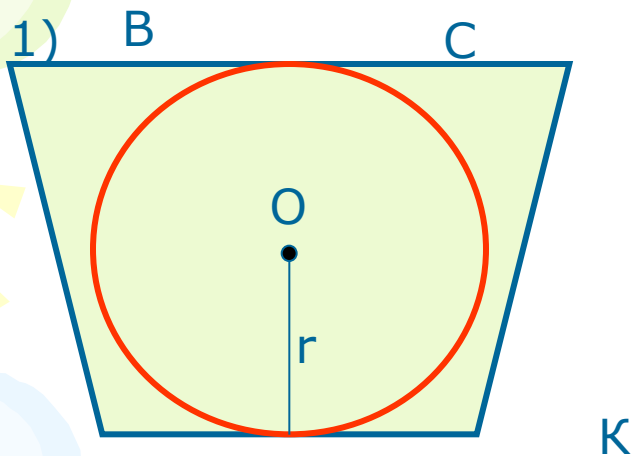
Проведём  $SC \perp FZ$ ,  $SC = AB$  (как перпендикуляры между параллельными прямыми),  $SC = 4$  см

$$\triangle FSC \text{ – прямоугольный, } \sin F = \frac{SC}{FS}; \sin 60^\circ = \frac{4}{FS}; \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{FS}; FS = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$P_{FSLZ} = 4FS = 4 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ (см).}$$

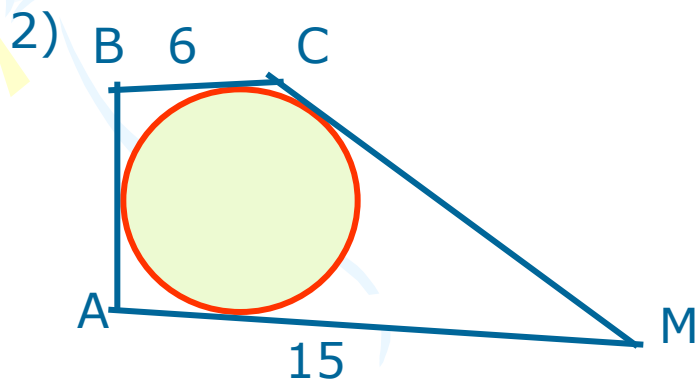
Ответ:  $\frac{32\sqrt{3}}{3}$  см

# Реши задачи



Дано: Окр.( $O; r$ ) вписана в  $ABCK$ ,  
 $P_{ABCK} = 10$

Найти:  $BC + AK$



Дано:  $ABCM$  описан около Окр.( $O; r$ )  
 $BC = 6$ ,  $AM = 15$ ,

$$CM = 2 AB$$

Найти:  $AB$ ,  $CM$