

# Введение в теорию пределов

# Последовательность

• Опр. Числовой последовательностью  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется функция  $x_n = f(n)$ , заданная на множестве  $\mathbb{N}$  натуральных чисел.

Кратко обозначается  $\{x_n\}$  или  $x_n, n \in \mathbb{N}$

$x_n$  - общий или  $n$ -ый член последовательности

Примеры:

$$x_n = \frac{1}{n}; \quad x_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n!}$$

# Предел последовательности

- Число  $a$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдётся такое натуральное число  $N$ , что при всех  $n > N$  выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

# Предел функции в точке

- Определение Коши (в терминах  $\varepsilon - \delta$ )

Число  $A$  называется пределом функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  (при  $x \rightarrow x_0$ ), если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся число  $\delta > 0$ , что для всех  $x \neq x_0$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \end{aligned}$$

# Односторонние пределы

- Число  $A_1$  называется пределом функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  слева, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , что при  $x \in (x_0 - \delta; x_0)$  выполняется неравенство  $|f(x) - A_1| < \varepsilon$   $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$
- Число  $A_2$  называется пределом функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  справа, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , что при  $x \in (x_0; x_0 + \delta)$  выполняется неравенство  $|f(x) - A_2| < \varepsilon$   $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2$

# Предел функции в бесконечности

• Число  $A$  называется пределом функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $M > 0$ , что при всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x| > M$ , выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A}$$

# Бесконечно большая функция

- Функция  $y = f(x)$  называется бесконечно большой при  $x \rightarrow x_0$ , если для любого числа  $M > 0$  существует  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $0 < |x - x_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| > M$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

# Бесконечно малая функция (величина)

- Функция  $y = f(x)$  называется бесконечно малой при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  (б.м.величина)
- Величина обратная б.м.ф. есть б.б.ф.:  
если  $\alpha(x)$  б.м.ф. ( $\alpha(x) \neq 0$ ) то  $\frac{1}{\alpha(x)}$  б.б.ф.,
- Величина обратная б.б.ф. есть б.м.ф.:  
если  $f(x)$  - б.б.ф. ( $f(x) \neq 0$ ), то  $\frac{1}{f(x)}$  - б.м.ф.



# Теоремы о бесконечно малых

Пусть  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  — бесконечно малые функции,  $A(x)$  — ограниченная функция. Тогда...

1. Сумма (разность) б.м.ф. есть б.м.ф.:

$$\alpha(x) + \beta(x) \text{ и } \alpha(x) - \beta(x) - \text{б.м.ф.}$$

2. Произведение б.м.ф. есть б.м.ф.:  $\alpha(x) \cdot \beta(x) - \text{б.м.ф.}$

3. Произведение б.м.ф. и ограниченной есть б.м.ф.

$$\alpha(x) \cdot A(x) - \text{б.м.ф.}$$

4. Частное б.м.ф. и функции  $f(x)$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$

$$\frac{\alpha(x)}{f(x)} - \text{б.м.ф.}$$

# Связь между функцией, её пределом и бесконечно малой функцией

- $(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A) \Rightarrow f(x) = A + \alpha(x)$
- $f(x) = A + \alpha(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

# Основные теоремы о пределах

- Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

- Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

- Функция может иметь только один предел при  $x \rightarrow x_0$

# Основные теоремы о пределах

- Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))^n$$

- Предел дроби равен пределу числителя, делённому на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad (\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0)$$

# Признаки существования пределов

- Теорема о пределе промежуточной функции.

*Если функция заключена между двумя функциями, стремящимися к одному и тому же пределу, то она стремится к этому пределу.*

$$(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A; \quad g(x) < f(x) < \varphi(x)) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

- Теорема о пределе монотонной функции.

*Если функция  $f(x)$  монотонная и ограниченная*

*при  $x < x_0$  или при  $x > x_0$  то существует соответственно её левый предел*

*или её правый предел*

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$$

# Замечательные пределы

- I ЗП (первый замечательный предел)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- II ЗП (второй замечательный предел)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

или

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$$

# Эквивалентные бесконечно малые

*Если  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  – б.м.ф. при  $x \rightarrow x_0$ ;*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \text{ то}$$

*$\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются*

*эквивалентными бесконечно малыми.*

# Применение эквивалентных б.м. для вычисления пределов функций

- Т. При вычислении предела функции можно бесконечно малую функцию заменить на ей эквивалентную.

*При  $x \rightarrow x_0$  эквивалентными б.м. являются...*

$$\sin x \sim x; \quad \arcsin x \sim x; \quad \operatorname{arctg} x \sim x;$$

$$e^{x-1} \sim x; \quad \ln(1+x) \sim x$$



# Правило Лопитала

При раскрытии неопределённости вида  $\left(\frac{0}{0}\right)$   
предел отношений функций равен пределу  
отношений производных этих функций.