# Введение в теорию множеств

## 1. Основные определения, терминология

Под *множеством A* мы понимаем совокупность объектов произвольной природы, объединенных общим свойством *P(x)*.

**Обозначение**

$$A = \{x | P(x)\}.$$

**Читается:**

*"A есть множество x, таких, что P(x)".*

**Пример 1**

$$B = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}.$$

Легко заметить, что множество состоит из двух чисел: 1 и 2.

## Определение 1

Множество $A$ называется *подмножеством* $B$, если для любого $x$ ( $x \in A \to x \in B$ )

**Обозначение:**

$$A \subseteq B$$

Другими словами, символ "$A \subseteq B$" есть сокращение для высказывания $\left(x \in A \to x \in B\right)$

**Теорема 2**

Для любых множеств *A, B, C* верно следующее:

а) $A \subseteq A$ ;

б) $A \subseteq B$ и $B \subseteq C \to A \subseteq C$ .

## Доказательство

Для доказательства а) надо убедиться в истинности высказывания $(x \in A \to x \in A)$ , но оно очевидным образом истинно, так как представляет собой импликацию, в которой посылка и заключение совпадают.

Для доказательства б) надо убедится в истинности высказывания

$$(x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in C) \to (x \in A \to x \in C)$$

Обозначим: "$x \in A$" через U, "$x \in B$" через V , "$x \in C$" через . Тогда надо убедиться в истинности высказывания .

Упростим это высказывание:

$$F = (U \to V) \wedge (V \to Z) \to (U \to Z) =$$

$$= (\overline{U} \cdot \overline{V} \vee \overline{U} \cdot Z \vee VZ) \to (\overline{U} \vee Z) =$$

$$= \overline{\overline{U}\,\overline{V} \vee \overline{U} Z \vee VZ} \vee \overline{U} \vee Z =$$

$$= (U \vee V)(U \vee \overline{Z})(\overline{V} \vee \overline{Z}) \vee \overline{U} \vee Z =$$

$$= (U \vee VU \vee U\overline{Z} \vee V\overline{Z})(\overline{V} \vee \overline{Z}) \vee \overline{U} \vee Z =$$

$$= (U \vee V\overline{Z})(\overline{V} \vee \overline{Z}) \vee \overline{U} \vee Z =$$

$$= U\overline{V} \vee U\overline{Z} \vee V\overline{Z} \vee \overline{U} \vee Z =$$

$$= (U\overline{V} \vee \overline{U}) \vee (U\overline{Z} \vee Z) \vee V\overline{Z} =$$

$$= \overline{V} \vee \overline{U} \vee U \vee Z \vee V\overline{Z} = 1.$$

Конечно, теорема 2 интуитивно очевидна, но если мы, кроме очевидности, стремимся еще и к строгости, то приходится проделывать непростые логические вычисления. Доказательство этой теоремы является неплохим упражнением по алгебре высказываний.

## Определение 3

Множества $A$ и $B$ называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов $(A=B)$. Другими словами, обозначение $A=B$ служит сокращением для высказывания

$$(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Если множество $A$ конечно и состоит из элементов $a1, a2, ..., an$, то пишем:

$A=\{a1, a2, ..., an\}$.

Иногда подобное обозначение распространяется и на некоторые бесконечные множества. Так,

$N=\{1,2,3,...,n,...\}$

$Z=\{...,-n,...,-2,-1,0,1,2,...,n,...\}$.

## Вопрос

Можно ли подобным образом записать множество Q рациональных чисел? А множество R вещественных чисел?

Вернемся к определению равенства множеств

## Пример 1

*{a, b, c, d} = {c, d, a, b}.*

## Пример 2

*{a, b, c, d} {a, c, b}.*

## Пример 3

*{x|x2-3x+2=0} = {1,2}.*

## Теорема 4

Для любых множеств $A$ и $B$ $A=B$ тогда и только тогда, когда

$A \subseteq B$ и $B \subseteq A$

## Доказательство

Доказательство этого факта основано на том, что эквивалентность $X \leftrightarrow Y$ равносильна конъюнкции двух импликаций $(X \to Y) \wedge (Y \to X)$.

Таким образом, для того, чтобы доказать равенство множеств $A$ и $B$, надо доказать два включения: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, что часто используется для доказательства теоретико-множественных равенств.

**Определение 5**

$A \subset B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $A \neq B$.

**Теорема 6**

Для любых множеств $A, B, C,$ если $A \subseteq B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$

**Доказательство**

Доказать самостоятельно.

**Определение 7**

Множество называется *пустым*, если оно не содержит ни одного элемента, то есть $x$ не принадлежит этому множеству (для любого $x$). Обозначение: $\varnothing$.

Отметим, что понятия элемента и множества довольно условны. Один и тот же объект в одной ситуации может выступать как элемент, а в другой – как множество.

Например, *N, Z, Q, R* – числовые множества, но в множестве *A={N, Z, Q, R}* каждое из них является элементом четырехэлементного множества *A*. В этом отношении достаточно привлекательным является множество $x = \{\varnothing\}$. Отметим, что $\varnothing \in X$ и $\varnothing \subseteq X$ одновременно. В связи с этим возникает следующая

**Задача 1**

Существует ли объект $X$, такой, что $X \in X$?

## 2. Операции объединения и пересечения

### Определение 1

*Объединением* двух множеств $A$ и $B$ называется множество

$$A \cup B = \left\{ x \middle| x \in A \vee x \in B \right\}.$$

Другими словами, $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$ (теоретико-множественной операции *"объединение"* соответствует логическая операция *"или"*).

### Пример

Пусть $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,4,6,8\}$, тогда $A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$.

### Теорема 2

Пусть $A$, $B$, $C$ – произвольные множества. Тогда:

а) $A \cup A = A$ – *идемпотентность* объединения;

б) $A \cup B = B \cup A$ – *коммутативность* объединения;

в) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – *ассоциативность* объединения;

г) $A \cup \varnothing = A$;

д) $A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = B = \varnothing$

## Доказательство

а) Возьмем

$$x \in A \cup A \leftrightarrow x \in A \vee x \in A \leftrightarrow x \in A.$$

При последнем переходе мы воспользовались идемпотентностью дизъюнкции. Таким образом, идемпотентность объединения в теории множеств есть следствие идемпотентности дизъюнкции в алгебре высказываний.

б) Возьмем

$$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B \leftrightarrow x \in B \vee$$
$$\vee\ x \in A \leftrightarrow x \in B \cup A$$

Мы доказали, что $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in B \cup A$.

Следовательно, $A \cup B = B \cup A$.

в) Возьмем

$$x \in (A \cup B) \cup C \leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$$

(ассоциативность дизъюнкции). Мы доказали, что

$$x \in (A \cup B) \cup C \leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$$

Следовательно, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

г) Возьмем

$$x \in A \cup \varnothing \leftrightarrow x \in A \vee x \in \varnothing \leftrightarrow x \in A,$$

так как высказывание $x \in \varnothing$ тождественно ложно.

Следовательно, $A \cup \varnothing = A$.

д) Если $A = B = \varnothing$, то $A \cup B = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$.

В другую сторону. Пусть $A \cup B = \varnothing$ То есть, $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in \varnothing$. Значит высказывание является тождественно ложным. С другой стороны, $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$, а дизъюнкция двух высказываний ложна тогда и только тогда, когда ложны оба эти высказывания. Следовательно, $x \in A \leftrightarrow x \in \varnothing$ и $x \in B \leftrightarrow x \in \varnothing$ а значит $A = B = \varnothing$.

## Теорема 3

Пусть *A, B* – произвольные множества, тогда:

а) $A \subseteq A \cup B$ ;

б) $A = A \cup B \leftrightarrow B \subseteq A$ .

## Доказательство

а) Возьмем

$$x \in A \to x \in A \vee x \in B$$

(свойство импликации) $\to x \in A \cup B$ .

Итак, $A \subseteq A \cup B$ .

б) Пусть $A = A \cup B$ . Докажем, что $B \subseteq A$ . Возьмем

$$x \in B \to x \in A \cup B \to x \in A \; .$$

Итак, мы доказали, что $x \in B \to x \in A$ , то есть $B \subseteq A$ .

Теперь пусть $B \subseteq A$. Чтобы доказать равенство $A = A \cup B$, надо доказать два включения: $A \subseteq A \cup B$ и $A \cup B \subseteq A$.

Первое включение – есть пункт а).

Докажем второе включение. Возьмем

$$x \in A \cup B \to x \in A \vee x \in B \to x \in A \vee x \in A \text{ ,}$$

так как $B \subseteq A$, $\to x \in A$.

Следовательно, $A \cup B \subseteq A$.

Теорема доказана.

**Определение 4**

*Пересечением* множеств $A$ и $B$ называется множество

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\} .$$

**Пример**

Пусть $A=\{1,2,4,7,8,9\}$, $B=\{1,3,5,7,8,10\}$, тогда

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{1,7,8\}.$$

**Теорема 5**

Пусть *A, B, C* – произвольные множества, тогда:

а) $A \cap A = A$ - *идемпотентность* пересечения;

б) $A \cap B = B \cap A$ - *коммутативность* пересечения;

в) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ - *ассоциативность* пересечения;

г) $A \cap \varnothing = \varnothing$ .

**Доказательство**

а) Возьмем

$$x \in A \cap A \leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \leftrightarrow x \in A .$$

Следовательно,

$$A \cap A = A .$$

б) Возьмем

$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \leftrightarrow x \in B \cap A .$$

Следовательно,

$$A \cap B = B \cap A .$$

в) Возьмем

$$x \in (A \cap B) \cap C \leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \in C \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cap C \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$$

Следовательно,

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \cdot$$

г) $x \in A \cap \varnothing \leftrightarrow x \in A \wedge x \in \varnothing \leftrightarrow x \in \varnothing$, так как $x \in \varnothing$ – тождественно ложное высказывание.

## Теорема 6

Пусть *A, B* – произвольные множества. Тогда:

а) $A \cap B \subseteq A$ ;

б) $A \cap B = A \leftrightarrow A \subseteq B$ .

**Доказательство**

а) Возьмем

$$x \in A \cap B \to x \in A \wedge x \in B \to x \in A$$ ,

то есть $A \cap B \subseteq A$ .

б) Пусть $A \cap B \subseteq A$ . Возьмем

$$x \in A \to x \in A \cap B \to x \in A \wedge x \in B \to x \in B$$,

то есть $A \subseteq B$ . Теперь пусть $A \subseteq B$. Включение $A \cap B \subseteq A$ уже доказано.

Докажем включение в другую сторону.

Возьмем

$$x \in A \to x \in A \wedge x \in B$$ ,

так как $A \subseteq B$' $\to x \in A \cap B$ .

Следовательно, $A \subseteq A \cap B$ , поэтому $A = A \cap B$ .

## Теорема 7 (дистрибутивные законы)

Пусть *A, B, C* – произвольные множества, тогда:

а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – дистрибутивность пересечения относительно объединения;

б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – дистрибутивность объединения относительно пересечения.

## Доказательство

а) Возьмем

$$x \in A \cap (B \cup C) \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

## 3. Разность множеств, дополнение, симметрическая разность

### Определение 1

*Разностью* множеств называется множество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

### Пример

Пусть $A=\{1,3,4,7,8,9,10\}$, $B=\{2,3,4,5,6,7\}$, тогда $A\setminus B=\{1,8,9,10\}$, $B\setminus A=\{2,5,6\}$.

### Теорема 2

Пусть $A$, $B$, $C$ – произвольные множества, тогда:

а) $A \setminus A = \varnothing$;

б) $A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B$;

в) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

г) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

### Доказательство

а) Возьмем $x \in A \setminus A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A$ тождественно ложное высказывание. Оно равносильно другому тождественно ложному высказыванию , поэтому $A \setminus A = \varnothing$.

б) Пусть $A \setminus B = \varnothing$ . Возьмем $x \in A$ , так как $A \setminus B = \varnothing$ , то $x \notin A \setminus B$ , значит $x \in B$ , то есть $A \subseteq B$ .

Теперь пусть $A \subseteq B$ . Возьмем $x \in A \setminus B \leftrightarrow x \in A \wedge$

$$\wedge x \notin B \to x \in B \wedge x \notin B \to x \in \varnothing$$

, то есть $A \setminus B = \varnothing$ .

в) Возьмем

$$x \in \left(A \cup B\right) \setminus C \leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(x \in A \vee x \in B\right) \wedge x \notin C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(x \in A \wedge x \notin C\right) \vee \left(x \in B \wedge x \notin C\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \setminus C \vee x \in B \setminus C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in \left(A \setminus C\right) \cup \left(B \setminus C\right)$$

г) Возьмем

$$x \in A \setminus \left(B \,\square\, C\right) \leftrightarrow x \in A \wedge \overline{x \in B \cup C} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \wedge \overline{x \in B \vee x \in C} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \leftrightarrow \left(x \in A \setminus B\right) \wedge x \notin C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in \left(A \setminus B\right) \setminus C$$

**Теорема 3 (законы Моргана)**

а) $A \setminus \left(B \cup C\right) = \left(A \setminus B\right) \cap \left(A \setminus B\right)$ ;

б) $A \setminus \left(B \cap C\right) = \left(A \setminus B\right) \cup \left(A \setminus B\right)$ .

**Доказательство**

а) Возьмем

$$x \in A \setminus \left(B \cap C\right) \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \cup C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \wedge \left(x \notin B \wedge x \notin C\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(x \in A \wedge x \notin B\right) \wedge \left(x \in A \wedge x \notin C\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \setminus B \wedge x \in A \setminus C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in \left(A \setminus B\right) \cap \left(A \setminus C\right)$$

б) Возьмем

$$x \in A \setminus (B \cap C) \leftrightarrow x \in A \wedge \overline{x \in B \cap C} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \wedge \overline{x \in B \wedge x \in C} \leftrightarrow$$

$$x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Множество $U$ назовем *"универсальным"*, если оно содержит все элементы и все множества являются его подмножествами. Понятие абсолютно универсального множества, то есть множества, для которого истинно высказывание *"для любого x "*, несмотря на кажущуюся его простоту, мгновенно приводит к так называемым теоретико-множественным парадоксам. Поэтому понятие *"универсального множества"* у нас будет зависеть от круга задач, которые мы рассматриваем.

Довольно часто под универсальным множеством понимают множество $R$ — множество вещественных чисел или множество $C$ – комплексных чисел. Возможны и другие примеры. Всегда в контексте необходимо оговорить, что мы понимаем под универсальным множеством $U$.

**Определение 4**

Пусть $U$ – универсальное множество и . *Дополнением* $A$ в $U$ (или просто *дополнением* $A$) называется множество .

**Пример**

Если $U$ – множество вещественных чисел и $A$ – множество рациональных чисел, то – множество иррациональных чисел

**Теорема 5**

а) $\overline{\varnothing} = U$ ;

б) $\overline{U} = \varnothing$ ;

в) $\overline{\overline{A}} = A$

**Доказательство**

Доказать самостоятельно

**Теорема 6 (законы Моргана для дополнений)**

а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.