Выпуклость и вогнутость функции

Презентация к уроку по учебнику «Алгебра и начала анализа, 10-11»
под редакцией Ш.А.Алимова , § 53

Автор презентации Бартош Наталья Владимировна,
учитель математики 587 гимназии г. Санкт-Петербурга

Самостоятельная работа

Построить график функции

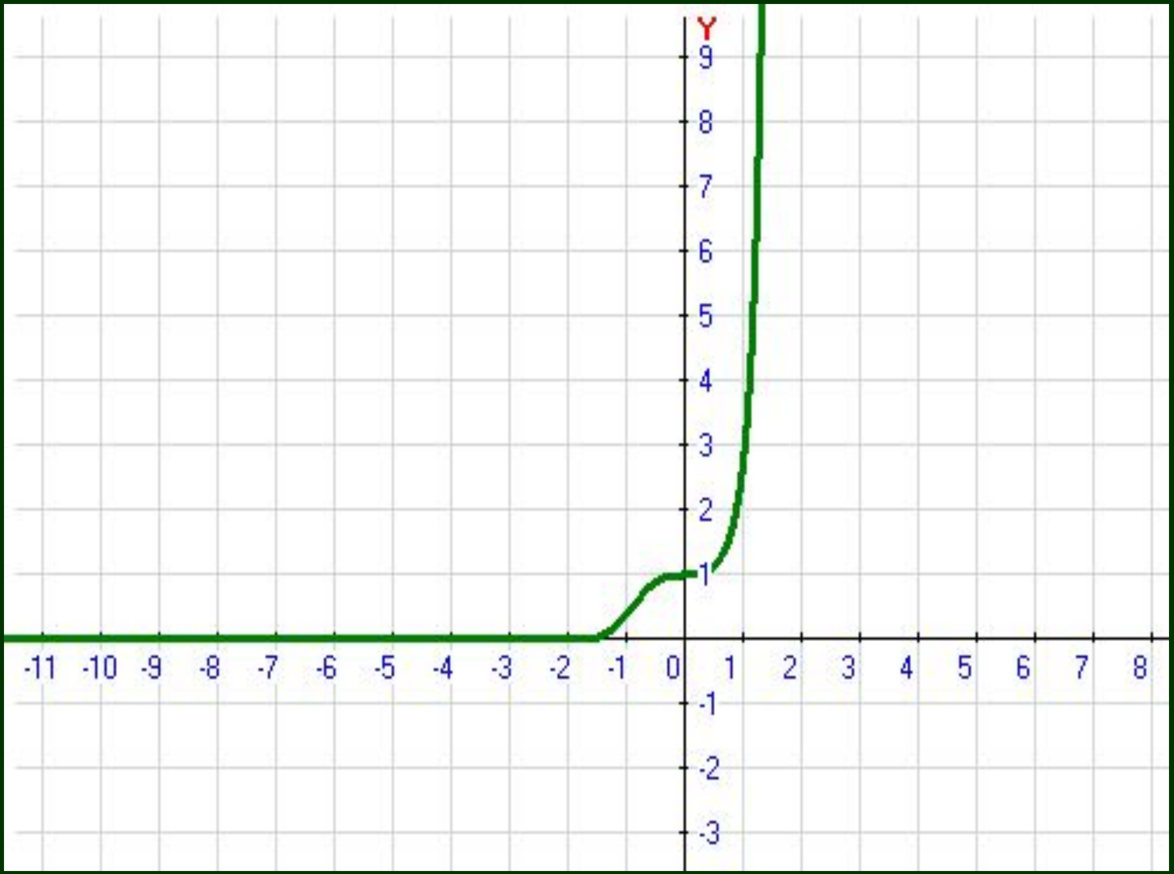
Вариант 1

$$y = e^{x^3}$$

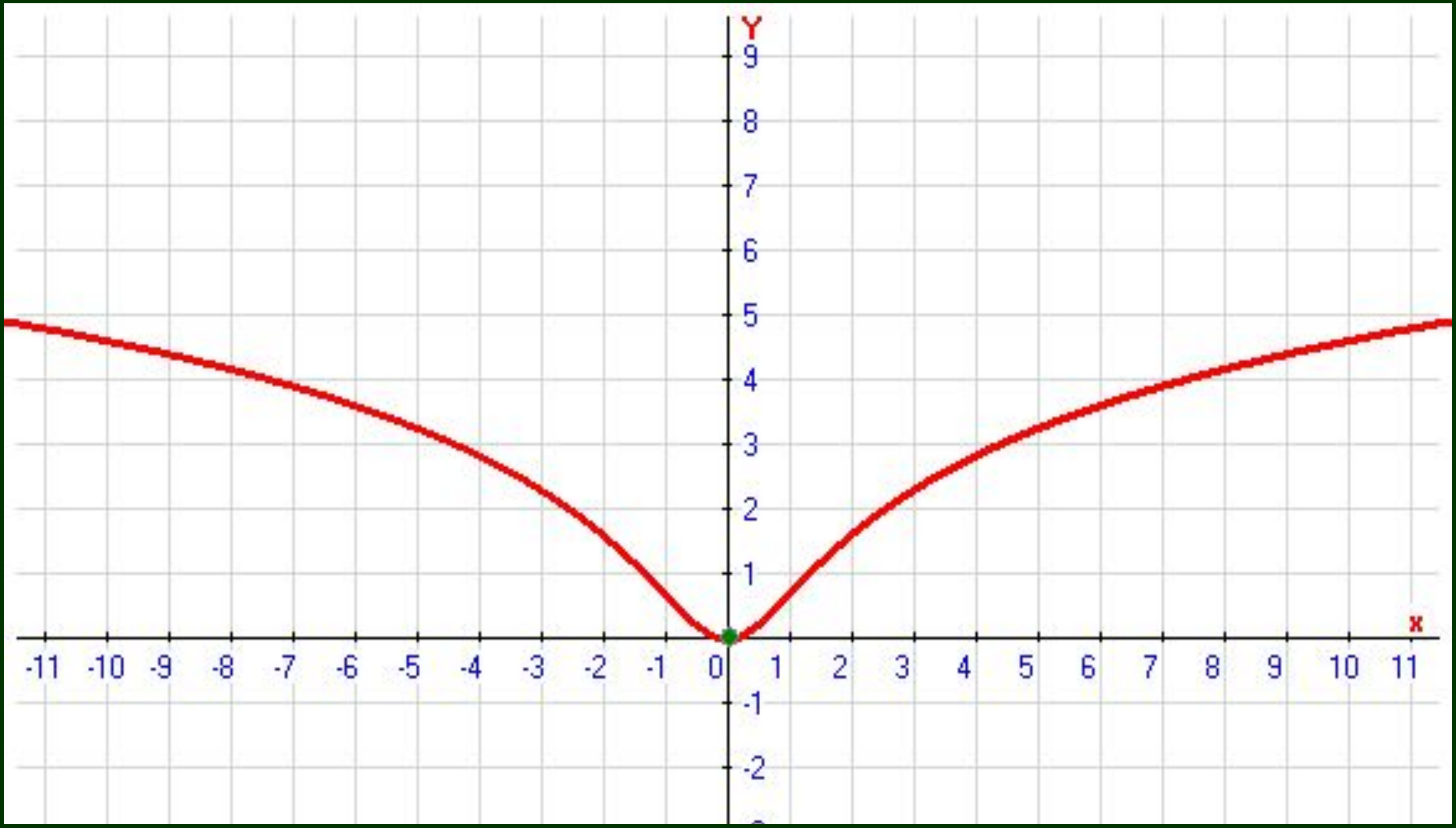
Вариант 2

$$y = \ln(x^2 + 1)$$

$$y = e^{x^3}$$



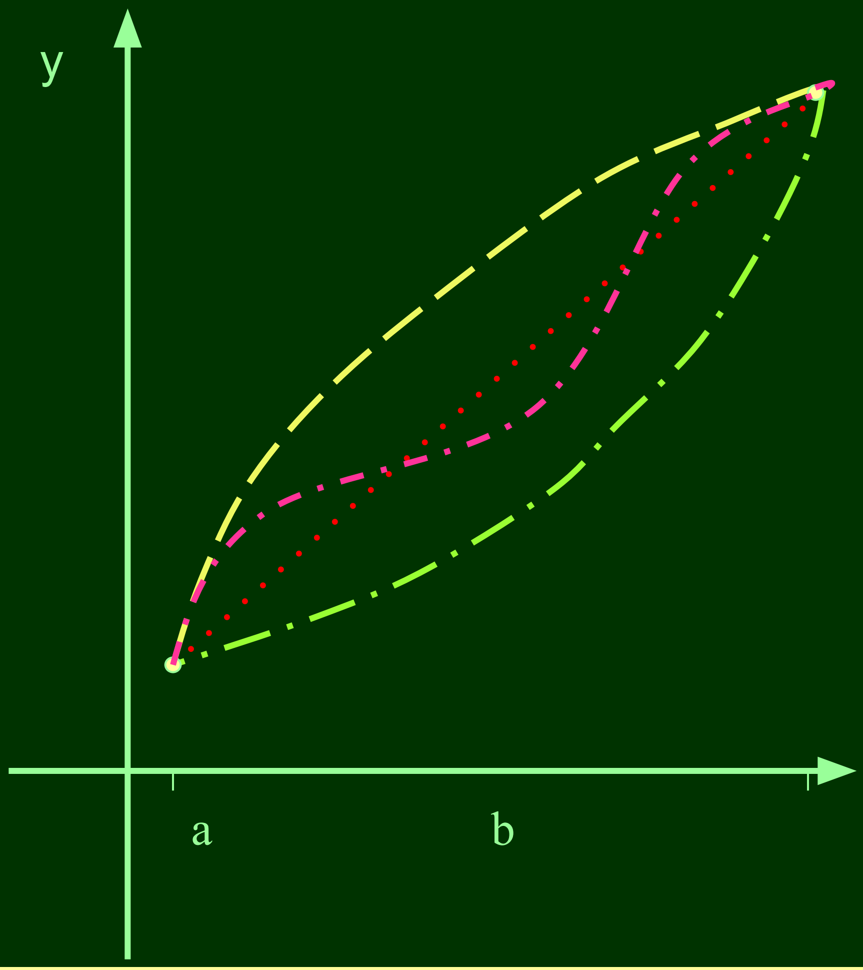
$y = \ln(x^2 + 1)$



Дана функция y = f (x)

На интервале (a, b)
функция y = f (x) непрерывна и дифференцируема,
причем f '(x) >0

Постройте эскиз графика
функции y = f (x) интервале (a, b)



Дана функция y = f (x)

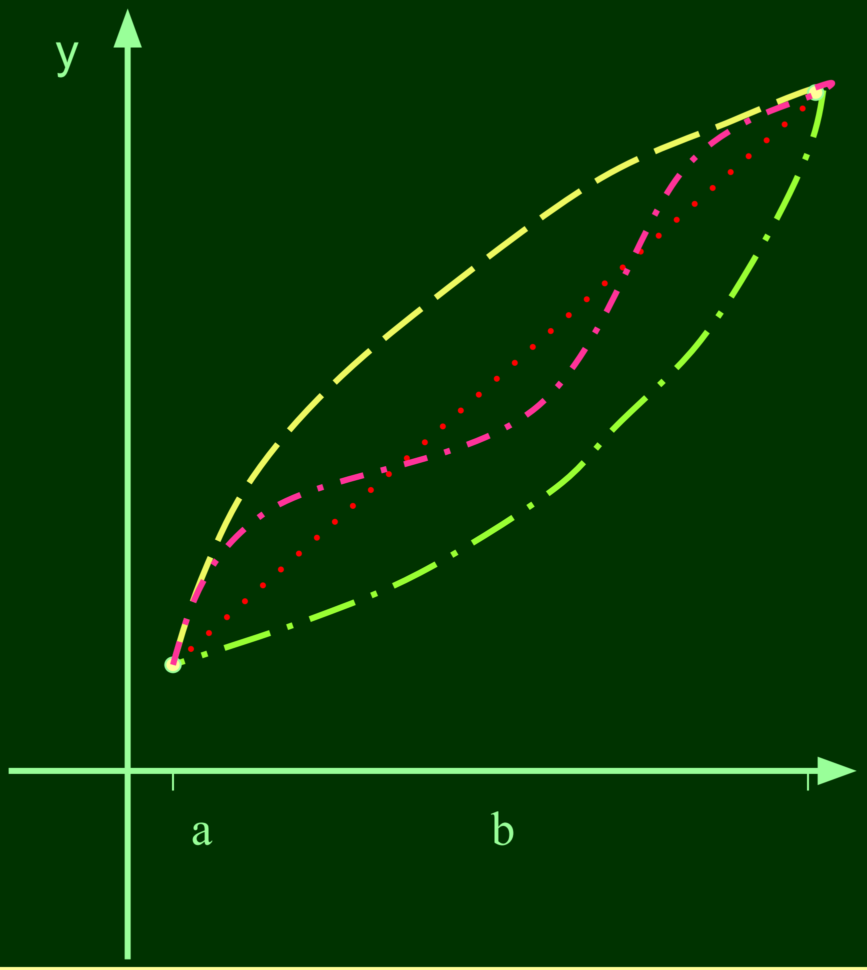
Чем отличается поведение линий?

Одна из них – отрезок прямой

Другая проходит над отрезком

Третья – под отрезком

А четвертая – частично над отрезком, частично под ним



В математике для обозначения такого поведения существуют специальные понятия:

выпуклости и

вогнутости

графика функции

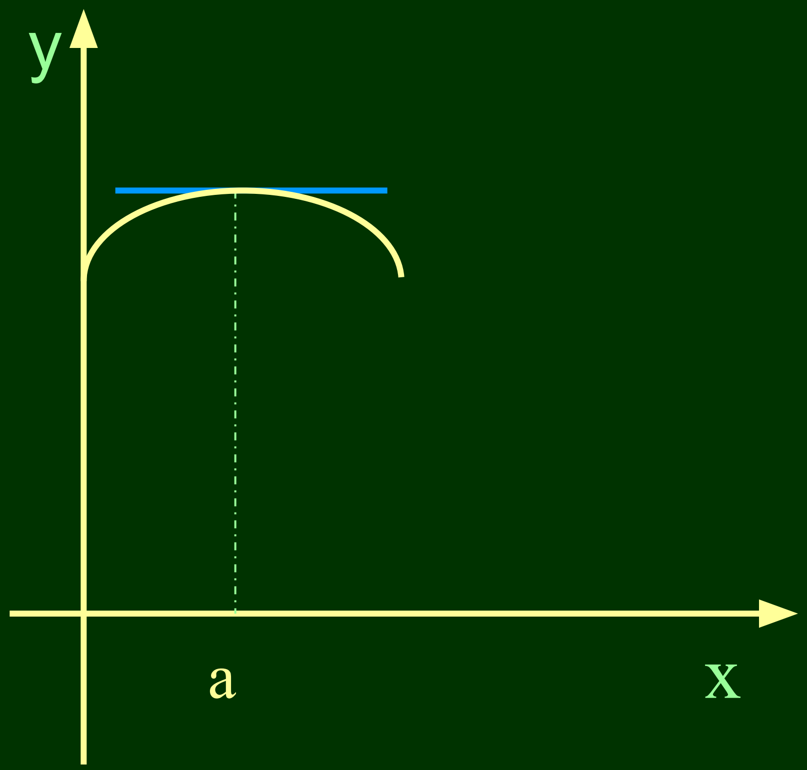
Выпуклость и вогнутость функции

Геометрический смысл второй производной

Выпуклая вверх

(выпуклая кривая)

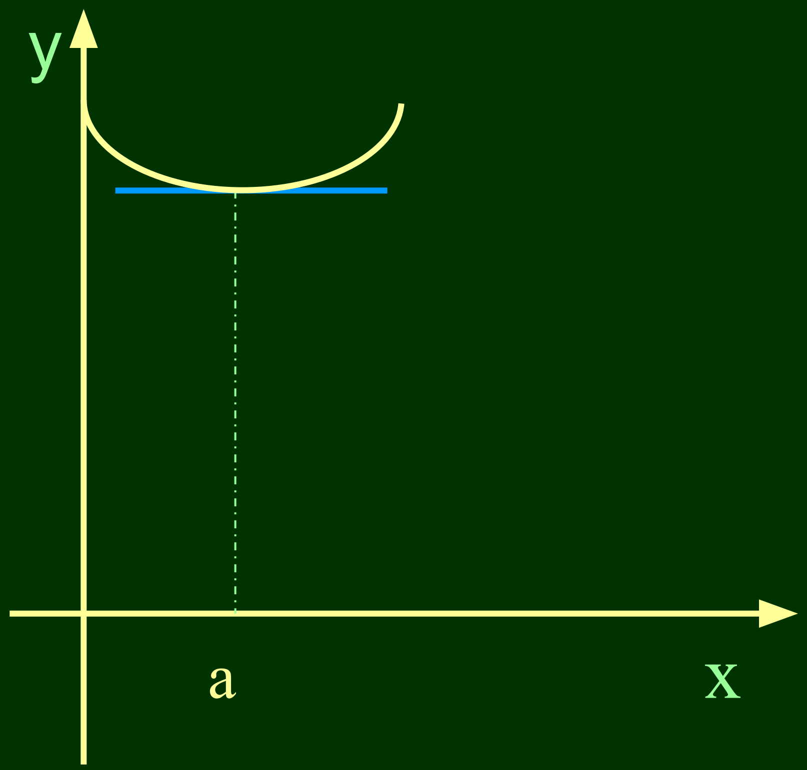
Кривая называется *выпуклой вверх* в точке x = a, если в некоторой окрестности этой точки *она расположена* ***под*** *своей касательной*



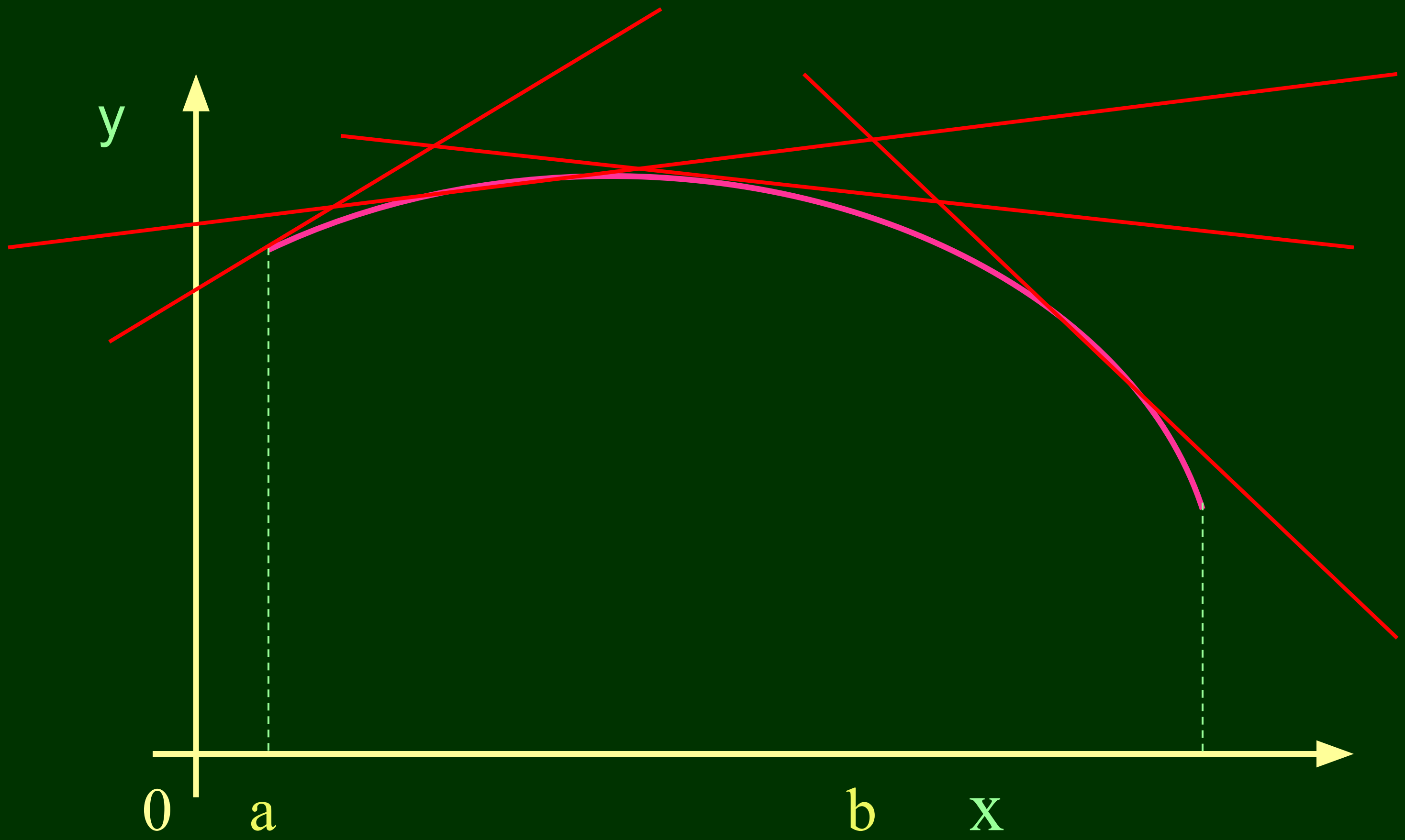
Выпуклая вниз

(вогнутая кривая)

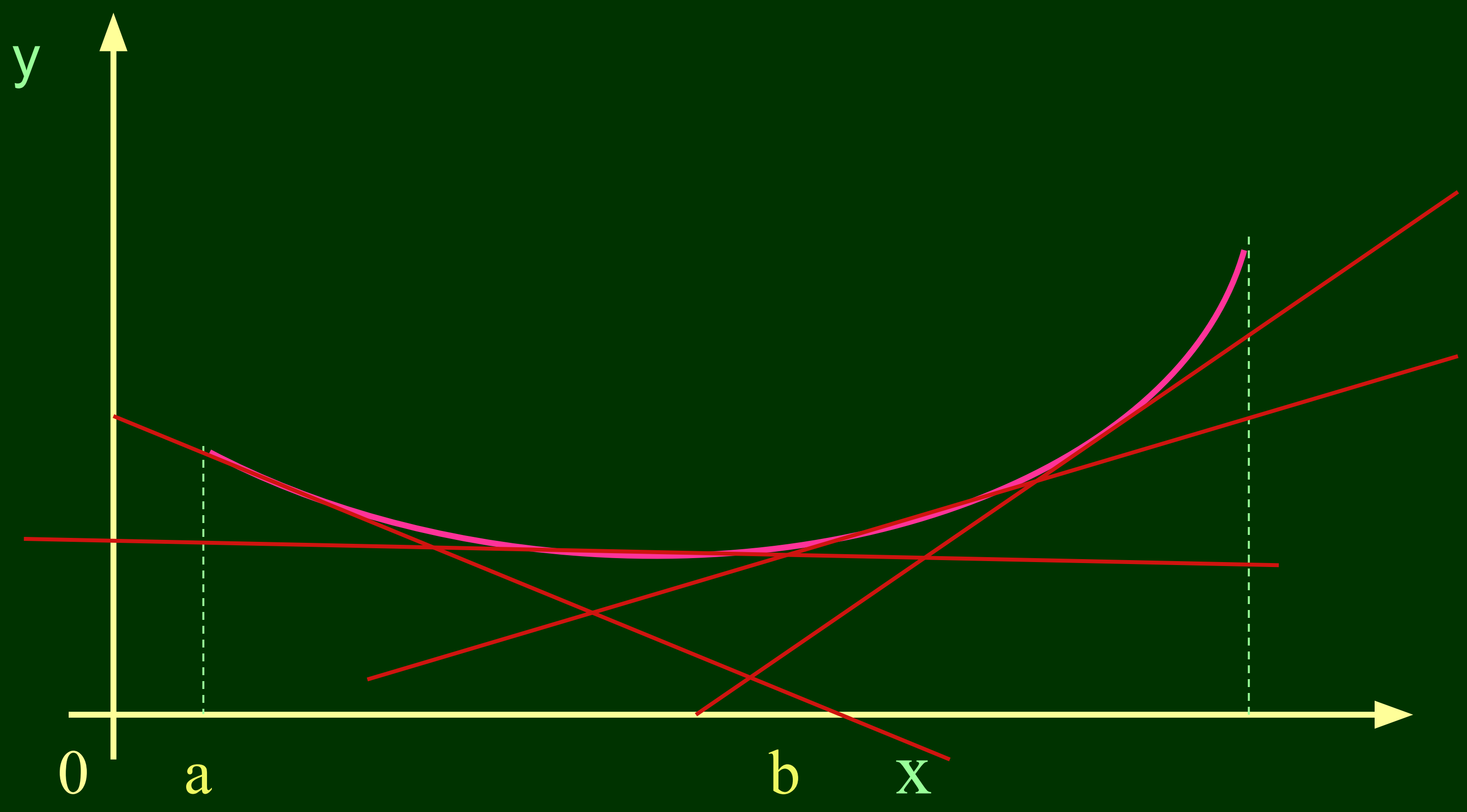
Кривая называется *выпуклой вниз* в точке x = a, если в некоторой окрестности этой точки *она расположена* ***над*** *своей касательной*



Кривая выпуклая вверх на интервале (выпуклая)



Кривая выпуклая вниз на интервале (вогнутая)



Как найти интервалы выпуклости и вогнутости?

График функции y = f (x) – вогнутая кривая

В точках М1, М2, М3… проведены касательные

Величина углов α1, α2, α3… растет,

увеличиваются и тангенсы этих углов

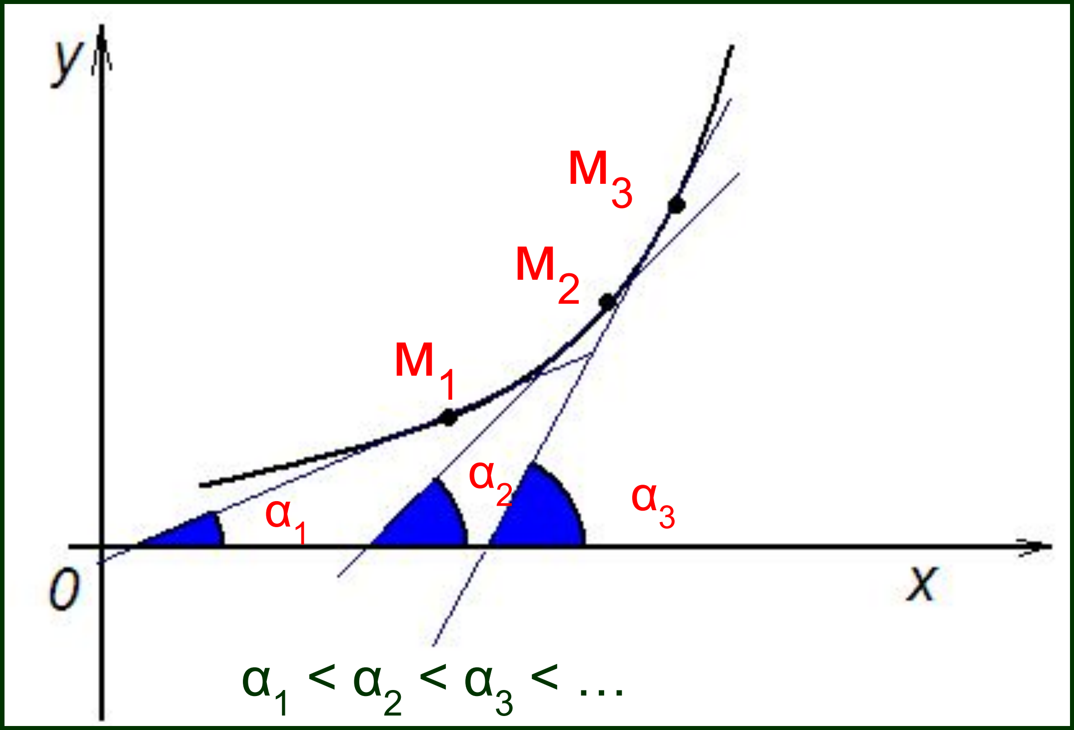


График функции y = f (x) – вогнутая кривая

В точках M1, M2, M3… проведены касательные

тангенсы углов α1, α2, α3… *увеличиваются*

tgα = f′(x) ,
следовательно, возрастает функция f′(x)

Если функция возрастает, то ее производная положительна

Производная функции f′(x) – это производная производной
$(f'(x))' = f''(x)$ и $f''(x) > 0$

Вывод:
Если график функции – вогнутая кривая, то вторая производная этой функции – положительна.

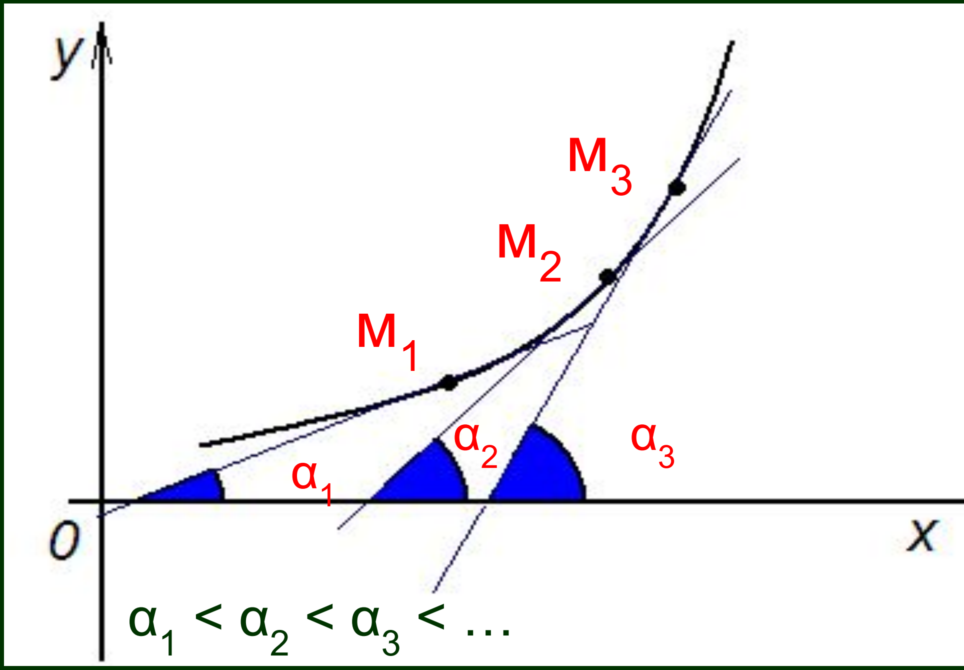


График функции $y = f(x)$ – выпуклая кривая

В точках М1, М2, … проведены касательные

тангенсы углов $\alpha1$, $\alpha2$, $\alpha3$… *убывают*

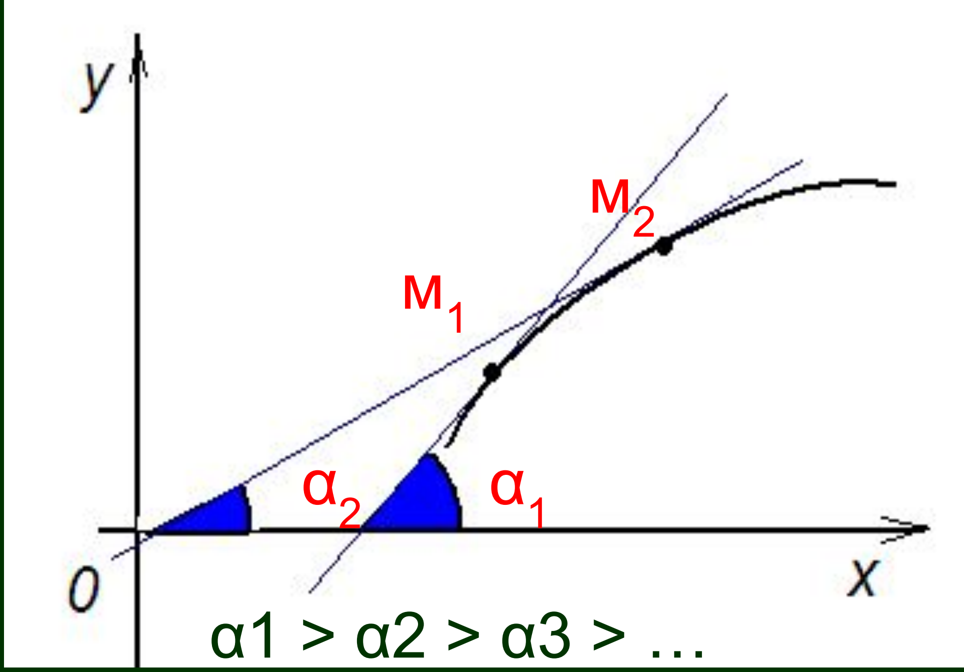
$tg\alpha = f'(x)$, следовательно,
убывает функция $f'(x)$

производная функции $y = f'(x)$

$(f'(x))' = f''(x)$ - отрицательна, т.е.

$f''(x) < 0$

Вывод:
Если график функции – выпуклая кривая, то вторая производная этой функции – отрицательна.



Если вторая производная функции

y = f (x)

на данном интервале положительна, то кривая вогнута

а если отрицательна – выпукла в этом промежутке

Точки, в которых выпуклость меняется на вогнутость или наоборот, называются **точками перегиба**

Правило нахождения интервалов выпуклости и вогнутости графика функции:

Найти:

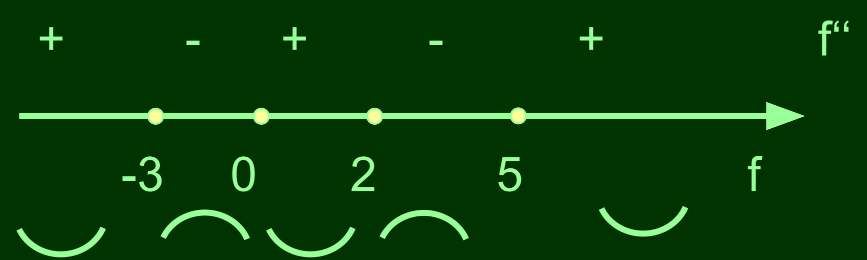
1. Вторую производную
2. Точки, в которых она равна нулю или не существует
3. Интервалы, на которые область определения разбивается этими точками
4. Знаки второй производной в каждом интервале

Если $f''(x) < 0$, то кривая выпукла,

если $f''(x) > 0$ – вогнута.

Исследование функции с помощью второй производной

- Интервалы выпуклости:
- (-3, 0) и (2, 5)
- Интервалы вогнутости:
- (-∞, -3), (0, 2) и (5, +∞)



- $x = -3$, $x = 0$, $x = 2$ $x = 5$ – точки перегиба

График функции

y = f (x) –

вогнутая кривая

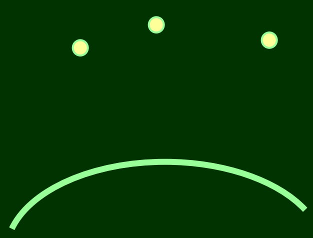
«+»

График функции

y = f (x) –

выпуклая кривая

«-»



Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба

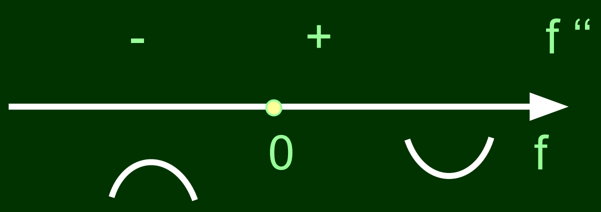
- Вариант 1
- $y = x^3 - 12x + 4$

- Вариант 2
- $y = \frac{1}{4} x^4 - 3/2\, x^2$

Проверка
Вариант 1

- $y = x^3 - 12x + 4$
- x – любое число
- $f'(x) = 3x^2 - 12$
- $f''(x) = 6x$
- $6x = 0$
- $x = 0$

- Интервалы выпуклости:
- $(-\infty, 0)$
- Интервалы вогнутости:
- $(0, +\infty)$

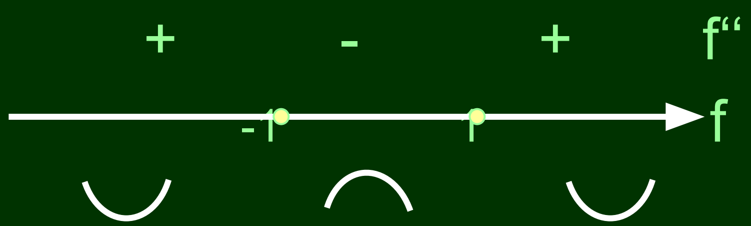


$x = 0$ – точка перегиба

Проверка
Вариант 2

- $y = \frac{1}{4} x^4 - 3/2\, x^2$
- x – любое число
- $f'(x) = x^3 - 3x$
- $f''(x) = 3x^2 - 3 =$
- $3(x - 1)(x + 1)$
- $x = 1$
- $x = -1$

- Интервалы выпуклости:
- $(-1, 1)$
- Интервалы вогнутости:
- $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$



- $x = 1$ и $x = -1$ – точки перегиба

Спасибо за работу
Успехов!