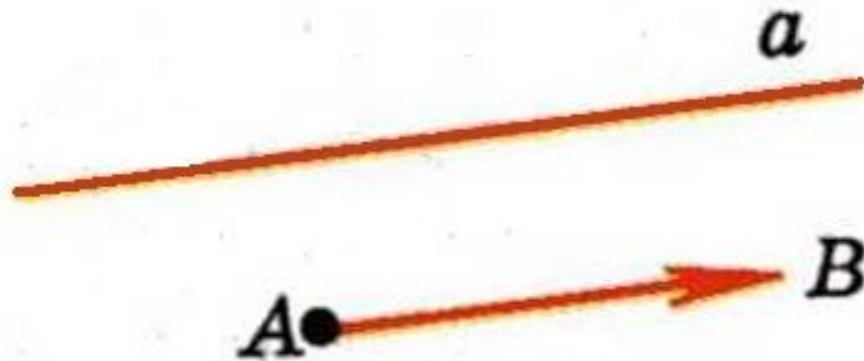


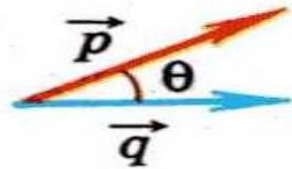
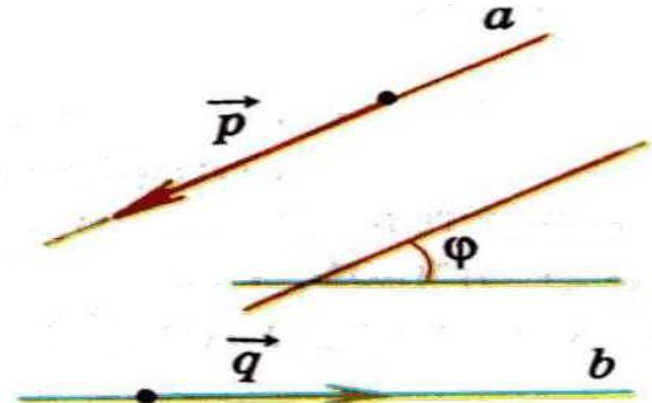
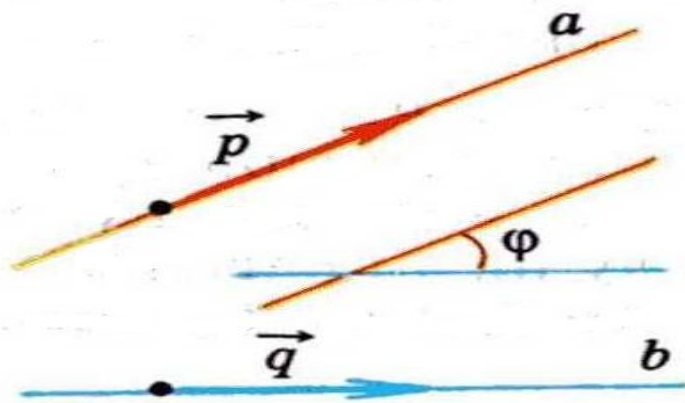
# Вычисление угла между прямыми и плоскостями

# Направляющий вектор прямой

**Ненулевой вектор называется направляющим вектором прямой  $a$ , если он лежит либо на прямой  $a$ , либо на прямой, параллельной прямой  $a$ .**



# Угол между двумя прямыми



$$\varphi = \theta$$

a)

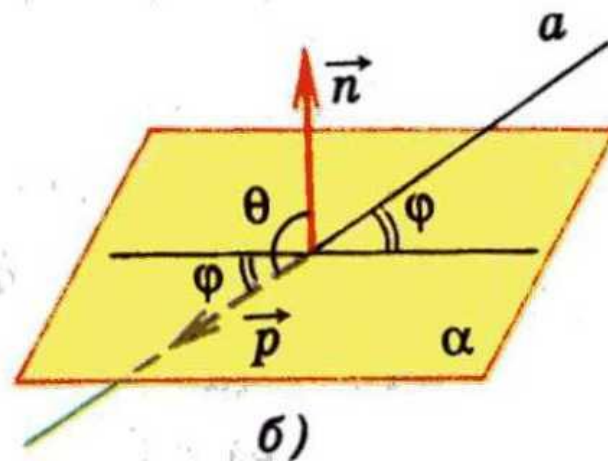
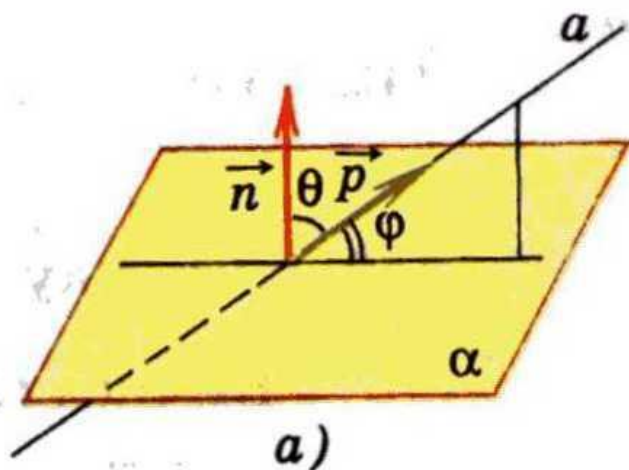


$$\varphi = 180^\circ - \theta$$

b)

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

# Угол между прямой и плоскостью



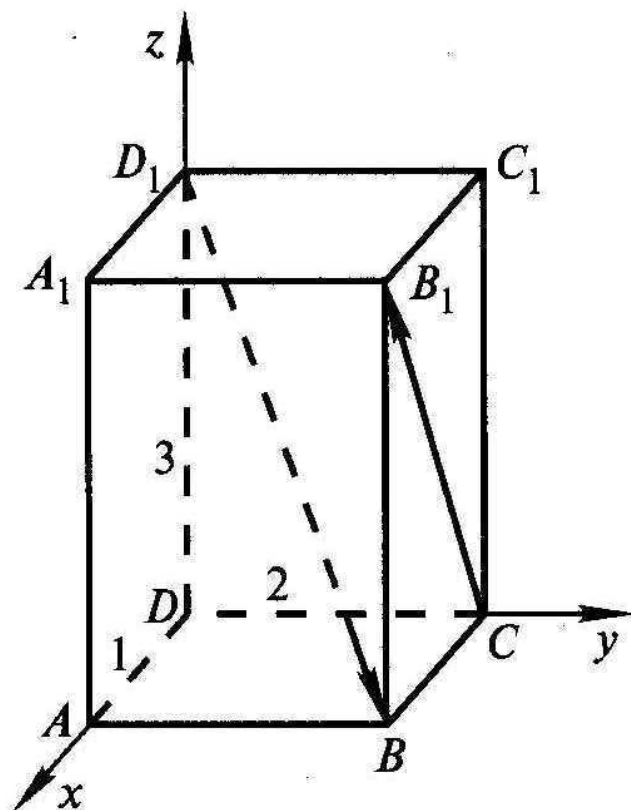
$$\sin \varphi = |\cos \theta|$$

$$\sin \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ,  
 $DA = 1$ ,  $DC = 2$ ,  $DD_1 = 3$ .

Найдите угол между прямыми  $CB_1$  и  $D_1B$ .

Решение.



Введем систему координат  $Dxyz$ .  
 Рассмотрим направляющие векторы  
 $\vec{D_1B}$  и  $\vec{CB_1}$  прямых  $D_1B$  и  $CB_1$ .

$$D_1(0; 0; 3), B(1; 2; 0),$$

$$\vec{D_1B} \{1; 2; -3\}, C(0; 2; 0),$$

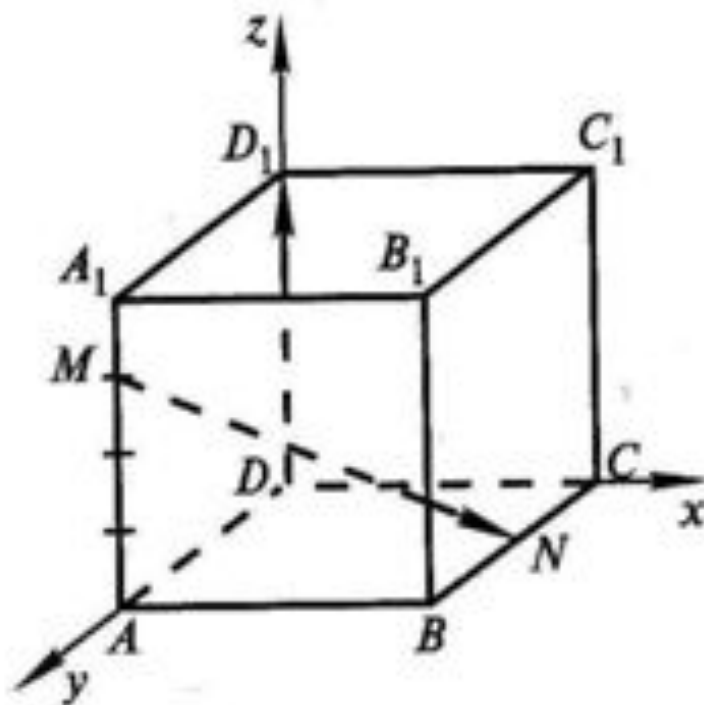
$$B_1(1; 2; 3), \vec{CB_1} \{1; 0; 3\}.$$

Пусть  $\varphi$  — искомый угол,

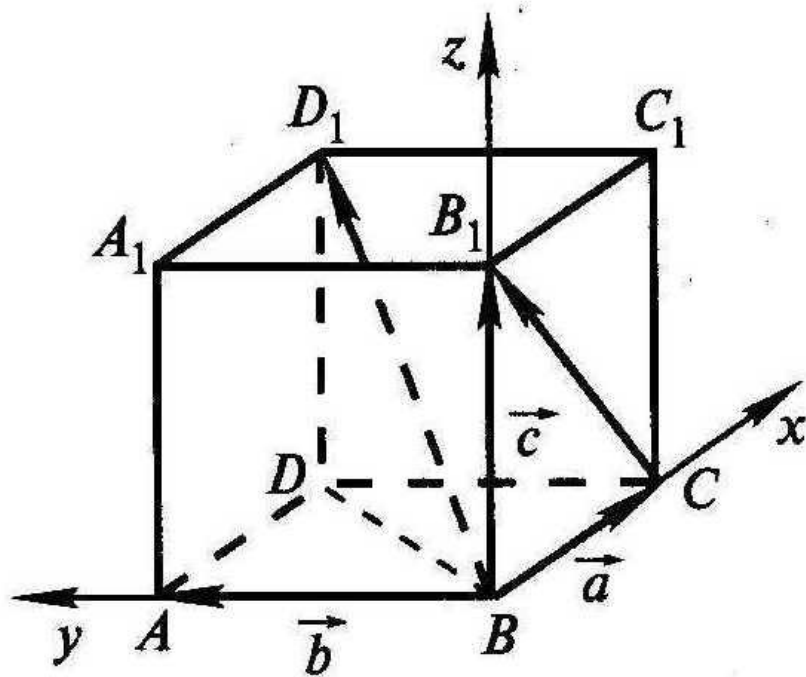
$$\cos \varphi = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 3|}{\sqrt{1 + 4 + 9} \cdot \sqrt{1 + 0 + 9}},$$

$$\cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{35}}, \varphi \approx 47^\circ 28'.$$

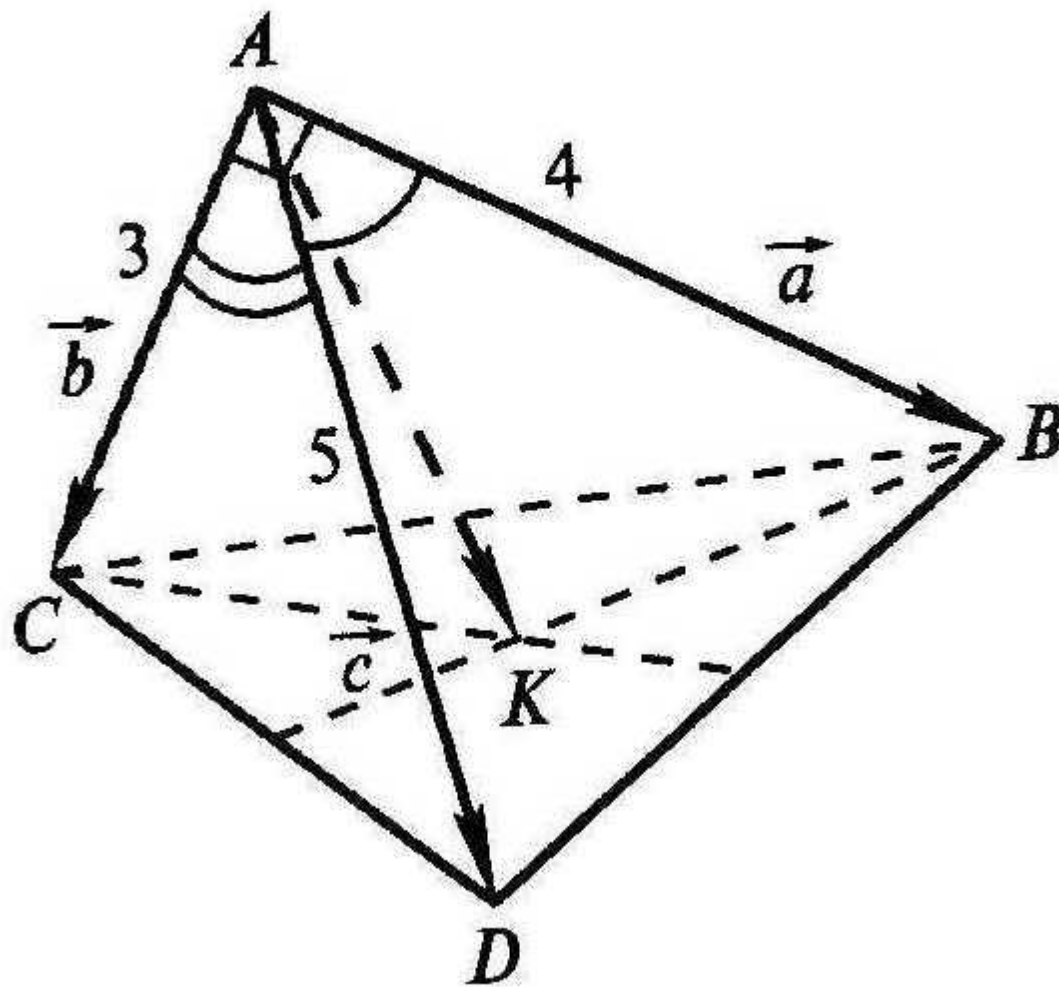
# №466(a)



№ 471



№ 475





# Самостоятельная работа

## В а р и а н т 1

1. Даны векторы  $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{k}$ . Вычислите  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

2. Вычислите угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ , если  $A(\sqrt{3}; 1; 0)$ ,  $B(0; 0; 2\sqrt{2})$ ,  $C(0; 2; 0)$ ,  $D(\sqrt{3}; 1; 2\sqrt{2})$ .

## В а р и а н т 2

1. Даны векторы  $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$  и  $\vec{b} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$ . Вычислите  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

2. Вычислите угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ , если  $A(6; -4; 8)$ ,  $B(8; -2; 4)$ ,  $C(12; -6; 4)$ ,  $D(14; -6; 2)$ .

# Домашнее задание

**п. 48**

**№ 465 (устно)**

**№ 468 (а), № 477**