



# **Введение в математическую логику и теорию алгоритмов**

Лекция 2

Алексей Львович Семенов

# План

- Аксиомы теории множеств (повт.)
- Трудности с полнотой
- Логика высказываний. Синтаксис и семантика

# Аксиомы теории множеств (повт.)

## Существование множеств

- $\exists x \forall y \neg (y \in x)$

[Аксиома пустого множества]

- $\forall u \forall v \exists s \forall w (w \in s \equiv (w = u \vee w = v))$

[Аксиома пары]

- Пример:  $\{\emptyset\}$  – непустое множество.

- Существование объединения множества:

$$U\{\{1,2,4\},\{4,5\},\{8,7,\{9\}\}\} = \{1,2,4,5,8,7,\{9\}\}.$$

# Построение натуральных чисел (повт.)

Один из способов

- Построение каждого отдельного числа:
  - 0 – это  $\emptyset$
  - 1 – это  $\{0\}$
  - 2 – это  $\{0,1\} = \{0,\{0\}\}$
  - .....Операция  $S(x) = x \cup \{x\}$
- Существование множества всех натуральных чисел – аксиома.
- Задача. Написать аксиому существования натуральных чисел.

# Какие еще аксиомы нужны? (повт.)

- Существование множества всех подмножеств данного множества:

$\forall u \exists s \forall v (\forall w (w \in v \rightarrow w \in u) \equiv v \in s)$  [Аксиома степени]

Множество всех подмножеств множества  $u$  можно отождествлять с  $\mathbf{B}^u$ .

- Что нужно для существования множества действительных чисел?
- Что нужно для доказательства свойств («аксиом») действительных чисел?

# Пределы расширения

- Существует множество всех объектов с данным свойством – Аксиома?
- Для каждого свойства  $\Phi(x)$  добавить аксиому:  
$$\exists s \forall v ( v \in s \equiv \Phi(v) )$$
- Можно рассмотреть только свойства, определяемые формулами.
- Формула  $\Phi(x)$ :  
 $\neg (x \in x)$  [Диагональ Рассела]
- Задача. Может ли существовать требуемое  $s$  ?
- Можно добавить:  
$$\forall u \exists s \forall v ( v \in s \equiv (v \in u \wedge \Phi(v)) )$$
  
[Аксиомы выделения, для каждой  $\Phi$ ]

# Теорема Кантора

- **Неравномощность множества и множества всех его подмножеств**
- Д.
- Пусть  $f$  – функция, отображающая множество  $A$  на множество всех его подмножеств. Будем писать  $f(x) = y$  вместо  $\langle x; y \rangle \in f$ .
- Формула  $\Phi(x)$  :  
$$\exists y (f(x) = y \wedge \neg (x \in y)).$$
- Аксиома выделения дает  $B \subset A$ :  
$$\forall x (x \in B \equiv (x \in A \wedge \exists y (f(x) = y \wedge \neg (x \in y)))).$$
- По предположению  $f(b) = B$  для некоторого  $b \in A$ .
- $b \in B \equiv (b \in A \wedge \exists y (f(b) = y \wedge \neg (b \in y)))$ .
- Для этих  $b, B$  левая часть эквивалентности истинна, а правая – нет ( $y$  должно совпадать с  $B \dots$ ).
- Противоречие.

# Границы математики

- Диагональ Рассела – противоречие.
- Диагональ Кантора – теорема.
- Множество действительных чисел не равномощно множеству натуральных.
- Существует ли бесконечное множество действительных чисел, не равномощное ни всему множеству действительных чисел, ни множеству натуральных чисел?
- Кантор считал, что нет (Гипотеза Континуума) – содержание Первой Проблемы Гильберта.
- Гедель доказал в 1940 году, что Гипотезу Континуума нельзя опровергнуть: она не приводит к противоречию (если теория множеств без нее – не противоречива).
- Пол Кээн (02.04.1934 – 23.03.2007) доказал в 1964 году, что Гипотезу Континуума нельзя доказать, если принять естественную систему аксиом о множествах.

# Геометрия. Пятый постулат

- Через точку, лежащую вне данной прямой, можно провести не более одной прямой, не пересекающейся с данной.
- «И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, [в сумме]меньшие двух прямых, то **продолженные неограниченно** эти прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.»
- Попытки доказательства: привести к противоречию отрицание.
- Николай Иванович Лобачевский  
(20.11.1792 — 12.02.1856) пришел к убеждению: если к геометрии Евклида добавить утверждение о существовании нескольких прямых, проведенных через одну точку и параллельных данной, то противоречия не возникнет, 1829 г.  
«О началах геометрии» —



# Геометрия. Пятый постулат

- Янош Бойяи (15.12.1802 — 27.01.1860) Результат был опубликован в книге его отца в 1832 году.
- Отец Бойяи привлек внимание Карла Фридриха Гаусса (30.4.1777 — 23.02.1855) к этой публикации. Гаусс – давно знал!
- Доказательство утверждения Лобачевского получено Феликсом Клейном (25.4.1849 - 22.6.1925) в 1871 году.
- Принципиально выдвигание и отстаивание гипотезы известным ученым – Лобачевским.



# Математика. Программа Гильберта

- Гипотеза Континуума – не поправимый случай, а неизбежная ситуация
- Гедель: полная и не противоречивая математика невозможна.

# Задачи нашего курса

- Построить систему доказательств
- Построить систему аксиом теории множеств
- Изучить полноту и непротиворечивость для построенной системы или ее частей
- Будут рассмотрены произвольные системы доказательства, и еще более общие математические объекты – исчисления
- Вычислимость...
- В наших рассуждениях мы (как и других разделах математики) используем неформальную теорию множеств

# Логика высказываний

Первый из логических языков нашего курса.

- Последовательность имен высказываний

$A_0, A_1, A_2, \dots$

- Определение формулы (логики высказываний).

1. Логические константы 0 и 1 – формулы.

2. Если  $A$  – имя высказывания, то  $A$  – формула.

3. Если  $\Phi, \Psi$  – формулы,  $\tau$  – связка:  $\wedge$  (конъюнкция),  
 $\vee$  (дизъюнкция),  $\rightarrow$  (импликация),  $\equiv$  (эквивалентность),  
то  $\neg\Phi, (\Phi \tau \Psi)$  – формулы.

- **Индуктивное определение (построение)**

- «Порочный круг» (цикл в определении – *circulus in definiendo*) –

**определение понятия через его же само?**

# Круг в определении

- «СЕПУЛЬКИ — важный элемент цивилизации ардритов (см.) с планеты Энтеропия (см.). См. СЕПУЛЬКАРИИ».
- «СЕПУЛЬКАРИИ — устройства для сепуления (см.)».
- «СЕПУЛЕНИЕ — занятие ардритов (см.) с планеты Энтеропия (см.). См. СЕПУЛЬКИ».
- **Лем С. «Звёздные дневники Ийона Тихого. Путешествие четырнадцатое»**



# Синтаксис логики высказываний.

- **Примеры формул:**

- $A_2, (A_1 \vee A_0), \neg A_1$

- $((A_1 \vee A_0) \equiv \neg A_1),$

- **Как формула строилась:**

- $A_1$

- $A_0$

- $(A_1 \vee A_0)$

- $A_1$

- $\neg A_1$

- $((A_1 \vee A_0) \equiv \neg A_1)$

- **Задача.** Как проверить, является ли слово формулой?

- Например, формулы ли:  $)))A_0, ((A_1 \wedge A_2)) ?$

# Логика высказываний

- Семантика.
- $V = \{0,1\}$ .
- Семантика связок (таблица была):

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \equiv B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

# Логика высказываний. Семантика

- $B^N$  - множество бесконечных последовательностей из 0 и 1.
- Пояснение:  
Выбор элемента  $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots \in B^N$  означает фиксацию значений имен высказываний  $A_0, A_1, \dots, A_i, \dots$ .
- Всякий элемент  $\alpha \in B^N$  – интерпретация.
- Фиксируем интерпретацию  $\alpha$ .
- Замечание. Нам удобно задавать значения сразу для всех имен высказываний.

# Логика высказываний. Семантика

Значение формулы при данной интерпретации  $\alpha \in V^N$ .

**Вычисление индукцией по построению:**

1. Значением логической константы является она сама.
2. Значением имени высказывания  $A_i$  является  $\alpha_i$ .
3. Значением:
  - формулы  $(\neg\Phi)$  является отрицание значения  $\Phi$ , т.е.  
 **$Зн(\neg\Phi) = 1 - Зн\Phi$ .**
  - формулы  $(\Phi\tau\Psi)$ , где  $\tau \in \{\rightarrow, \wedge, \vee, \equiv\}$  является результат применения  $\tau$  к значениям формул  $\Phi, \Psi$ .

Значение формулы – функция  $V^N \rightarrow V$ .

Наибольший номер имени высказывания в формуле равен  $n - 1$ .

формула задает функцию  $V^n \rightarrow V$ .

# Логика высказываний. Семантика

- Нахождение значения
- Задача. Почему процесс заканчивается?
- Задача. Почему результат процесса однозначно определен? (однозначность анализа)
- Может ли быть, например:

$$\Phi = (\Phi_1 \wedge \Psi_1) = (\Phi_2 \rightarrow \Psi_2)?$$

# Булевы функции

- Функции  $B^n \rightarrow B$ .
- Формула задает функцию  $B^n \rightarrow B$ .
- **Задача.** Сколько существует функций:  $B^n \rightarrow B$  ?
- **Задача.** Всякую ли функцию можно задать подходящей формулой?

# Лишние скобки

- Задача. Придумать разумные правила опускания и восстановления скобок.

# Семантика

## Терминология и обозначения для формул

- Обозначение:  $\alpha \models \Phi$  – значение  $\Phi$  при интерпретации  $\alpha$  равно 1.

$\Phi$  выполнена в (при) интерпретации  $\alpha$ .

- Обозначение:  $\models \Phi$  – значение  $\Phi$  при любой интерпретации равно 1 ( $\Phi$  всегда истинно). Такие  $\Phi$  называются тавтологиями.

- $\Phi$  ложные (получающие значение 0) при любой интерпретации называются противоречиями.

- $\Phi$ , для которой существует интерпретация, в которой она истинна, называется выполнимой.

# Семантика

## Терминология и обозначения для множеств формул

- Множество формул совместно, если существует интерпретация, при которой все его формулы истинны.
- Множество формул противоречиво, если не существует интерпретации, при которой все его формулы истинны.

Пусть  $\Delta$  – множество формул.

- Обозначение:  $\Delta \models \Phi$  – при всякой интерпретации значение  $\Phi$  равно 1, если значение всех формул из  $\Delta$  в той же интерпретации – это 1.  $\Phi$  следует из  $\Delta$ .

# Примеры и применения. Распространенные способы рассуждения

- Пусть  $\alpha \models (\Phi \rightarrow \Psi)$  и  $\alpha \models \Phi$ . Тогда  $\alpha \models \Psi$ .
- Всюду вычеркнем  $\alpha$  (то есть – «при всех  $\alpha$ » ) и запишем:

$$\frac{\models \Phi, \models (\Phi \rightarrow \Psi)}{\models \Psi} \quad \text{– Modus ponens («правило вывода»)}$$

- То есть, если в каком-то рассуждении мы получили  $\Phi$  и  $\Phi \rightarrow \Psi$ , то можем получить  $\Psi$ .

# Распространенные способы рассуждения

- $\neg\Phi \vdash 0$   
-----  
 $\vdash \Phi$  – доказательство от противного
- $\neg\Phi \rightarrow \neg\Psi \vdash \Psi \rightarrow \Phi$  – контрапозиция
- $(\Psi \rightarrow \Phi), (\neg\Psi \rightarrow \Phi) \vdash \Phi$  – разбор случаев
- $(\Phi \rightarrow \Psi), (\Psi \rightarrow \Phi) \vdash (\Phi \equiv \Psi)$  – доказательство эквивалентности

# Теорема компактности

- О. Компактное пространство: Из любого покрытия открытыми можно выбрать конечное подпокрытие.
- Т. Топология: Компактное пространство. Семейство замкнутых множеств. Если всякое конечное подсемейство имеет непустое пересечение, то и пересечение всех множеств семейства не пусто.
- Т. Логика. Семейство формул. Если всякое конечное подсемейство выполнимо, то и все семейство выполнимо.
- **Задача.** Доказать Теоремы компактности в топологии (для множеств на прямой, например) и

# Логика высказываний

- Построение **сложных** высказываний из **простых**
- Для **простых** – существенна только их **истинность**.
- О чем высказывания – не существенно и **не видно**.
- Значение сложного высказывания определяется значением его частей. В конце концов – «**атомных**» высказываний.