Вычисление криволинейного интеграла II рода

Вычисление криволинейного интеграла II рода, как и I рода, может быть сведено к вычислению определённого интеграла.

Параметрическое представление кривой интегрирования

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями x=x(t) и y=y(t), где функции x(t) и y(t) непрерывны вместе со своими производными x'(t) и y'(t) на отрезке $[\alpha;\beta]$, причём начальной точке A кривой соответствует значение параметра t=α, а конечной точке B – значение t=β. И пусть функция P(x;y) непрерывна на кривой AB. Тогда, по определению,

$$\int_{AB} P(x;y)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} P(\tilde{x}_i;\tilde{y}_i)\Delta x_i$$

Преобразуем интегральную сумму к переменной t. Так как $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1})$,

то по формуле Лагранжа (см.(25.2)) имеем: $\Delta x_i = x'(c_i)\Delta t_i$, где $c_i \in (t_{i-1}; t_i), \Delta t_i - t_{i-1}$.

Выберем точку $(\hat{x}_i; \hat{y}_i)$ так, чтобы $\hat{x}_i = x(c_i), \hat{y}_i = y(c_i)$.

Тогда преобразованная интегральная сумма

$$\sum_{i=1}^{n} P(x(c_i); y(c_i)) \cdot x'(c_i) \cdot \Delta t_i$$

будет интегральной суммой для функции одной переменной $P(x(t); y(t)) \cdot x'(t)$
на промежутке $[\alpha; \beta]$.

Поэтому

$$\int_{AB} P(x;y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t);y(t))x'(t)dt. \qquad (56.2)$$

Аналогично получаем:

$$\int_{AB} Q(x;y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t);y(t))y'(t)dt. \qquad (56.3)$$

Складывая почленно полученные равенства (56.2) и (56.3), получаем:

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t);y(t))x'(t) + Q(x(t);y(t))y'(t))dt. \qquad (56.4)$$

Явное представление кривой интегрирования

Если кривая AB задана уравнением $y=\varphi(x), x\in[a;b]$, где функция $\varphi(x)$ и её производная $\varphi'(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, то из формулы (56.4), приняв x за параметр, имеем параметрические уравнения кривой

$$AB: x=x, y=\varphi(x), x\in[a;b],$$

откуда получим:

$$\int_{AB} P(x;y)dx+Q(x;y)dy=\int_a^b\left[P(x;\varphi(x))+Q(x;\varphi(x))\varphi'(x)\right]dx.$$

(56.5)

В частности, $\int_{AB} P(x;y)dx=\int_a^b P(x;\varphi(x))dx.$ (56.6)

Если AB – гладкая пространственная кривая, которая описывается непрерывными на отрезке $[\alpha;\beta]$

функциями $x = x(t), y = y(t)$ и $z = z(t)$, то криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz$$

вычисляется по формуле (56.7)

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[P(x(t);y(t);z(t))x'(t) + Q(x(t);y(t);z(t))y'(t) + R(x(t);y(t);z(t))z'(t)\right]dt.$$

Замечание. Криволинейные интегралы I и II рода связаны соотношением $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)dl,$

где α и β - углы, образованные касательной к кривой AB в точке $M(x;y)$ с осями Ox и Oy соответственно.

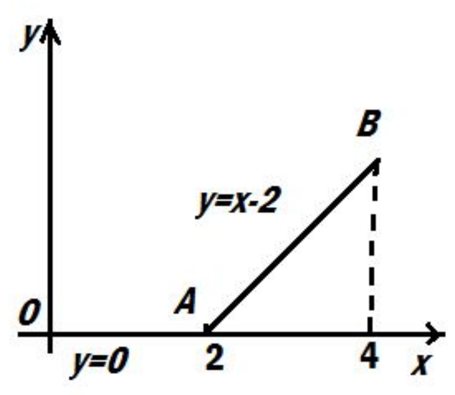
Пример 56.1. Вычислить $I = \int\limits_{L} (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy, L -$

ломаная OAB, где $O(0;0), A(2;0), B(4;2).$

Решение: Так как $L = OAB = OA + AB$(см. рис. 239), то

$$I = \int\limits_{L} = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AB}.$$

рис.239



Уравнение отрезка OA есть y=0, 0≤x≤2; уравнение отрезка AB: y=x-2, $x \in [2;4]$. согласно формуле (56.5), имеем:

$$I = \int_0^2 \left[(x-0)^2 + 0\right]dx + \int_2^4 \left[2^2 + (2x-2)^2 \cdot 1\right]dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + 4x\Big|_2^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-2)^3}{3}\Big|_2^4 = \frac{8}{3} + (16-8) + \frac{1}{6}(216-8) = \frac{136}{3}$$

Пример 56.2. Вычислить $I = \int\limits_L y^2dx + \left(x^2 + z\right)dy + \left(x + y + z^2\right)dz, L -$

отрезок прямой в пространстве от точки A(1;0;2) до точки B(3;1;4).

Решение: Составим уравнение прямой, проходящей через точки A и B: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$

или в параметрической форме: $x = 2t + 1, y = t, z = 2t + 2.$

При перемещении от точки A к точке B параметр t меняется от 0 до 1. По формуле (56.7) находим, что

$$I = \int\limits_0^1 \left[t^2 \cdot 2 + \left((2t+1)^2 + 2t + 2\right)\cdot 1 + \left(2t + 1 + t + (2t+2)^2\right)\cdot 2\right]dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(14t^2 + 28t + 13\right)dt = \frac{95}{3}.$$