

Введение в теорию множеств

1. Основные определения, терминология

Под *множеством* A мы понимаем совокупность объектов произвольной природы, объединенных общим свойством $P(x)$.

Обозначение

$$A = \{x | P(x)\}.$$

Читается:

"A есть множество x , таких, что $P(x)$ ".

Пример 1

$$B = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}.$$

Легко заметить, что множество состоит из двух чисел: 1 и 2.

Определение 1

Множество A называется *подмножеством* B , если для любого x ($x \in A \rightarrow x \in B$)

Обозначение:

$$A \subseteq B$$

Другими словами, символ " $A \subseteq B$ " есть сокращение для высказывания ($x \in A \rightarrow x \in B$)

Теорема 2

Для любых множеств A, B, C верно следующее:

- а) $A \subseteq A$;
- б) $A \subseteq B$ и $B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$.

Доказательство

Для доказательства а) надо убедиться в истинности высказывания $(x \in A \rightarrow x \in A)$, но оно очевидным образом истинно, так как представляет собой импликацию, в которой посылка и заключение совпадают.

Для доказательства б) надо убедиться в истинности высказывания

$$(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in C) \rightarrow (x \in A \rightarrow x \in C)$$

Обозначим: " $x \in A$ " через U , " $x \in B$ " через V , " $x \in C$ " через Z .

Тогда надо убедиться в истинности высказывания.

Упростим это высказывание:

$$\begin{aligned} F &= (U \rightarrow V) \wedge (V \rightarrow Z) \rightarrow (U \rightarrow Z) = \\ &= (\bar{U} \cdot \bar{V} \vee \bar{U} \cdot Z \vee VZ) \rightarrow (\bar{U} \vee Z) = \\ &= \overline{\bar{U}\bar{V} \vee \bar{U}Z \vee VZ} \vee \bar{U} \vee Z = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (U \vee V)(U \vee \bar{Z})(\bar{V} \vee \bar{Z}) \vee \bar{U} \vee Z = \\
&= (U \vee VU \vee U\bar{Z} \vee V\bar{Z})(\bar{V} \vee \bar{Z}) \vee \bar{U} \vee Z = \\
&= (U \vee V\bar{Z})(\bar{V} \vee \bar{Z}) \vee \bar{U} \vee Z = \\
&= U\bar{V} \vee U\bar{Z} \vee V\bar{Z} \vee \bar{U} \vee Z = \\
&= (U\bar{V} \vee \bar{U}) \vee (U\bar{Z} \vee Z) \vee V\bar{Z} = \\
&= \bar{V} \vee \bar{U} \vee U \vee Z \vee V\bar{Z} = 1.
\end{aligned}$$

Конечно, теорема 2 интуитивно очевидна, но если мы, кроме очевидности, стремимся еще и к строгости, то приходится проделывать непростые логические вычисления. Доказательство этой теоремы является неплохим упражнением по алгебре высказываний.

Определение 3

Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов ($A=B$). Другими словами, обозначение $A=B$ служит сокращением для высказывания $(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

Если множество A конечно и состоит из элементов a_1, a_2, \dots, a_n , то пишем:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Иногда подобное обозначение распространяется и на некоторые бесконечные множества. Так,

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

$$Z = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

Вопрос

Можно ли подобным образом записать множество Q рациональных чисел? А множество R вещественных чисел?

Вернемся к определению равенства множеств

Пример 1

$$\{a, b, c, d\} = \{c, d, a, b\}.$$

Пример 2

$$\{a, b, c, d\} \neq \{a, c, b\}.$$

Пример 3

$$\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}.$$

Теорема 4

Для любых множеств A и B $A=B$ тогда и только тогда, когда

$$A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A$$

Доказательство

Доказательство этого факта основано на том, что эквивалентность $X \leftrightarrow Y$ равносильна конъюнкции двух импликаций $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$.

Таким образом, для того, чтобы доказать равенство множеств A и B , надо доказать два включения: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, что часто используется для доказательства теоретико-множественных равенств.

Определение 5

$A \subset B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $A \neq B$.

Теорема 6

Для любых множеств A, B, C , если $A \subseteq B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$

Доказательство

Доказать самостоятельно.

Определение 7

Множество называется *пустым*, если оно не содержит ни одного элемента, то есть x не принадлежит этому множеству (для любого x). Обозначение: \emptyset .

Отметим, что понятия элемента и множества довольно условны.

Один и тот же объект в одной ситуации может выступать как элемент, а в другой – как множество.

Например, N, Z, Q, R – числовые множества, но в множестве $A = \{N, Z, Q, R\}$ каждое из них является элементом четырехэлементного множества A . В этом отношении достаточно привлекательным является множество $x = \{\emptyset\}$. Отметим, что $\emptyset \in X$ и $\emptyset \subseteq X$ одновременно. В связи с этим возникает следующая

Задача 1

Существует ли объект X , такой, что $X \in X$?

2. Операции объединения и пересечения

Определение 1

Объединением двух множеств A и B называется множество

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Другими словами, $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$ (теоретико-множественной операции "объединение" соответствует логическая операция "или").

Пример

Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$.

Теорема 2

Пусть A, B, C – произвольные множества. Тогда:

- а) $A \cup A = A$ – идемпотентность объединения;
- б) $A \cup B = B \cup A$ – коммутативность объединения;
- в) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – ассоциативность объединения;
- г) $A \cup \emptyset = A$;
- д) $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = B = \emptyset$

Доказательство

а) Возьмем

$$x \in A \cup A \leftrightarrow x \in A \vee x \in A \leftrightarrow x \in A.$$

При последнем переходе мы воспользовались идемпотентностью дизъюнкции. Таким образом, идемпотентность объединения в теории множеств есть следствие идемпотентности дизъюнкции в алгебре высказываний.

б) Возьмем

$$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B \leftrightarrow x \in B \vee \\ \vee x \in A \leftrightarrow x \in B \cup A$$

Мы доказали, что $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in B \cup A$.

Следовательно, $A \cup B = B \cup A$.

в) Возьмем

$$x \in (A \cup B) \cup C \leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$$

(ассоциативность дизъюнкции). Мы доказали, что

$$x \in (A \cup B) \cup C \leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$$

Следовательно, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

г) Возьмем

$$x \in A \cup \emptyset \leftrightarrow x \in A \vee x \in \emptyset \leftrightarrow x \in A ,$$

так как высказывание $x \in \emptyset$ тождественно ложно.

Следовательно, $A \cup \emptyset = A$.

д) Если $A = B = \emptyset$, то $A \cup B = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

В другую сторону. Пусть $A \cup B = \emptyset$ То есть, $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in \emptyset$.

Значит высказывание является тождественно ложным. С

другой стороны, $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$, а дизъюнкция

двух высказываний ложна тогда и только тогда, когда ложны

оба эти высказывания. Следовательно, $x \in A \overset{\text{И}}{\leftrightarrow} x \in \emptyset$

$x \in B \leftrightarrow x \in \emptyset$ а значит $A = B = \emptyset$.

Теорема 3

Пусть A, B – произвольные множества, тогда:

а) $A \subseteq A \cup B$;

б) $A = A \cup B \leftrightarrow B \subseteq A$.

Доказательство

а) Возьмем

$$x \in A \rightarrow x \in A \vee x \in B$$

(свойство импликации) $\rightarrow x \in A \cup B$.

Итак, $A \subseteq A \cup B$.

б) Пусть $A = A \cup B$. Докажем, что $B \subseteq A$. Возьмем

$$x \in B \rightarrow x \in A \cup B \rightarrow x \in A$$

Итак, мы доказали, что $x \in B \rightarrow x \in A$, то есть $B \subseteq A$.

Теперь пусть $B \subseteq A$. Чтобы доказать равенство $A = A \cup B$, надо доказать два включения: $A \subseteq A \cup B$ и $A \cup B \subseteq A$.

Первое включение – есть пункт а).

Докажем второе включение. Возьмем

$$x \in A \cup B \rightarrow x \in A \vee x \in B \rightarrow x \in A \vee x \in A ,$$

так как $B \subseteq A$, $\rightarrow x \in A$.

Следовательно, $A \cup B \subseteq A$.

Теорема доказана.

Определение 4

Пересечением множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\} .$$

Пример

Пусть $A = \{1, 2, 4, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$, тогда

$$A \cap B = \{1, 7, 8\} .$$

Теорема 5

Пусть A, B, C – произвольные множества, тогда:

- а) $A \cap A = A$ - идемпотентность пересечения;
- б) $A \cap B = B \cap A$ - коммутативность пересечения;
- в) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ - ассоциативность пересечения;
- г) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Доказательство

а) Возьмем

$$x \in A \cap A \leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \leftrightarrow x \in A \quad \cdot$$

Следовательно,

$$A \cap A = A \quad \cdot$$

б) Возьмем

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \leftrightarrow x \in B \cap A \quad \cdot \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A \cap B = B \cap A .$$

в) Возьмем

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cap C &\leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \in C \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cap C \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) .$$

г) $x \in A \cap \emptyset \leftrightarrow x \in A \wedge x \in \emptyset \leftrightarrow x \in \emptyset$, так как $x \in \emptyset$ — тождественно ложное высказывание.

Теорема 6

Пусть A, B – произвольные множества. Тогда:

а) $A \cap B \subseteq A$;

$$\text{б) } A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B \quad .$$

Доказательство

а) Возьмем

$$x \in A \cap B \rightarrow x \in A \wedge x \in B \rightarrow x \in A \quad ,$$

то есть $A \cap B \subseteq A$.

б) Пусть $A \cap B \subseteq A$. Возьмем

$$x \in A \rightarrow x \in A \cap B \rightarrow x \in A \wedge x \in B \rightarrow x \in B \quad ,$$

то есть $A \subseteq B$. Теперь пусть $A \subseteq B$. Включение $A \cap B \subseteq A$ уже доказано.

Докажем включение в другую сторону.

Возьмем

$$x \in A \rightarrow x \in A \wedge x \in B \quad ,$$

так как $A \subseteq B$, $\rightarrow x \in A \cap B$.

Следовательно, $A \subseteq A \cap B$, поэтому $A = A \cap B$.

Теорема 7 (дистрибутивные законы)

Пусть A, B, C – произвольные множества, тогда:

а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – дистрибутивность пересечения относительно объединения;

б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – дистрибутивность объединения относительно пересечения.

Доказательство

а) Возьмем

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

3. Разность множеств, дополнение, симметрическая разность

Определение 1

Разностью множеств называется множество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\} \cdot$$

Пример

Пусть $A = \{1, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, тогда $A \setminus B = \{1, 8, 9, 10\}$,
 $B \setminus A = \{2, 5, 6\}$.

Теорема 2

Пусть A, B, C – произвольные множества, тогда:

- а) $A \setminus A = \emptyset$;
- б) $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$;
- в) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
- г) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Доказательство

- а) Возьмем $x \in A \setminus A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A$ тождественно ложное высказывание. Оно равносильно другому тождественно ложному высказыванию, поэтому

$$A \setminus A = \emptyset$$

б) Пусть $A \setminus B = \emptyset$. Возьмем $x \in A$, так как $A \setminus B = \emptyset$, то $x \notin A \setminus B$, значит $x \in B$, то есть $A \subseteq B$.

Теперь пусть $A \subseteq B$. Возьмем $x \in A \setminus B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \rightarrow x \in B \wedge x \notin B \rightarrow x \in \emptyset$, то есть $A \setminus B = \emptyset$.

в) Возьмем

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \setminus C &\leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin C \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow x \in A \setminus C \vee x \in B \setminus C \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \end{aligned}$$

г) Возьмем

$$x \in A \setminus (B \cap C) \leftrightarrow x \in A \wedge \overline{x \in B \cup C} \leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} & \overline{x \in A \wedge x \in B \vee x \in C} \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \leftrightarrow (x \in A \setminus B) \wedge x \notin C \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C \end{aligned}$$

Теорема 3 (законы Моргана)

а) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

б) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Доказательство

а) Возьмем

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cap C) & \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \cap C \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow x \in A \setminus B \vee x \in A \setminus C \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{aligned}$$

б) Возьмем

$$\begin{aligned}x \in A \setminus (B \cap C) &\leftrightarrow x \in A \wedge \overline{x \in B \cap C} \leftrightarrow \\&\leftrightarrow x \in A \wedge \overline{x \in B \wedge x \in C} \leftrightarrow \\&x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \leftrightarrow \\&\leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \leftrightarrow \\&\leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)\end{aligned}$$

Множество U назовем "универсальным", если оно содержит все элементы и все множества являются его подмножествами. Понятие абсолютно универсального множества, то есть множества, для которого истинно высказывание "для любого x ", несмотря на кажущуюся его простоту, мгновенно приводит к так называемым теоретико-множественным парадоксам. Поэтому понятие "универсального множества" у нас будет зависеть от круга задач, которые мы рассматриваем.

Довольно часто под универсальным множеством понимают множество R — множество вещественных чисел или множество C — комплексных чисел. Возможны и другие примеры. Всегда в контексте необходимо оговорить, что мы понимаем под универсальным множеством U .

Определение 4

Пусть U — универсальное множество и $A \subset U$. Дополнением A в U (или просто дополнением A) называется множество A^c .

Пример

Если U — множество вещественных чисел и A — множество рациональных чисел, то A^c — множество иррациональных чисел

Теорема 5

а) $\overline{\emptyset} = U$;

б) $\overline{U} = \emptyset$;

в) $\overline{A^c} = A$

Доказательство

Доказать самостоятельно

Теорема 6 (законы Моргана для дополнений)

а) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B};$

б) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} .$