Вычисление приделов

Роботу выконала:
Студентка гр.К-11
ХК ДУТ
Леженина Анастасия

План

1. Определение предела
2. Теоремы
3. Примеры вычисления приделов
4. Литература

1. Определение предела

- Число *b* – предел функции *f(x)* при *x* стремящемся к *a*, если для каждого положительного числа e можно указать такое положительной число d, что для всех *x*, отличных от *a* и удовлетворяющих неравенству |*x*-*a*|<d, имеет место неравенство |f(x)-b|<d.

- **Обозначение предела.** Если *b* есть предел функции *f(x)* при *x* стремящемся к *a*, то записывают это так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

2. Вычисление пределов функций основано на применении следующих основных теорем:

ТЕОРЕМА 1. Предел суммы двух функций при *x* стремящемся к *a* равен сумме пределов этих функций , то есть

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$$

ТЕОРЕМА 2. Предел произведения двух функций при *x* стремящемся к *a* равен произведению пределов этих функций, то есть

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

Предел разности равен разности пределов:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)$$

ТЕОРЕМА 3. Предел частного двух функций при x стремящемся к a равен частному пределов, если предел знаменателя отличен от нуля, то есть

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \qquad \left(\lim_{x \to a} g(x) \neq 0\right)$$

ТЕОРЕМА 4. Первый замечательный предел равен

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \qquad (\alpha - \textit{угол в радианах})$$

ТЕОРЕМА 5. Второй замечательный предел равен

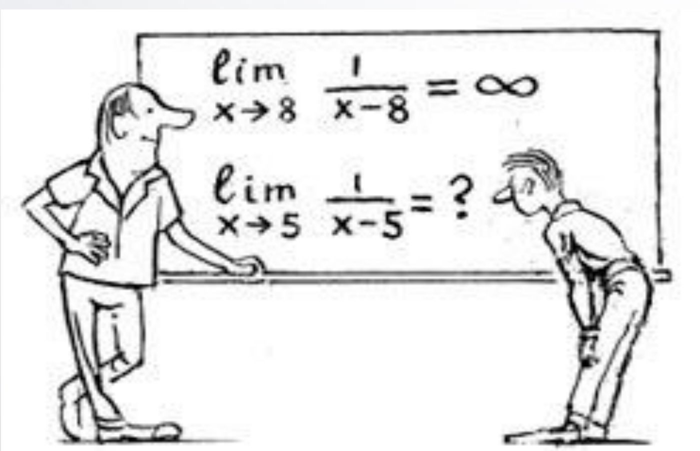
$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Предел функции в степени:

$$\lim_{x\to a} f(x)^m = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^m \quad (m - \textit{натуральное число})$$

Предел корня из функции:

$$\lim_{x\to a} \sqrt[m]{f(x)} = \sqrt[m]{\lim_{x\to a} f(x)} \quad (m - \textit{натуральное число})$$



Другие полезные формулы пределов:

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = 1 \qquad (\alpha - \textit{угол в радианах})$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\arccos x)^2}{1-x} = 2 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

$$\lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

3. Примеры вычисления приделов

Пример 1 Докажем, что

$$\lim_{x \to a} x = a.$$

Пусть задано произвольное $e>0$. Тогда для того чтобы выполнялось неравенство $|f(x)-a|<e$, необходимо выполнение неравенства $|x-a|<e$, которое, очевидно, выполняется, если $|x-a|<d$, где $d=e$. Таким образом, согласно определению предела функции, число a, действительно, является пределом функции x при x стремящемся к a.

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСЛОЖНЫХ ПРЕДЕЛОВ

Пример 1.

$$\lim_{x\to 7}(x+4) = \lim_{x\to 7} x + \lim_{x\to 7} 4 = 7 + 4 = 11$$

Здесь была использована теорема о пределе суммы.

Пример 2.

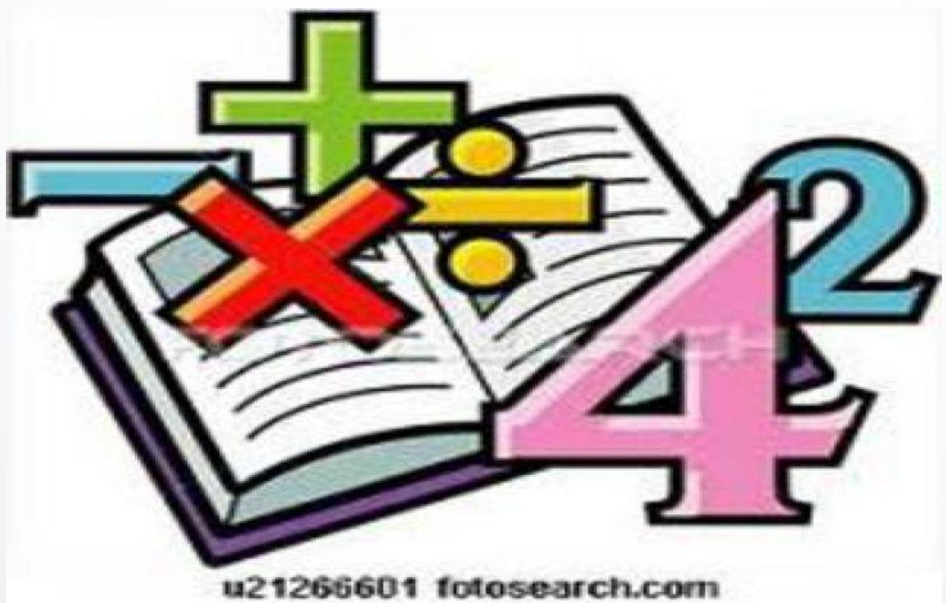
$$\lim_{x\to 7}\frac{5x+2}{2x+3} = \lim_{x\to 7}\frac{5*7+2}{2*7+3} = \lim_{x\to 7}\frac{35+2}{14+3} = \frac{37}{17}$$

На первом шаге была применена теорема о пределе частного, так как предел знаменателя не равен нулю. На втором шаге использовалась теорема о пределе суммы для числителя и знаменателя дроби. После была применена теорема о пределе произведения.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ О ПЕРВОМ ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ ПРЕДЕЛЕ

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x} * \frac{1}{\cos(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{1} * \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)} = 1 * \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)} = 1 * \frac{1}{1} = 1$$



ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ О ВТОРОМ ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ ПРЕДЕЛЕ

Пример 1.

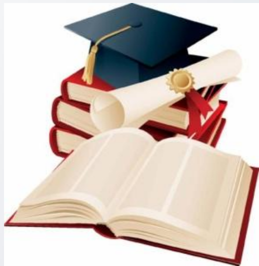
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sin(x)}\right)^{x}=\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}(1+\sin(x))^{1/x}=\mathrm{e}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С КОРНЕМ

Пример 2.

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}=\infty-\infty=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{x+1})^2+(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x+1}*\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})}{(\sqrt[3]{x+1})^2*\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}*\sqrt[3]{x}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{(\sqrt[3]{x+1})^2*\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}*\sqrt[3]{x}}=0$$



Источники информации:

1. www.mathforyou.net/LimitForm.html
2. www.mathprofi.ru/predely_primery_resheniі.html
3. Конспект лекций