

Вычисление приделов

Роботу виконала:
Студентка гр.К-11
ХК ДУТ
Леженина Анастасия

План

1. Определение предела
2. Теоремы
3. Примеры вычисления пределов
4. Литература



1. Определение предела

- Число b – предел функции $f(x)$ при x стремящемся к a , если для каждого положительного числа ϵ можно указать такое положительное число δ , что для всех x , отличных от a и удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, имеет место неравенство $|f(x)-b|<\epsilon$.
- **Обозначение предела.** Если b есть предел функции $f(x)$ при x стремящемся к a , то записывают это так:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$



2. Вычисление пределов функций основано на применении следующих основных теорем:

ТЕОРЕМА 1. Предел суммы двух функций при x стремящемся к a равен сумме пределов этих функций, то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

ТЕОРЕМА 2. Предел произведения двух функций при x стремящемся к a равен произведению пределов этих функций, то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Предел разности равен разности пределов:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$



ТЕОРЕМА 3. Предел частного двух функций при x стремящемся к a равен частному пределов, если предел знаменателя отличен от нуля, то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \right)$$

ТЕОРЕМА 4. Первый замечательный предел равен

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \quad (\alpha - \text{угол в радианах})$$

ТЕОРЕМА 5. Второй замечательный предел равен

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

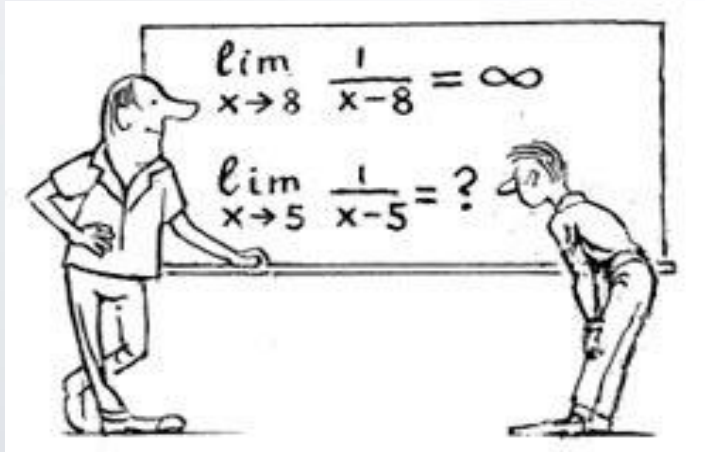


Предел функции в степени:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^m = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^m \quad (m - \text{натуральное число})$$

Предел корня из функции:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[m]{f(x)} = \sqrt[m]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \quad (m - \text{натуральное число})$$



Другие полезные формулы пределов:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = 1 \quad (\alpha - \text{угол в радианах})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arccos x)^2}{1 - x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

3. Примеры вычисления пределов

Пример 1 Докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

Пусть задано произвольное $\epsilon > 0$. Тогда для того чтобы выполнялось неравенство $|f(x) - a| < \epsilon$, необходимо выполнение неравенства $|x - a| < \epsilon$, которое, очевидно, выполняется, если $|x - a| < d$, где $d = \epsilon$. Таким образом, согласно [определению предела функции](#), число a , действительно, является пределом функции x при x стремящемся к a .



ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСЛОЖНЫХ ПРЕДЕЛОВ

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow 7} (x + 4) = \lim_{x \rightarrow 7} x + \lim_{x \rightarrow 7} 4 = 7 + 4 = 11$$

Здесь была использована [теорема о пределе суммы](#).

Пример 2.

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{5x + 2}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{5 * 7 + 2}{2 * 7 + 3} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{35 + 2}{14 + 3} = \frac{37}{17}$$

На первом шаге была применена [теорема о пределе частного](#), так как предел знаменателя не равен нулю. На втором шаге использовалась [теорема о пределе суммы](#) для числителя и знаменателя дроби. После была применена [теорема о пределе произведения](#).



ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ О ПЕРВОМ ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ ПРЕДЕЛЕ

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} * \frac{1}{\cos(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{1} * \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1 * \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)} = 1 * \frac{1}{1} = 1$$



ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ О ВТОРОМ ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ ПРЕДЕЛЕ

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sin(x)}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^\infty = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \sin(x))^{1/x} = e$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С КОРНЕМ

Пример 2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = \infty - \infty = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{x+1})^2 + (\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x+1} * \sqrt[3]{x} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{x+1})^2 * (\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x+1} * \sqrt[3]{x}}$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1-x}{(\sqrt[3]{x+1})^2 * (\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x+1} * \sqrt[3]{x}} = 0$$



Источники информации:

1. www.mathforyou.net/LimitForm.html
2. www.mathprofi.ru/predely_primery_resheeni.html
3. Конспект лекций

