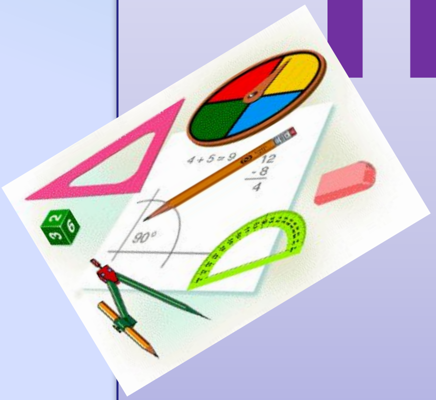
Алгебра 11 класс

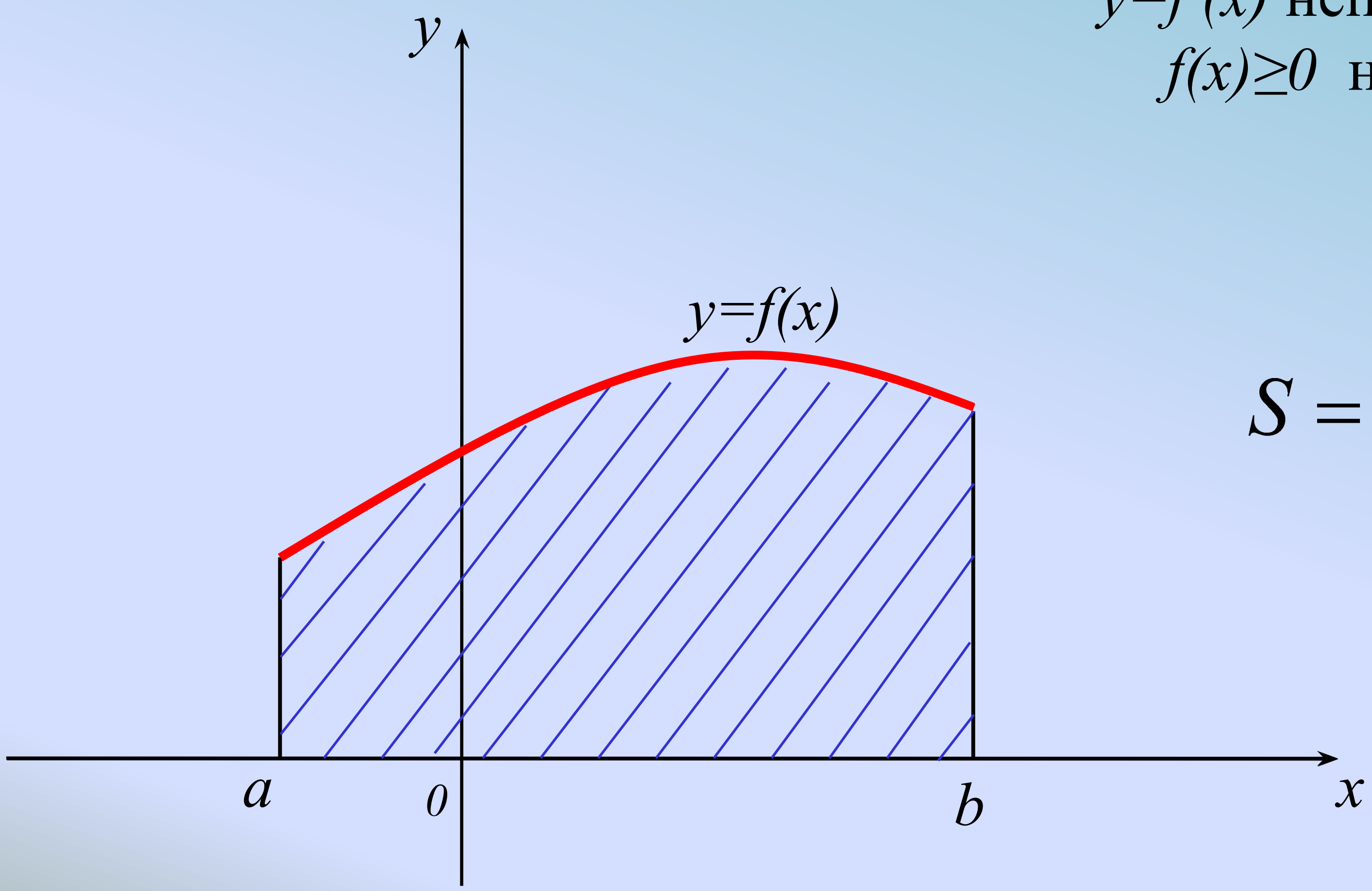
Вычисление площадей плоских фигур



Республика Башкортостан г. Уфа
МАОУ лицей № 155
Ивушкина Л. Д.

Найти площадь фигуры

$y = f(x)$ непрерывная
$f(x) \geq 0$ на $[a; b]$

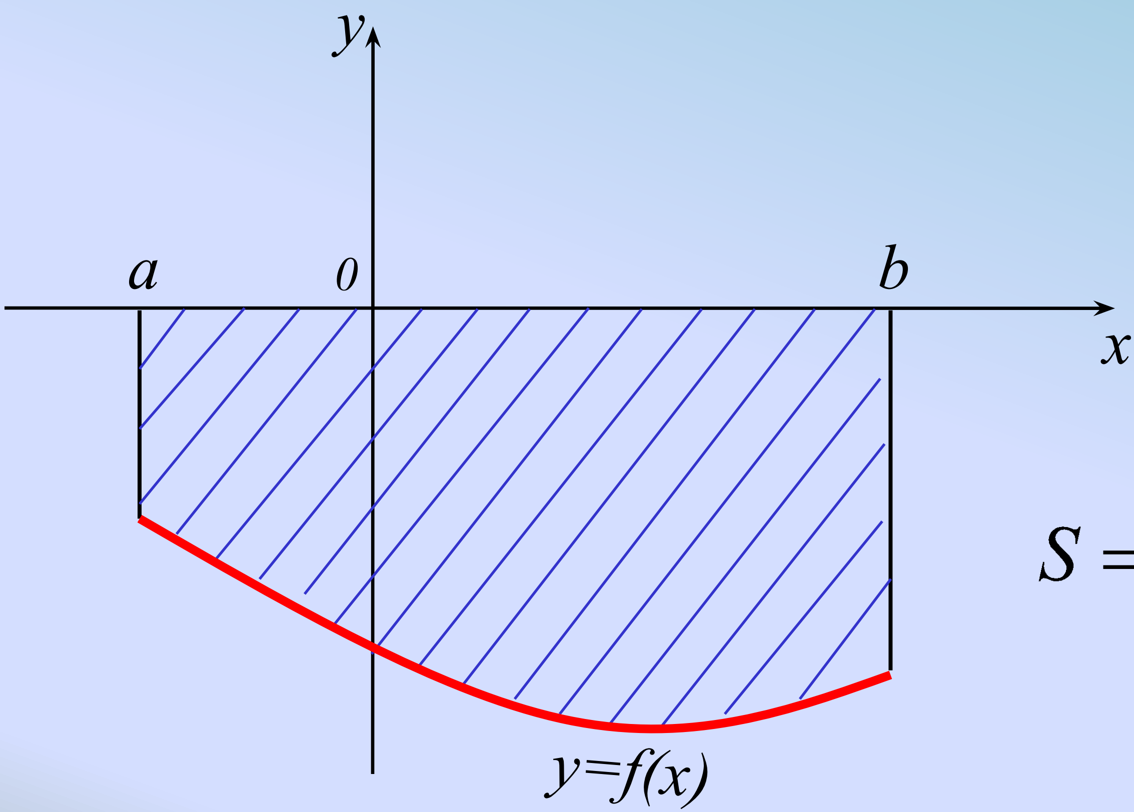


$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Найти площадь фигуры

y=f(x) непрерывная

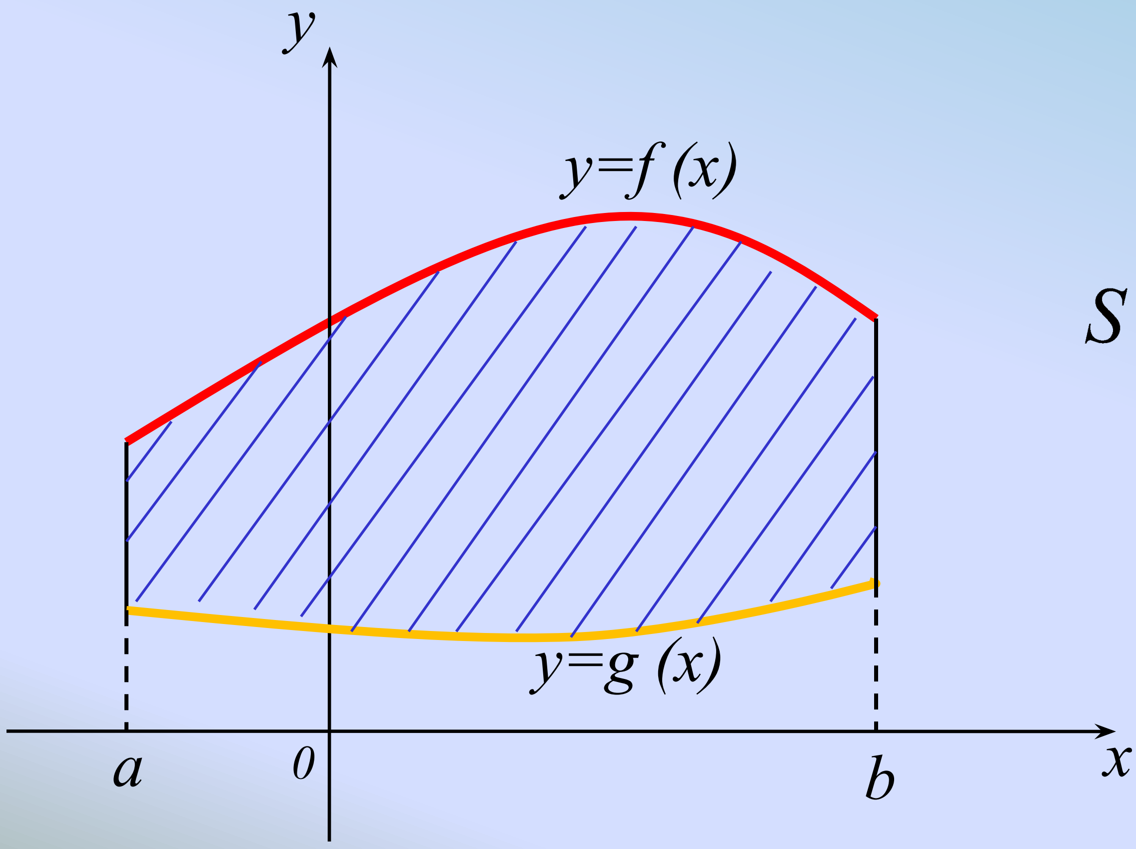
f(x)≤0 на [*a; b*]



$$S = -\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

Найти площадь фигуры

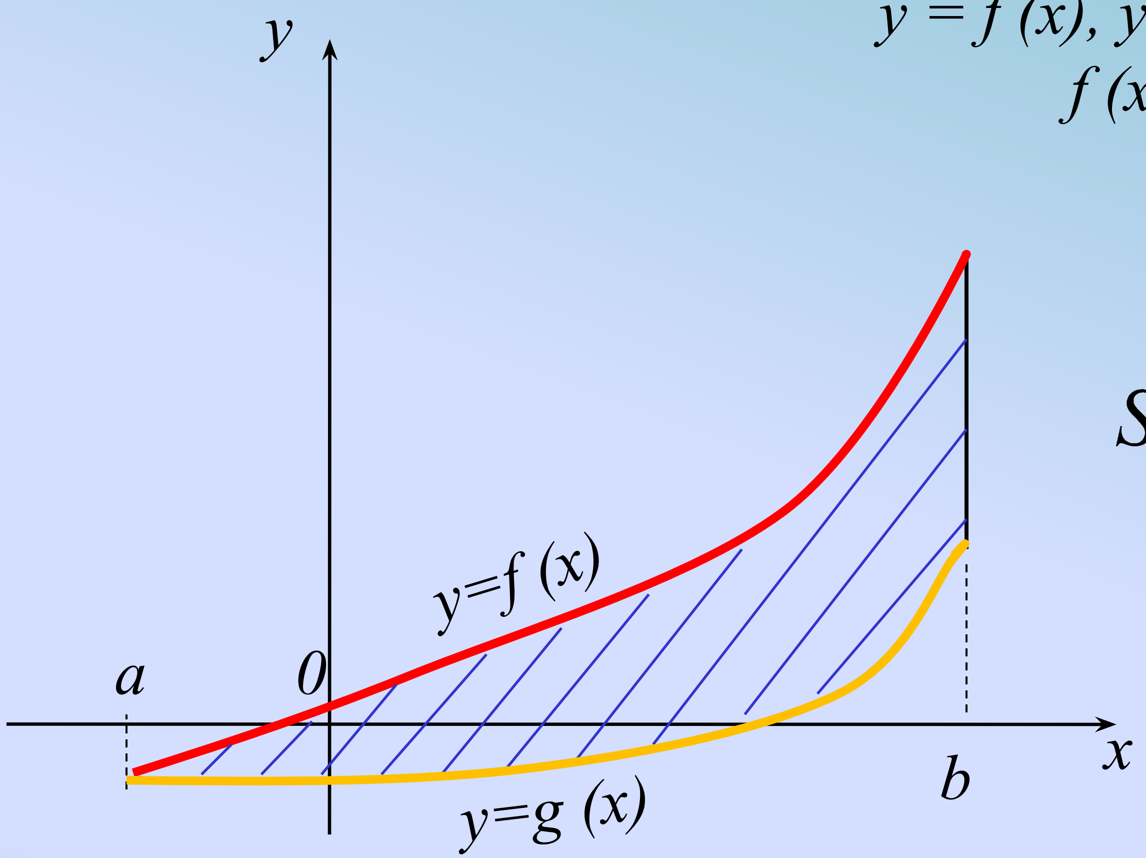
$y = f(x)$, $y = g(x)$ – непрерывные,
$f(x) \geq g(x)$ на $[a; b]$



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Найти площадь фигуры

$y = f(x)$, $y = g(x)$ –непрерывные,
$f(x) \geq g(x)$ на $[a; b]$



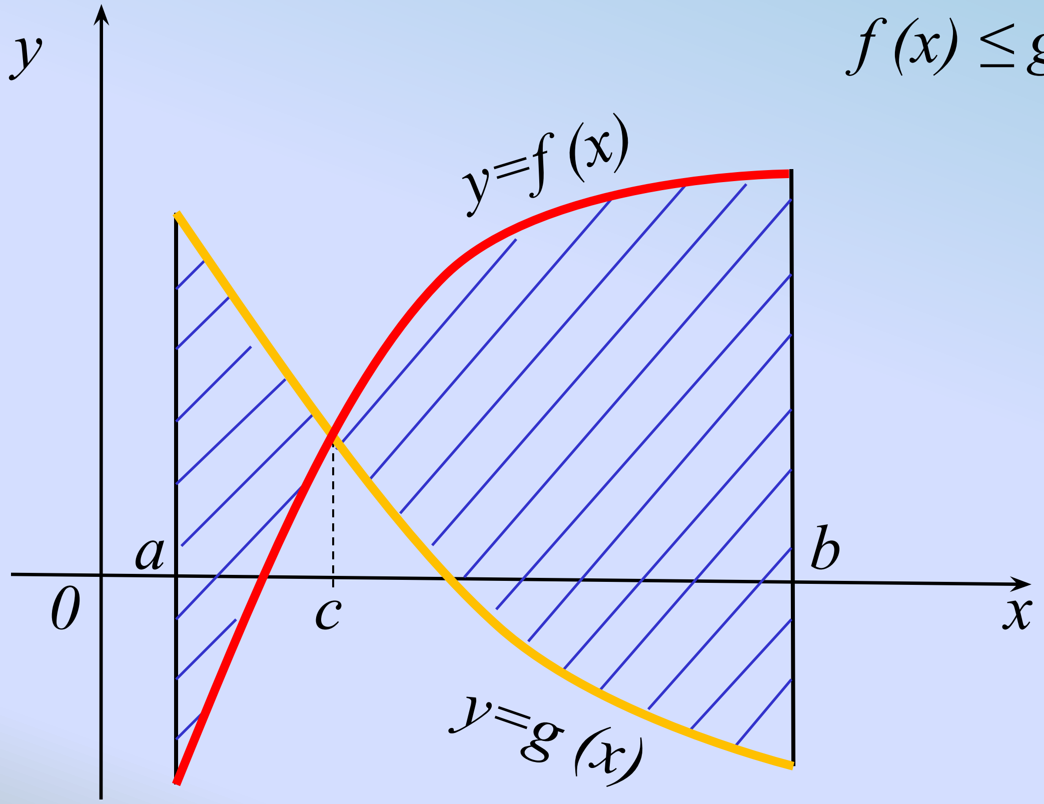
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Найти площадь фигуры

$y = f(x)$, $y = g(x)$ – непрерывные на $[a; b]$

$f(x) \geq g(x)$ на $[c; b]$

$f(x) \leq g(x)$ на $[a; c]$, где $c \in [a; b]$



$$S = \int_a^c (g(x) - f(x))dx +$$

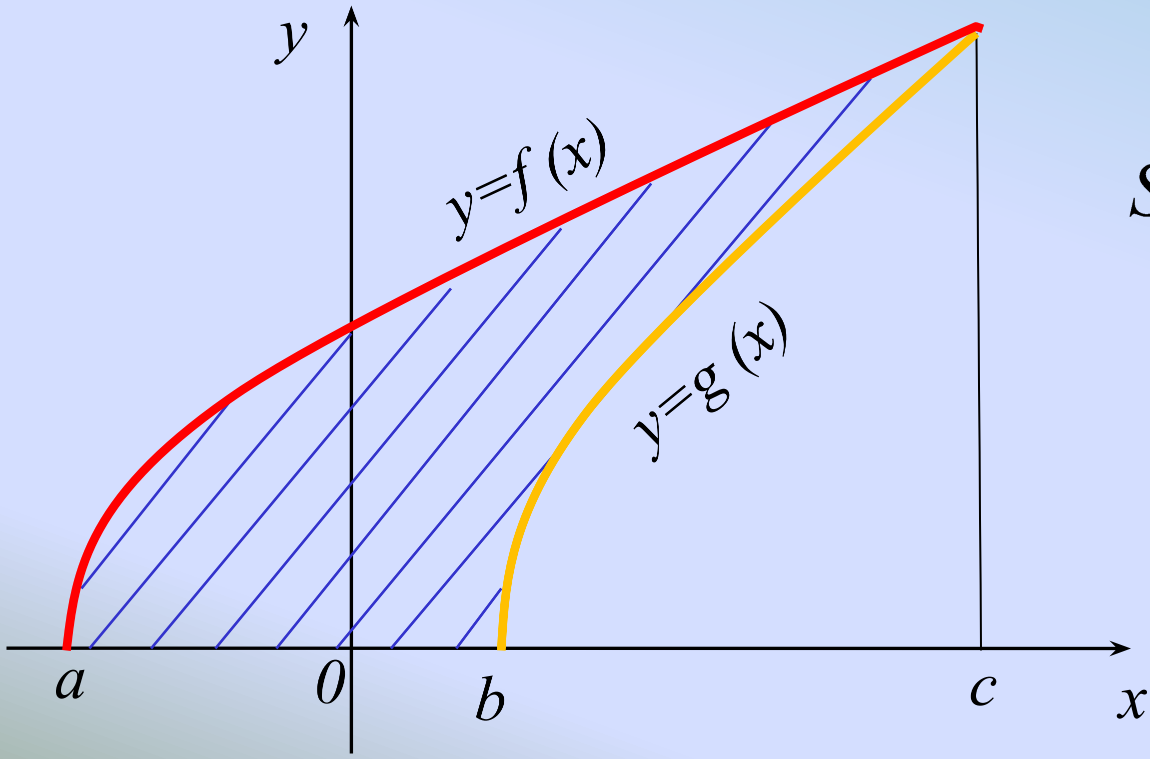
$$+ \int_c^b (f(x) - g(x))dx$$

Найти площадь фигуры

$y = f(x)$ – непрерывная на $[a; c]$

$y = g(x)$ – непрерывная на $[b; c]$

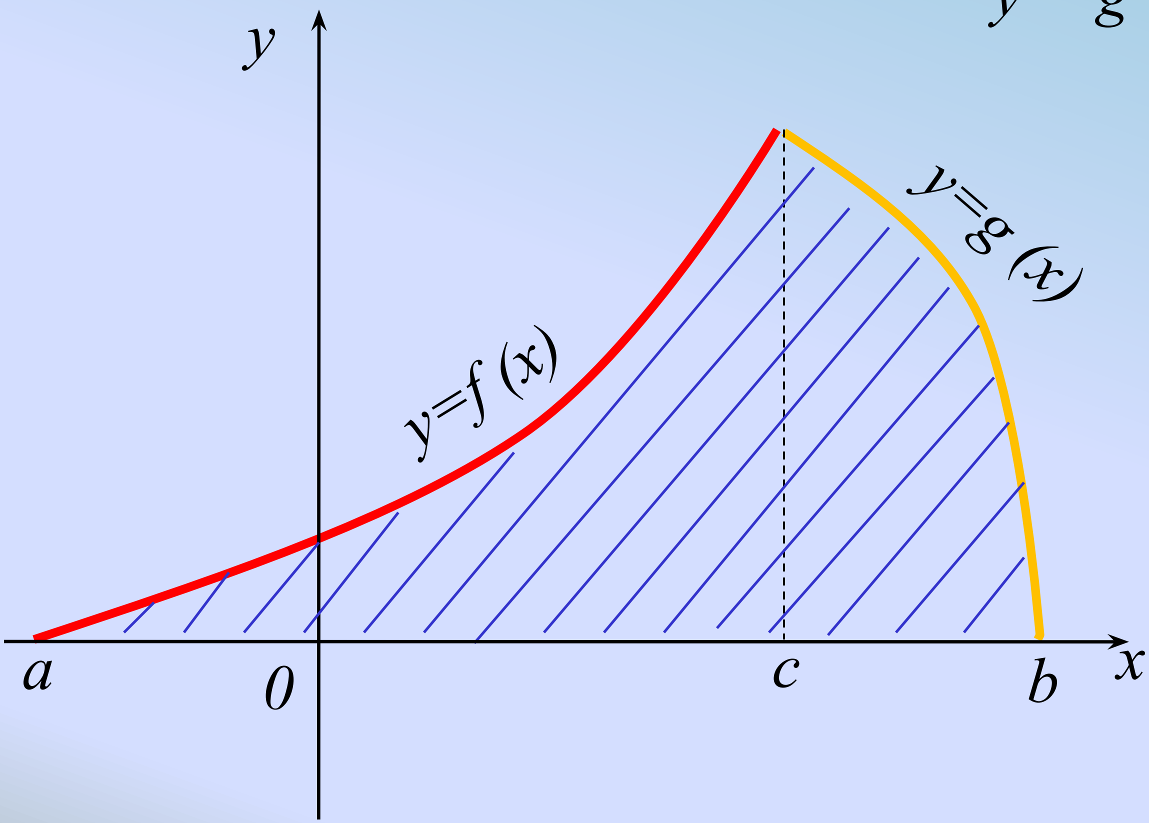
$f(x) \geq g(x)$ на $[a; c]$, где $c \notin [a; b]$



$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c g(x)dx$$

Найти площадь фигуры

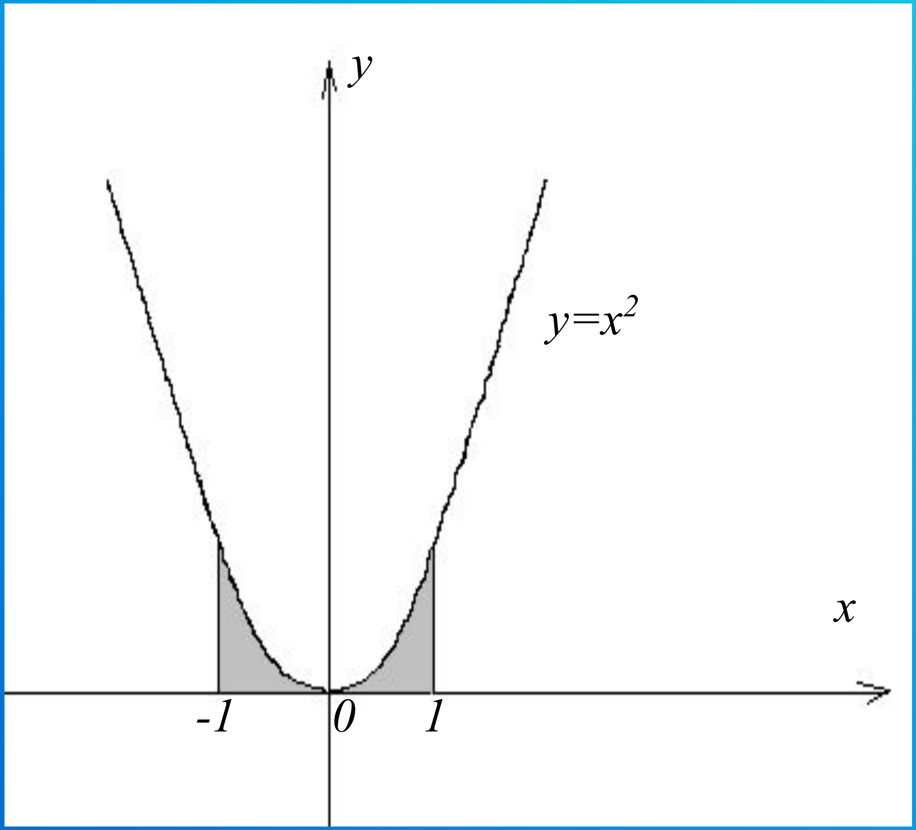
$y = f\,(x)$ – непрерывная на $[a;\, c]$
$y = g\,(x)$ –непрерывная на $[c;\, b]$,
где $c \in [a;\, b]$



$$S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{\text{в}} g(x)dx$$

Разминка

Найти площадь изображенной фигуры

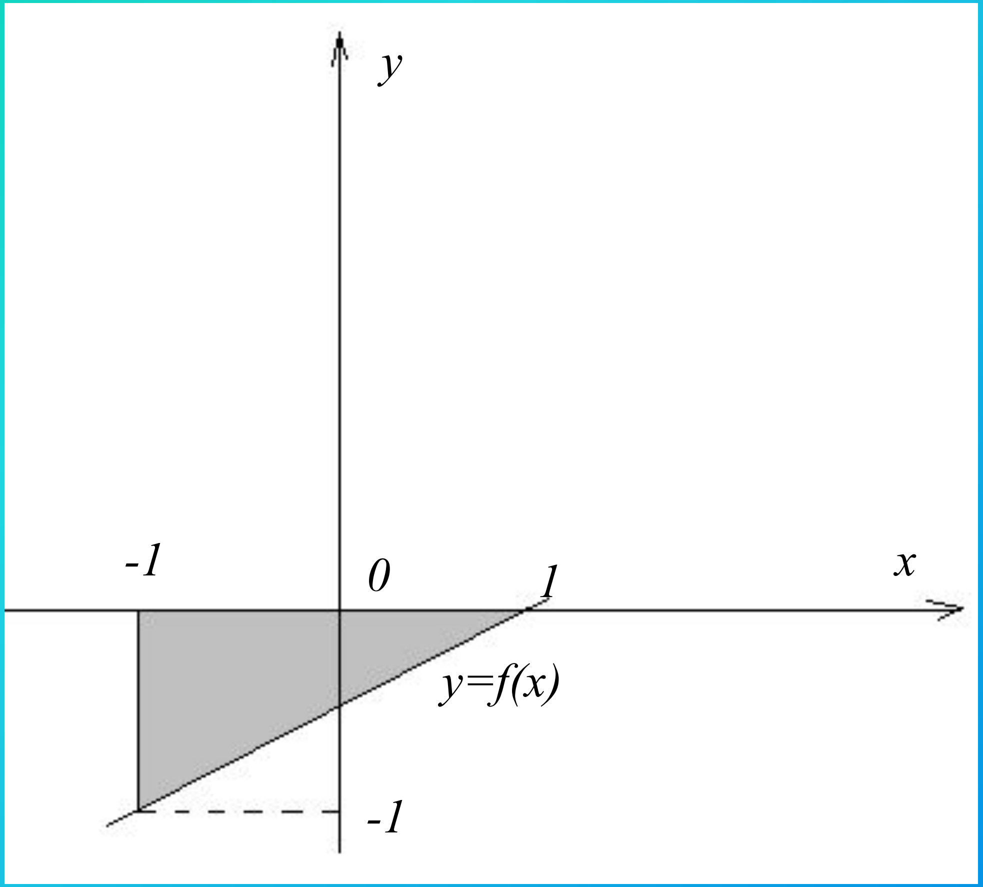


$$S = \frac{2}{3}$$

(четность функции)

Разминка

Найти площадь изображенной фигуры



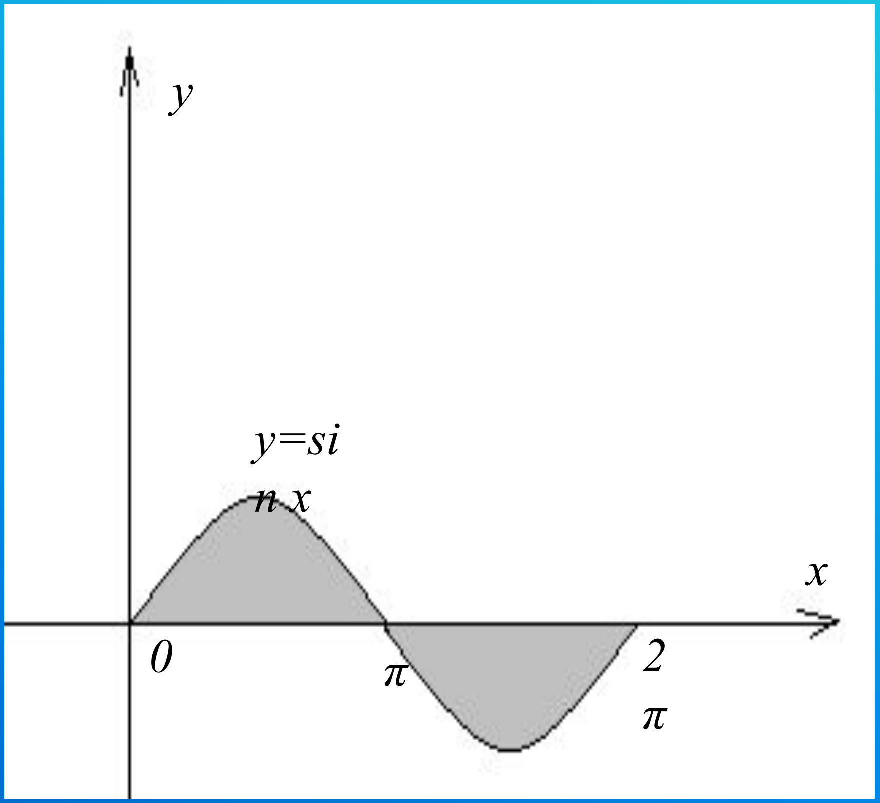
$$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

$$S=4$$

(площадь прямоугольного треугольника)

Разминка

Найти площадь изображенной фигуры

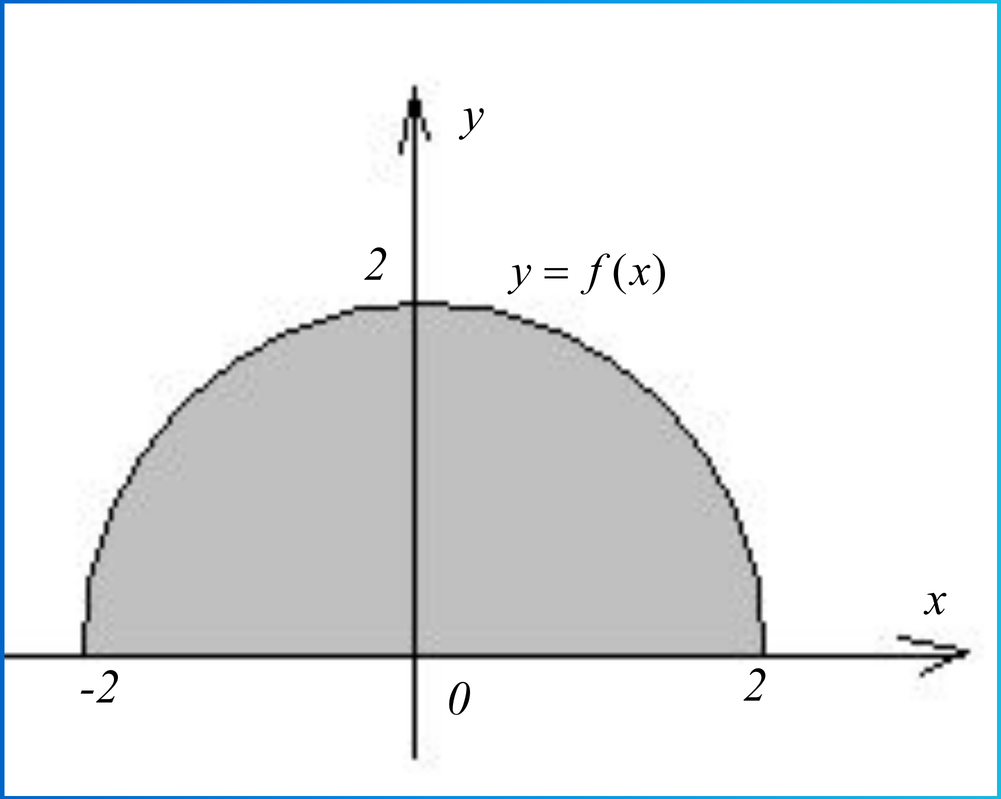


$$S = 4$$

(равенство фигур)

Разминка

Найти площадь изображенной фигуры



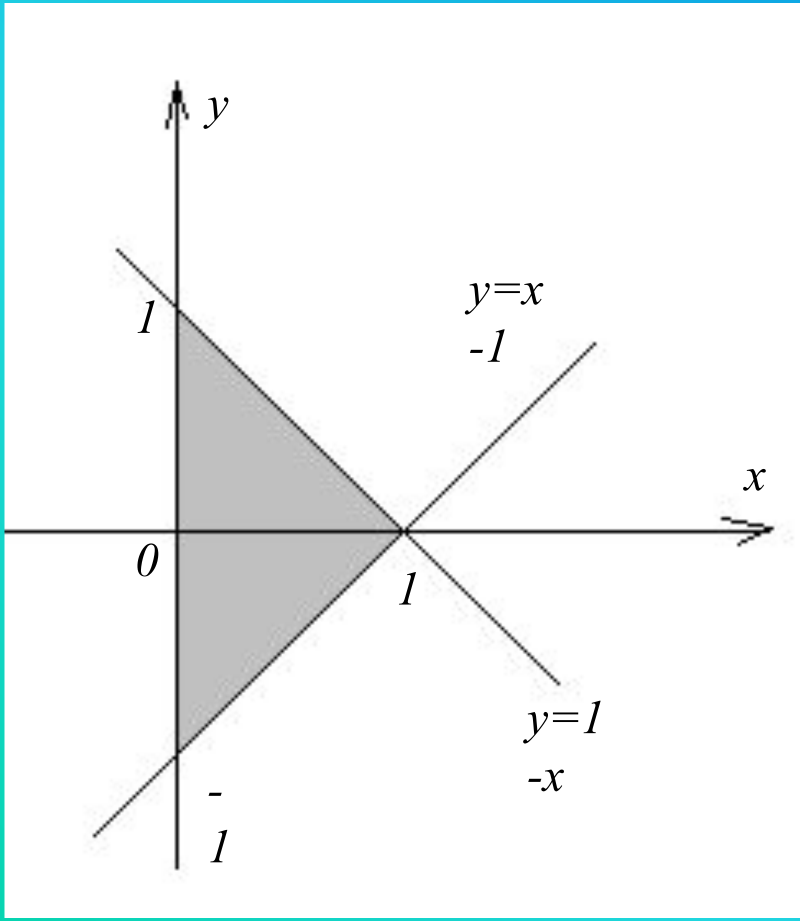
$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$S = 2\pi$$

(площадь полукруга)

Разминка

Найти площадь изображенной фигуры



S = 1

(площадь треугольника)

Задачи

1) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

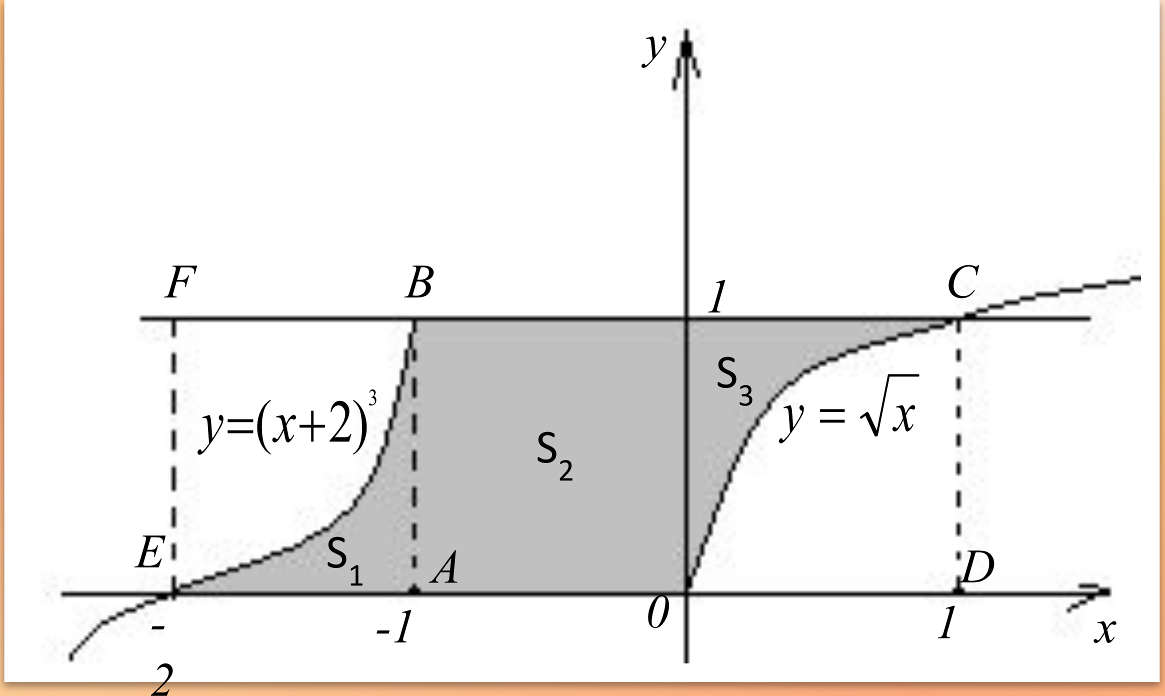
$$y = \sqrt{x}$$

$$y = (x+2)^3$$

$$y = 0$$

$$y = 1$$

$y=\sqrt{x}$ $\quad y=(x+2)^3$ $\quad y=0$ $\quad y=1$



S = 19/12

1 способ $\quad S = S_1 + S_2 + S_3$

2 способ $\quad S = S_1 + S_{ABCD} - S_{OCD}$

3 способ $\quad S = S_{EFCD} - S_{EFB} - S_{OCD}$

2) Фигура, ограниченная линиями

$y=x+6,$

$x=1,$

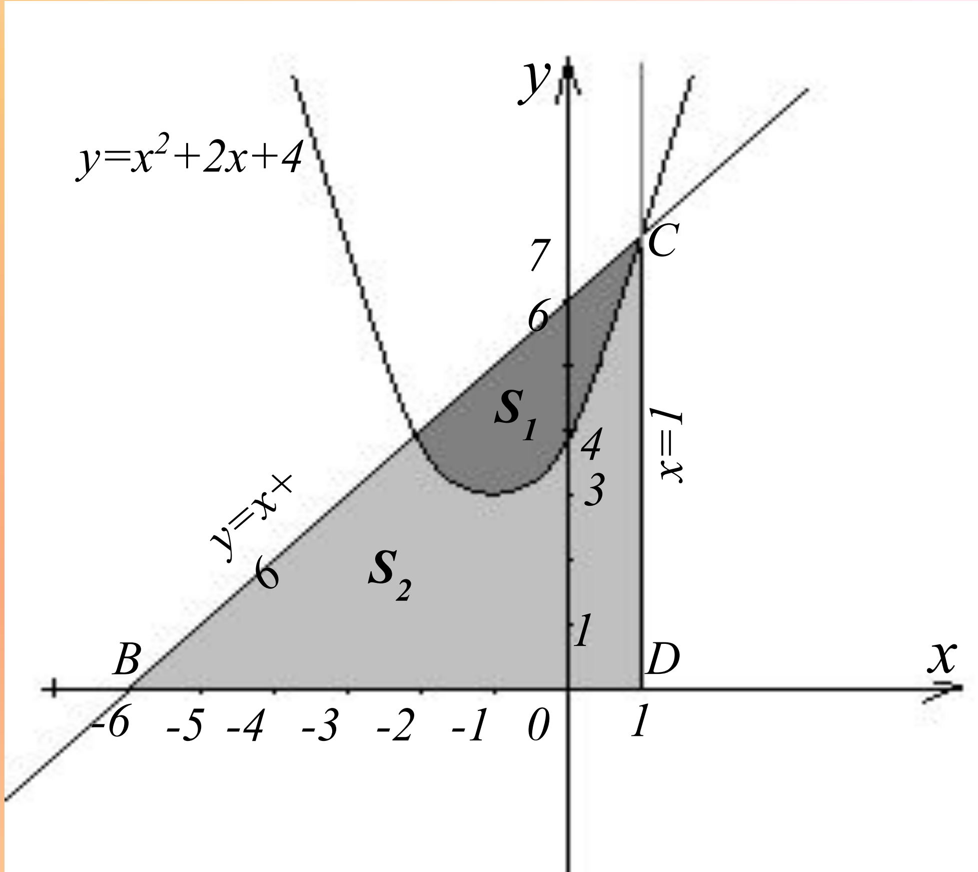
$y=0,$

делится параболой

$y=x^2 + 2x + 4$

на две части.

Найти площадь каждой части.



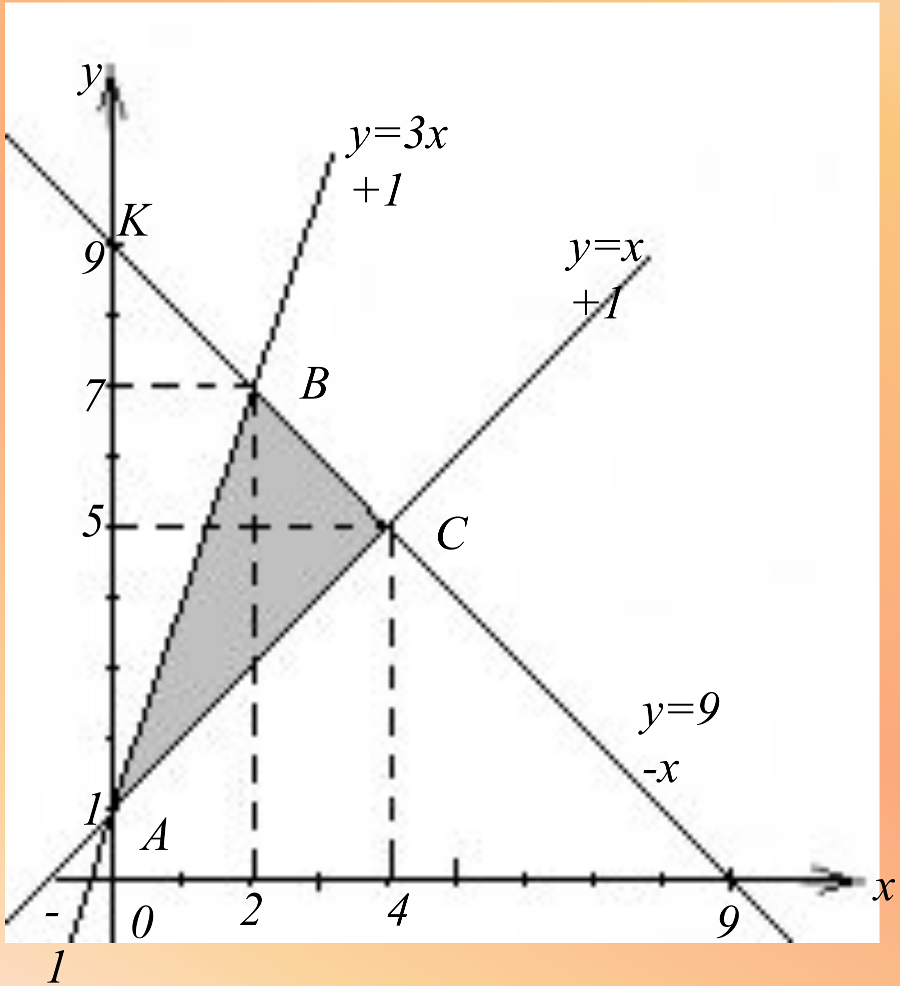
$$S_1 = 4{,}5$$
$$S_2 = 20$$

$$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 = 24{,}5$$

$$S_1 = \int_{-2}^{1} [(x+6) - (x^2 + 2x + 4)]dx = 4{,}5$$

$$S_2 = S_{\Delta BCD} - S_1$$

Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми



$y=3x + 1$

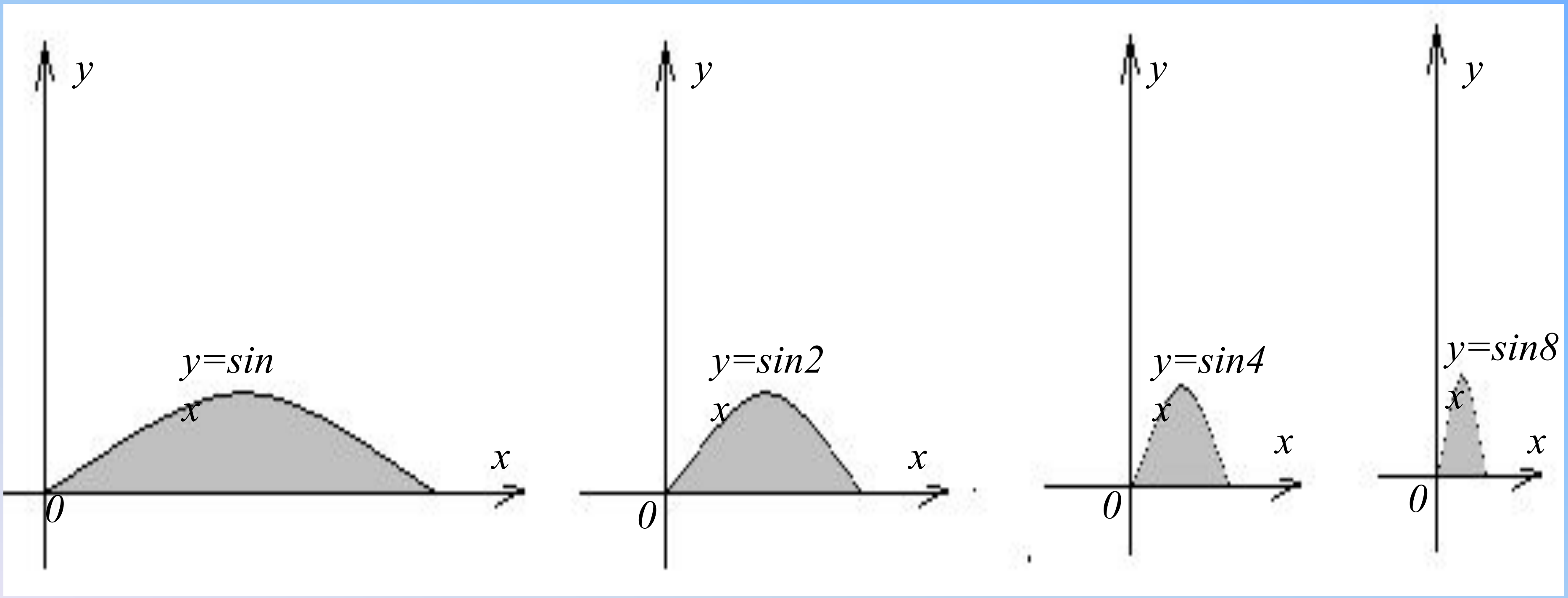
$y=9 - x$

$y=x + 1$

Интересные задачи

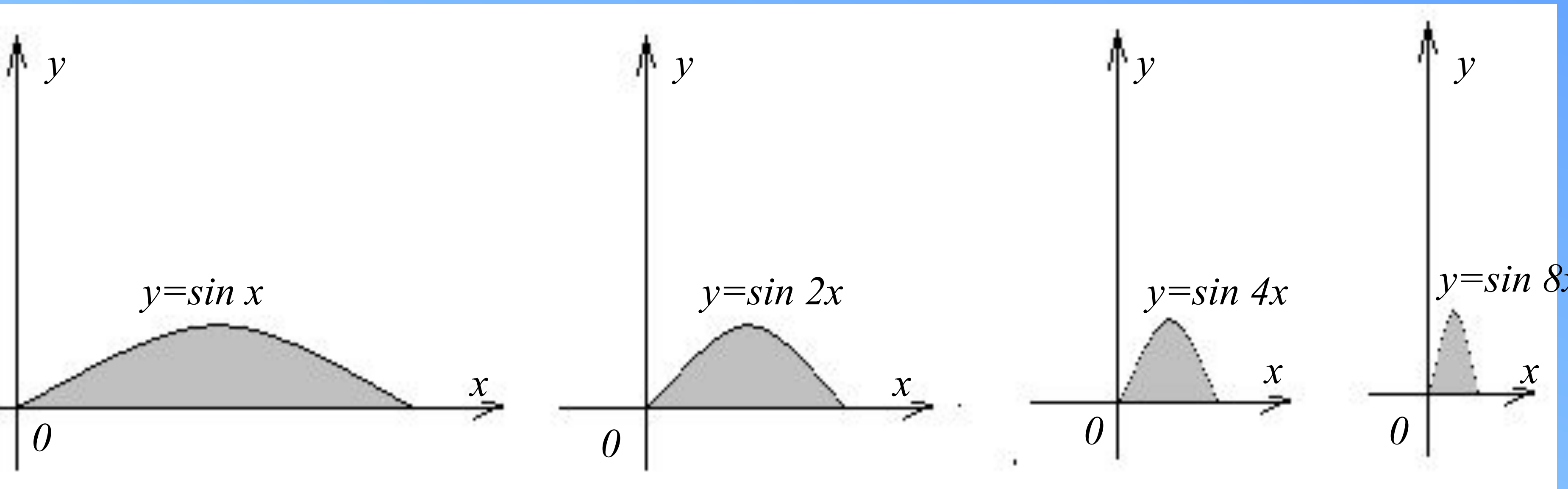
1. Найти сумму площадей бесконечного количества фигур, изображенных на рисунке.

(аргумент каждой следующей функции увеличивается в 2 раза)



Указания к решению: *sin nx=0*

Решение



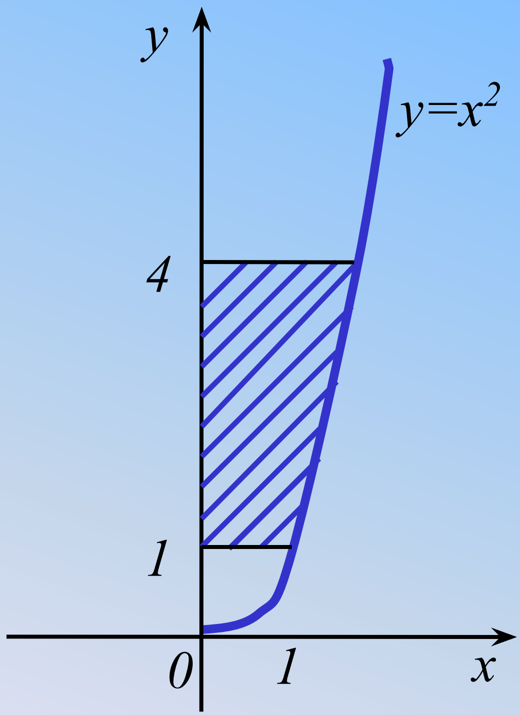
sin nx=0 , nx= π, $x = \dfrac{\pi}{n}$ *, где n=1,2,4,8,...*

$$S_n = \int_0^{\pi/n} \sin nx dx = \frac{2}{n}$$

$$S_n = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4.$$

Ответ: 4.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

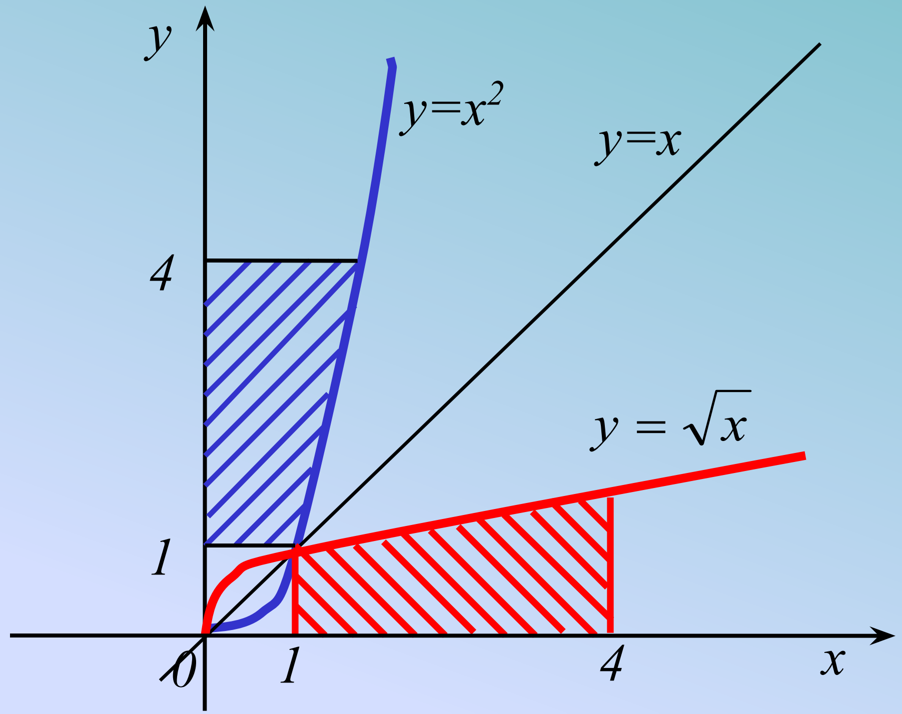


$y = x^2$, при $x \geq 0$

$y = 1$

$y = 4$

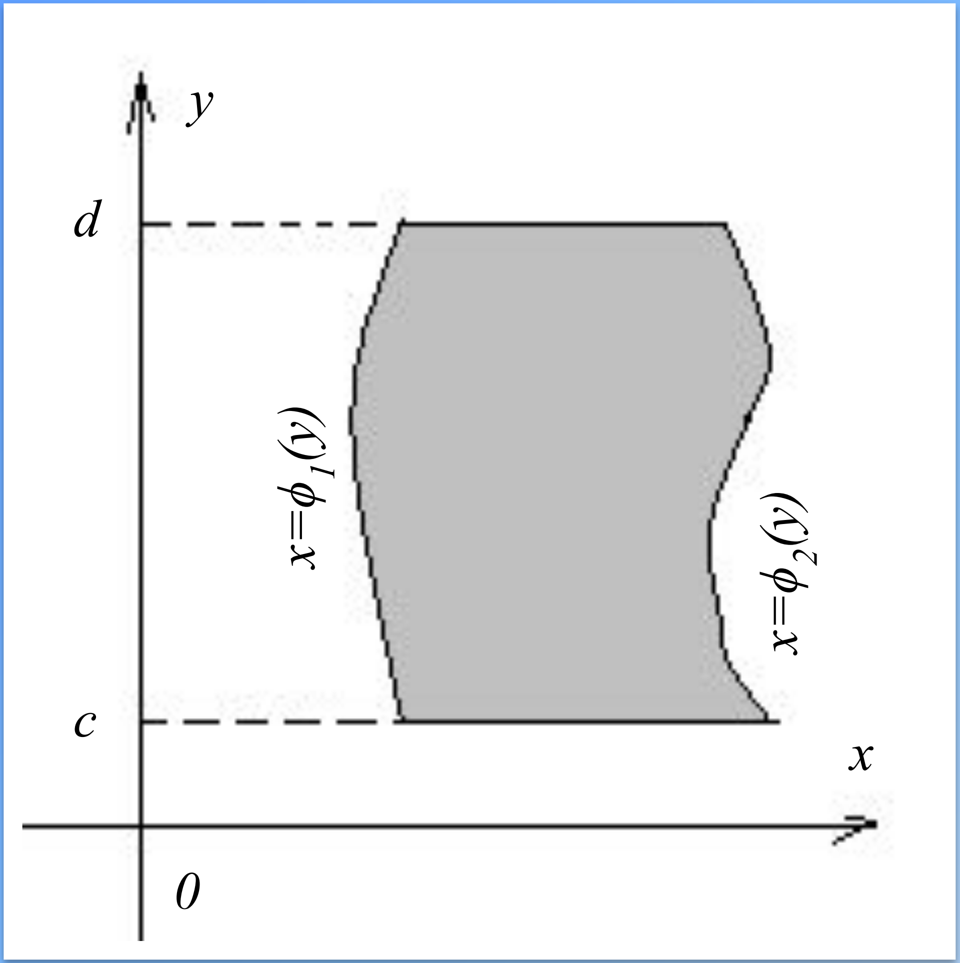
$x = 0$



Данная фигура симметрична криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=1$, $x=4$, $y=0$, графиком функции, обратной $y=x^2$, $x\geq 0$, т. е. $y=\sqrt{x}$

Поэтому фигуры имеют равные площади

$$S=\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$$



Если фигура ограничена линиями
$x=\phi_1(y)$, $x=\phi_2(y)$, $y=c$; $y=d$,
где $c<d$ и $\phi_2(y)\geq\phi_1(y)$, на $[c; d]$,
то ее площадь может быть вычислена по формуле

$$S=\int_c^d(\varphi_2(y)-\varphi_1(y))dy$$

Используемая литература

- *Алимов Ш.А. и др*. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений.2002г.
- *Звавич Л.И., Рязановский А.Р., Поташник А.М*. Сборник задач по алгебре и математическому анализу для 10-11 кл. Вып.1 «Интеграл и площадь» 1996г.
- *Галицкий М.Л. и др.* Углубленное изучение алгебры и математического анализа. 10-11.Пособие для учителя. 1997г.