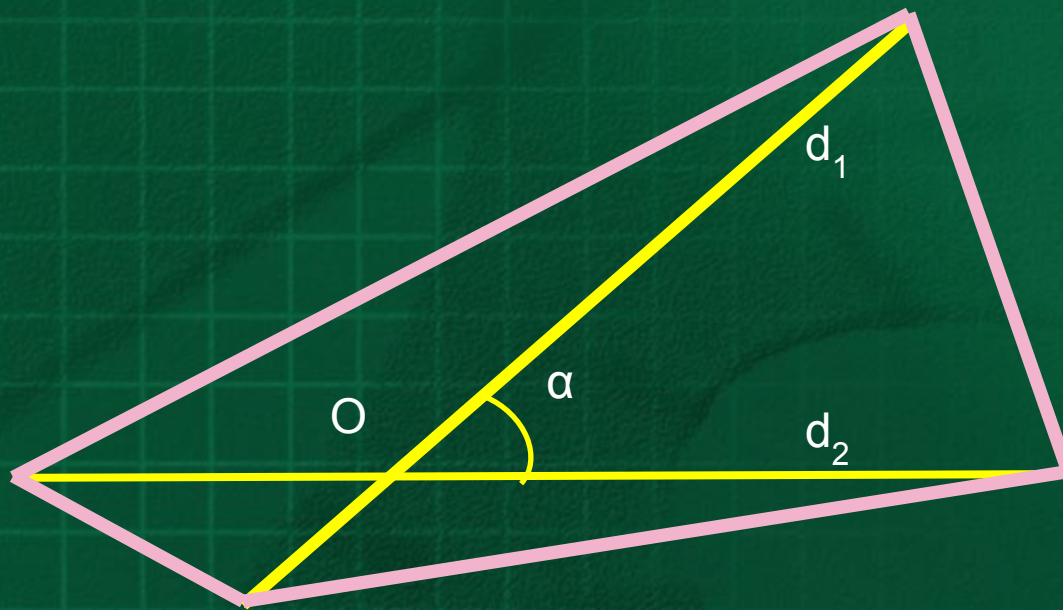


*ГОСУДАРСТВЕННАЯ ИТОГОВАЯ АТТЕСТАЦИЯ  
ОСНОВНОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН  
МАТЕМАТИКА 9 КЛАСС  
МОДУЛЬ ГЕОМЕТРИЯ (часть 2)*

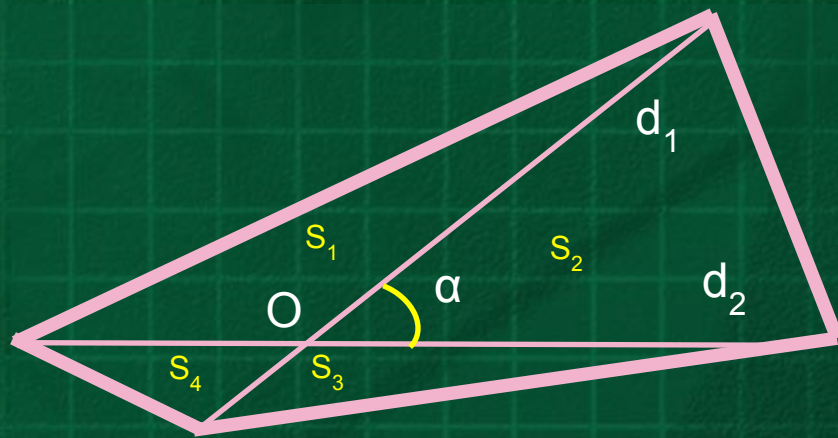
**Выпуклые четырёхугольники  
Специфика параллелограммов  
Специфика трапеций**



**Площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними:**

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$$





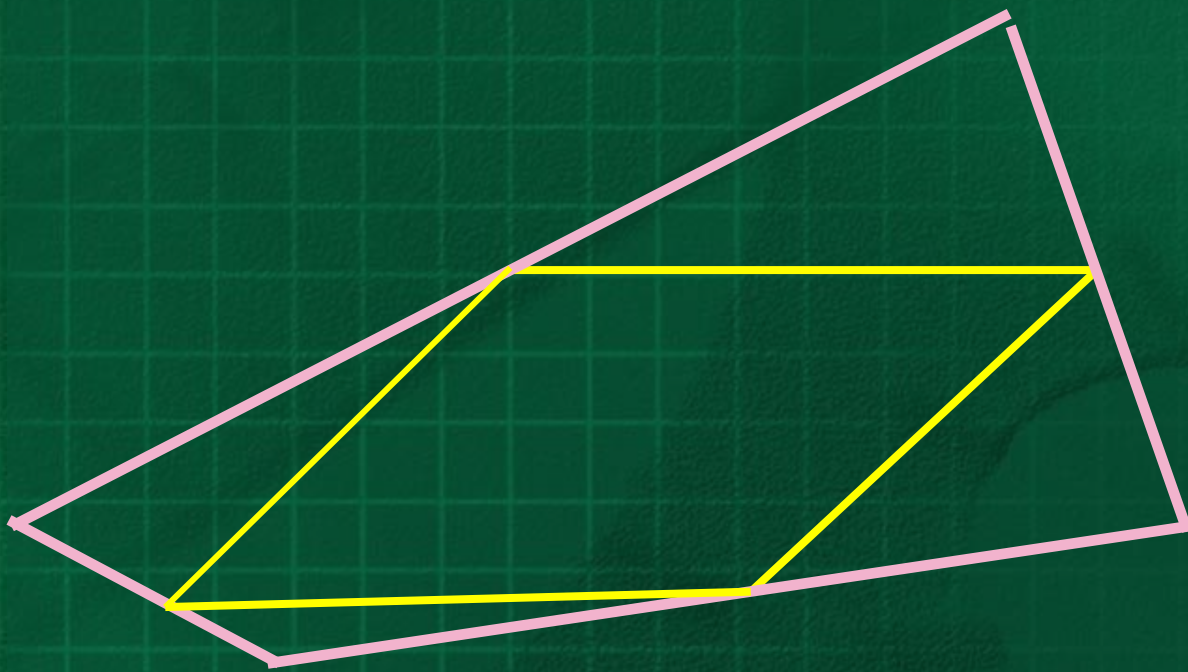
Диагонали выпуклого четырёхугольника делят его на части так, что произведения площадей треугольников, прилежающих к противоположным сторонам четырёхугольника, равны:

$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$$

Обоснование: найти площадь каждого из образованных диагоналями четырёх треугольников по формуле

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

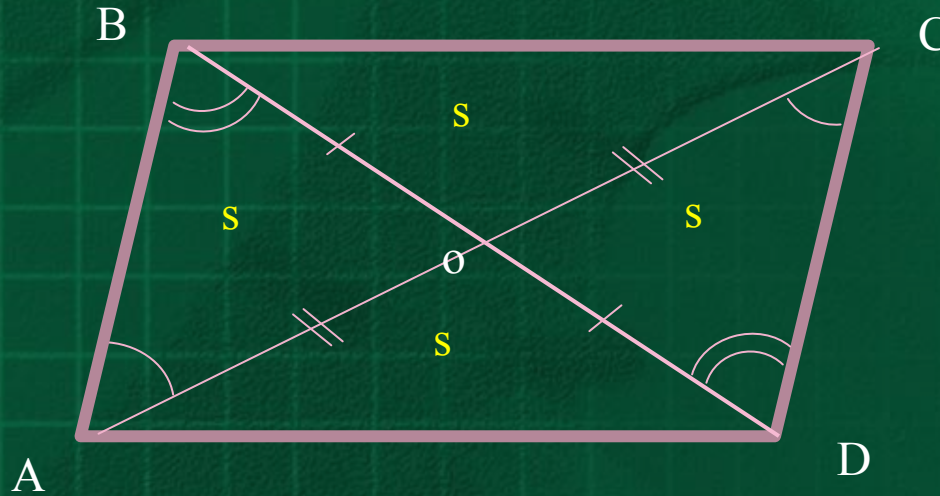
Затем сложить эти площади (*свойство 1*) или перемножить (*свойство 2*).



**Средины сторон выпуклого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади данного четырёхугольника.**

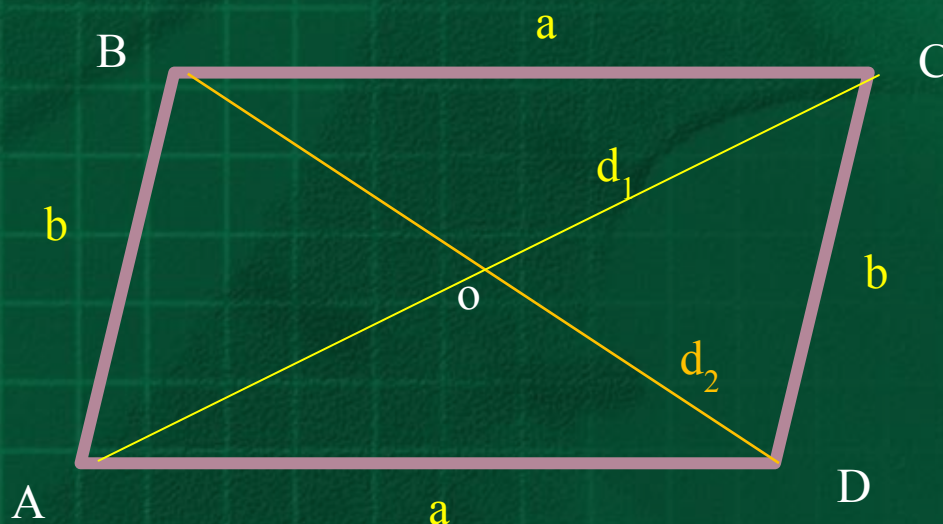


# Специфика параллелограмма



1. Диагонали параллелограмма делят его на две пары равных треугольников; площади всех этих треугольников равны между собой.

# Специфика параллелограмма

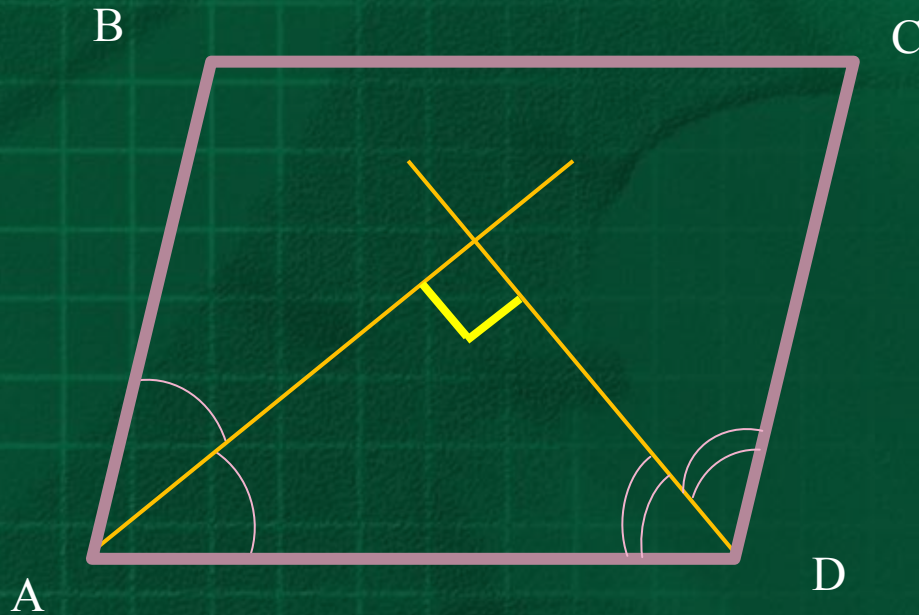


2. В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$

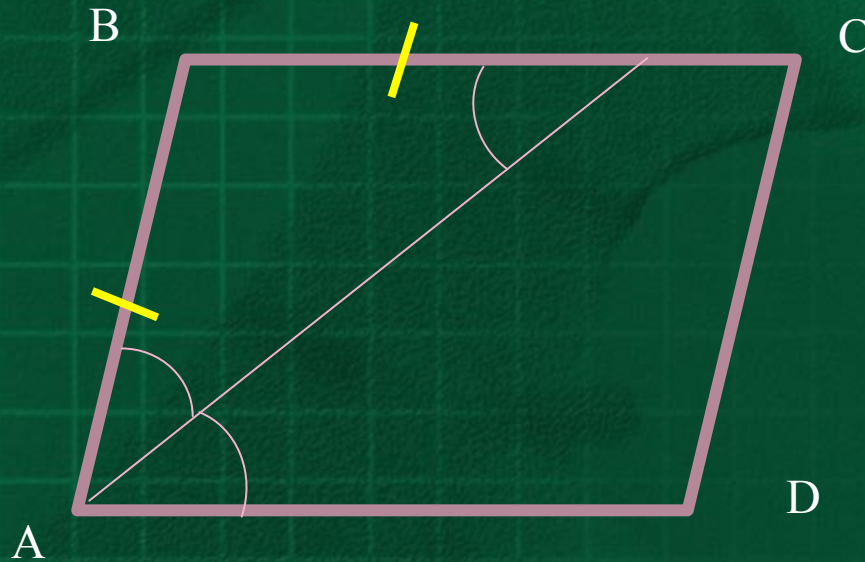


# Специфика параллелограмма



3. Биссектрисы углов, прилежащих к любой из сторон параллелограмма, перпендикулярны.

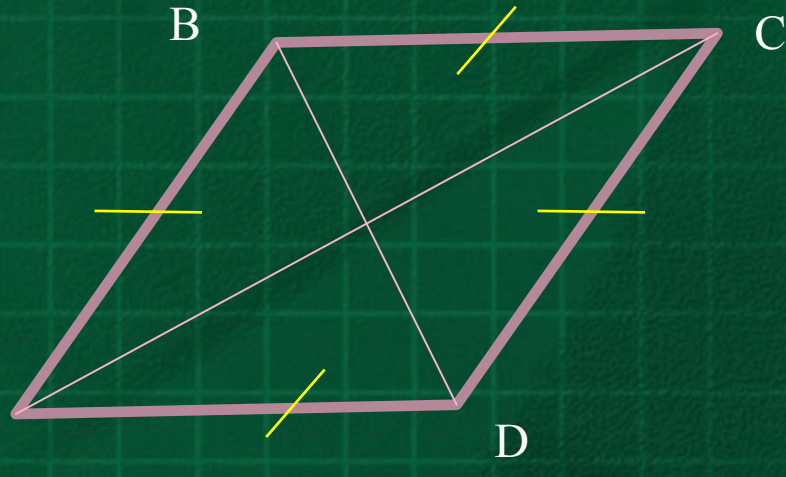
# Специфика параллелограмма



**4. При проведении биссектрисы любого угла параллелограмма получается равнобедренный треугольник.**



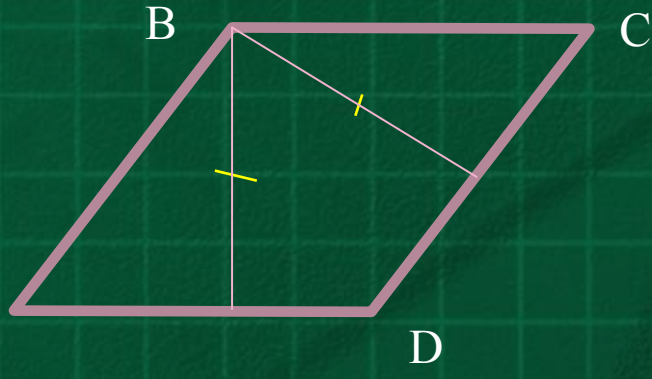
# Специфика параллелограмма



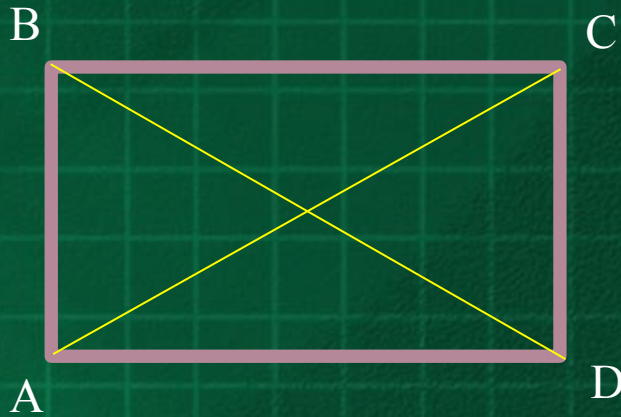
1. Параллелограмм, у которого все стороны равны, является ромбом.
1. Параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны, является ромбом.
3. Параллелограмм, диагонали которого являются биссектрисами его углов, является ромбом.

# Специфика параллелограмма

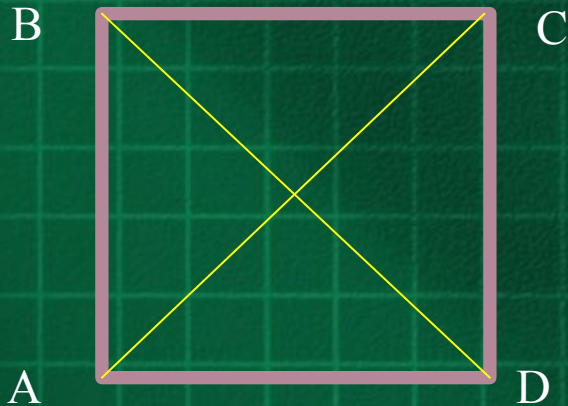
4. Параллелограмм, имеющий равные высоты, является ромбом.



5. Параллелограмм, диагонали которого равны, является прямоугольником.

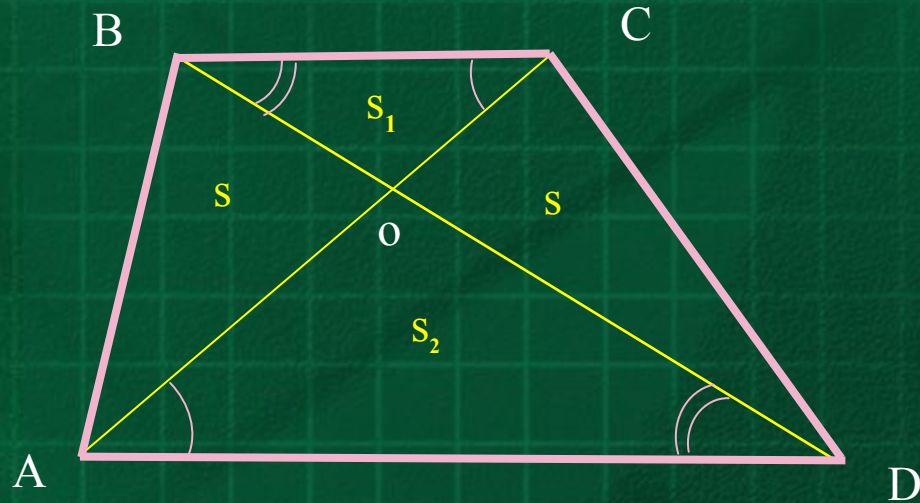


6. Параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны и равны, является квадратом.





# Специфика трапеций

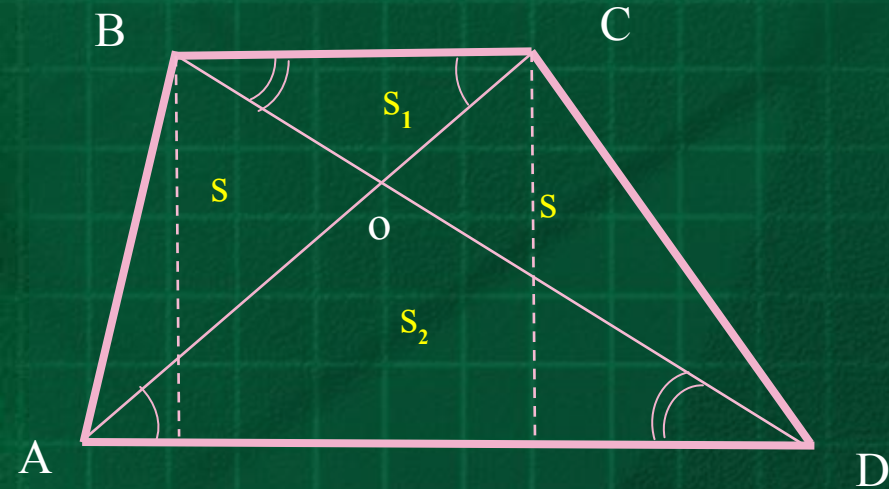


1. Диагонали трапеции, пересекаясь, образуют четыре треугольника, два из которых равновелики, а два других – подобны с коэффициентом подобия равным отношению оснований трапеции.

$\triangle OAD \sim \triangle OCB$  (по двум равным углам),

$S_{OAD} : S_{OCB} = k^2$ , где  $k = AD:BC = OA:OC = OD:OB$ .

# Специфика трапеций



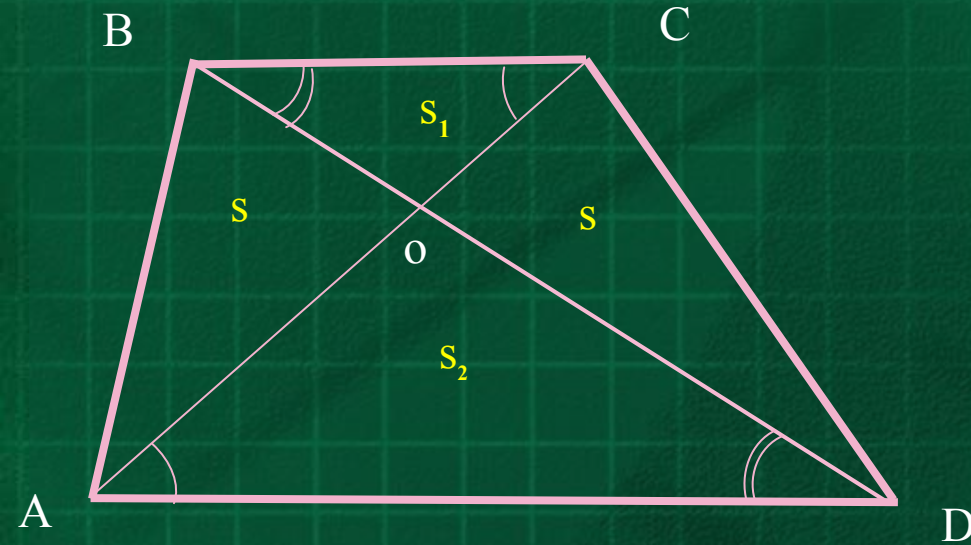
2.  $S_{BAD} = S_{CAD}, S_{ABC} = S_{DBC}$  (как площади треугольников, имеющих соответственно одинаковые основания и высоты).

3.  $S_{OAB} = S_{OCD}$  (м.к.  $S_{OAB} = S_{ABC} - S_{OBC} = S_{DBC} - S_{OBC} = S_{OCD}$ ).

4.  $S_{BAD} : S_{DBC} = AD : BC$  ( $S_{BAD} = 0,5 \cdot AD \cdot h, S_{DBC} = 0,5 \cdot BC \cdot h$ ).



# Специфика трапеций

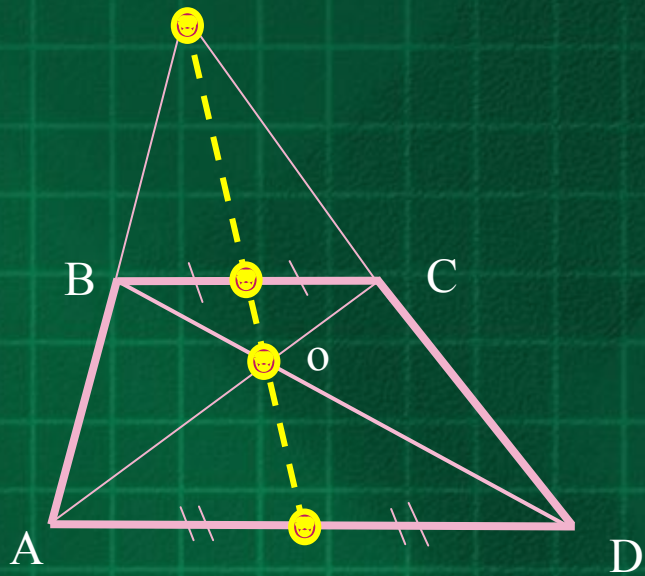
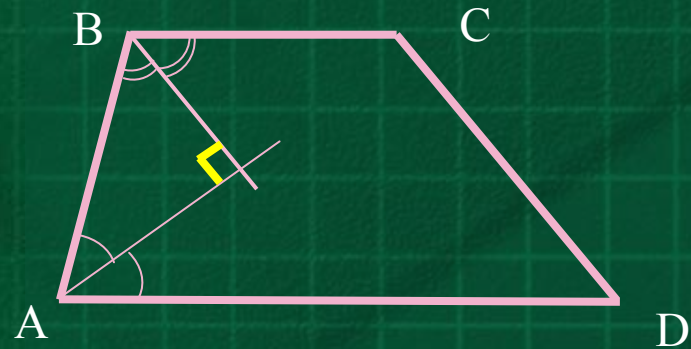


5. Диагонали трапеции делят её на четыре треугольника так, что произведение площадей тех из них, которые прилежат к основаниям, равно квадрату площади треугольника, прилежащего к любой из боковых сторон трапеции:  $S_1 S_2 = S^2$ .

$$\begin{aligned} (S_{OAD} = S_1 = 0,5 \cdot OB \cdot OC \cdot \sin \alpha, \quad S_{OCB} = S_2 = 0,5 \cdot OA \cdot OD \cdot \sin \alpha, \\ S_{OAB} = S = 0,5 \cdot OA \cdot OB \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = 0,5 \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \alpha, \\ S_{OCD} = S = 0,5 \cdot OC \cdot OD \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = 0,5 \cdot OC \cdot OD \cdot \sin \alpha, \text{ тогда } S_1 S_2 = S^2). \end{aligned}$$

## Специфика трапеций

6. Биссектрисы углов, прилежащих к боковым сторонам трапеции, перпендикулярны  
(следует из того факта, что сумма этих углов равна  $180^\circ$  как сумма односторонних углов при параллельных прямых и секущей).

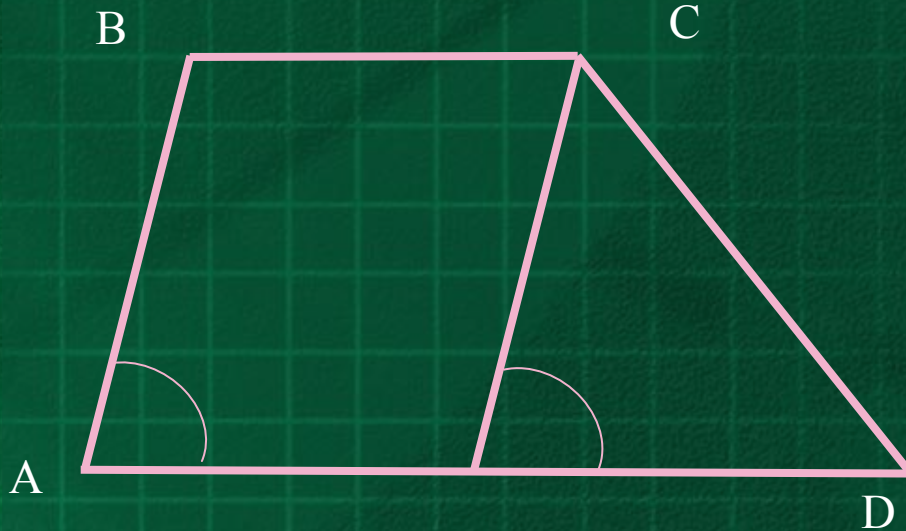


7. Точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон, середина верхнего и середина нижнего основания – лежат на одной прямой.



# Специфика трапеций

Основные (наиболее распространённые)  
дополнительные построения в задачах на  
трапецию.

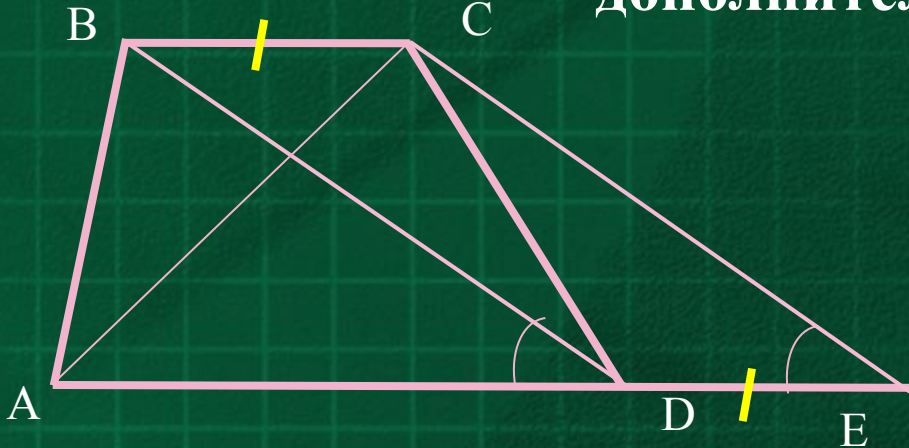


## Построение 1

Через вершину меньшего основания трапеции провести прямую, параллельную её боковой стороне, до пересечения со вторым основанием; трапеция разбивается на параллелограмм и треугольник.

# Специфика трапеций

Основные (наиболее распространённые)  
дополнительные построения в задачах на  
трапецию



## Построение 2

Из вершины  $C$  меньшего основания трапеции  $ABCD$  провести прямую  $CE$ , параллельную диагонали  $BD$ , до пересечения с  $AD$  в точке  $E$ ; получится треугольник  $ACE$ , две стороны которого равны диагоналям трапеции, а длина третьей равна сумме длин оснований трапеции

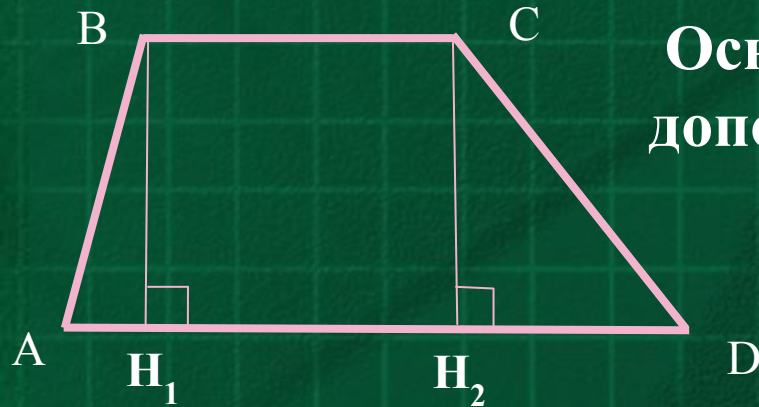
$$AE = AD + DE.$$

При этом площадь трапеции  $ABCD$  равна площади образованного треугольника  $ACE$ :  $S_{ABCD} = S_{ACE}$



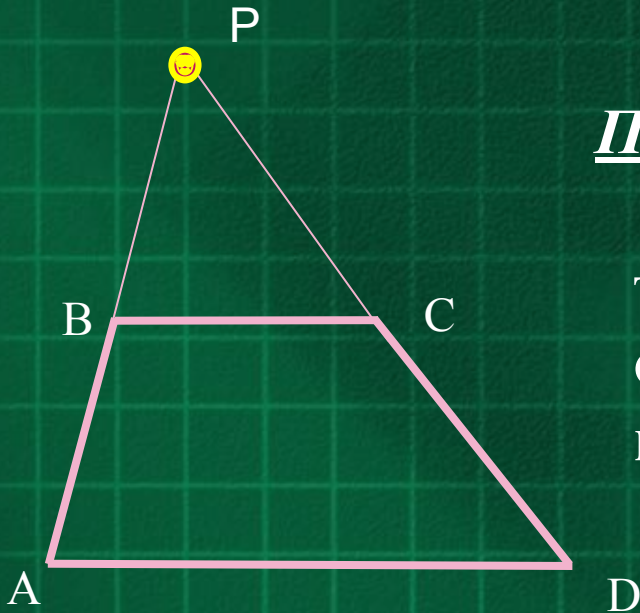
# Специфика трапеций

Основные (наиболее распространённые)  
дополнительные построения в задачах на  
трапецию



## Построение 3

Из вершин меньшего основания трапеции  
опустить две высоты  $BH_1$  и  $CH_2$ .

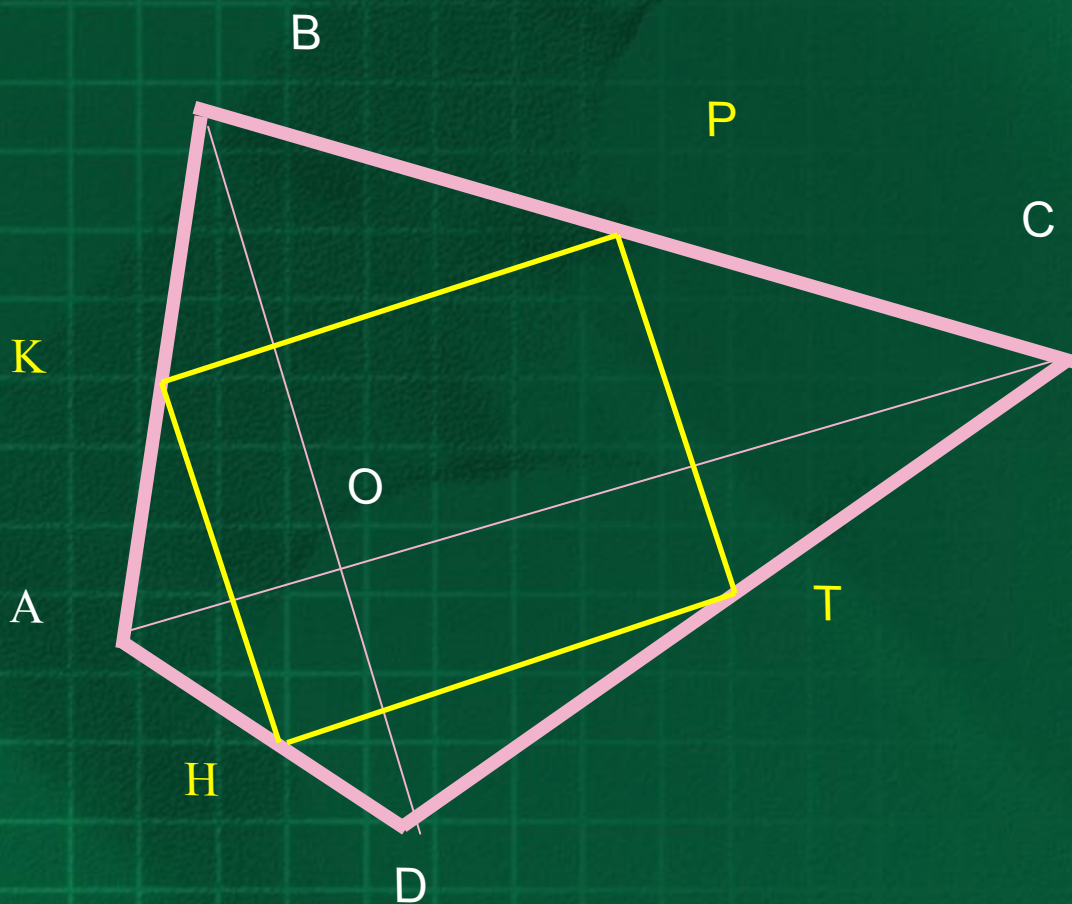


## Построение 4

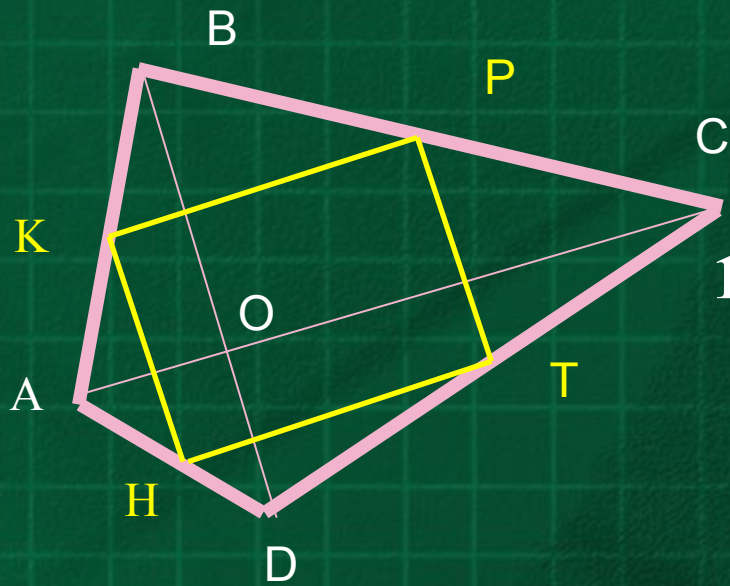
Достроить трапецию  $ABCD$  до  
треугольника  $APD$ , вершина  $P$  которого  
образуется при пересечении  
продолжений боковых сторон трапеции.

*Задача №1. (Тренировочные варианты Иркутск 2013г.)*

Найдите площадь выпуклого четырёхугольника с диагоналями 3 и 4, если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон равны.







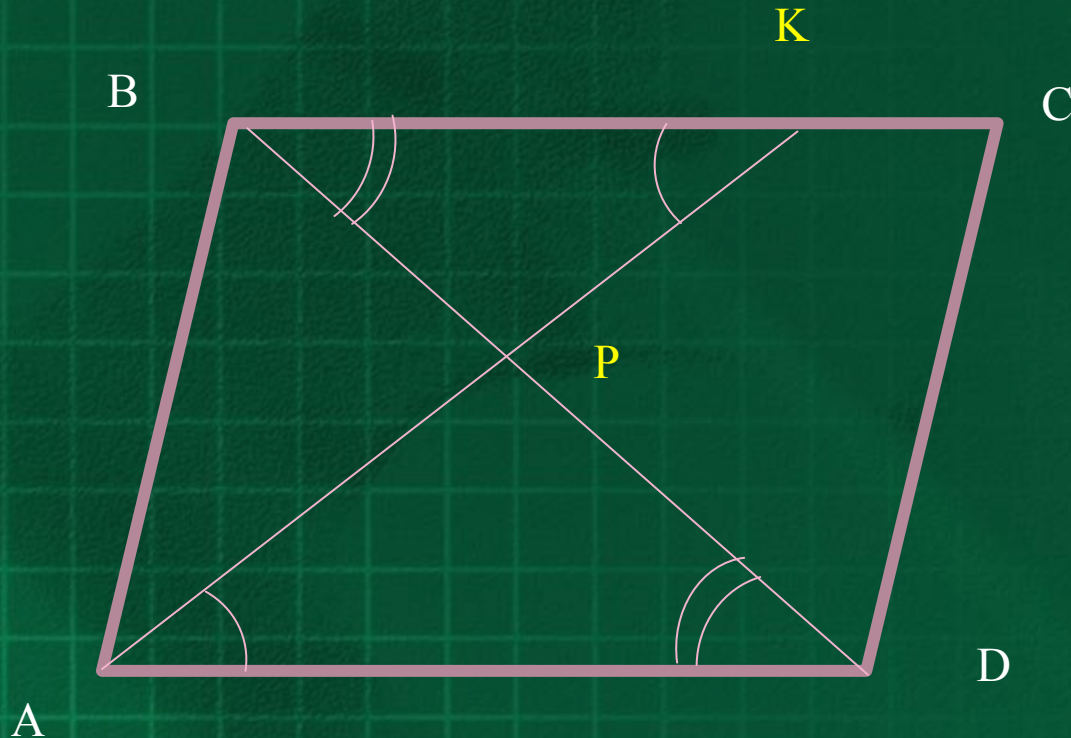
Решение.

1. Точки  $K, P, T, H$  середины сторон четырёхугольника  $ABCD$ .  
Отрезки  $AC$  и  $BD$  – диагонали четырёхугольника  $ABCD$ .
2. По свойству средней линии треугольника отрезки  $KH$  и  $PT$  параллельны диагонали  $BD$  и равны её половине; отрезки  $KP$  и  $HT$  параллельны диагонали  $AC$  и равны её половине. Значит,  $KPTH$  – параллелограмм.
3. По условию  $KT = PH$ ; значит, параллелограмм  $KPTH$  – прямоугольник, угол  $KPT$  – прямой; следовательно, угол между диагоналями  $BD$  и  $AC$  тоже прямой, а значит,  
 $S_{ABCD} = 0,5 \cdot BD \cdot AC = 0,5 \cdot 3 \cdot 4 = 6$ .

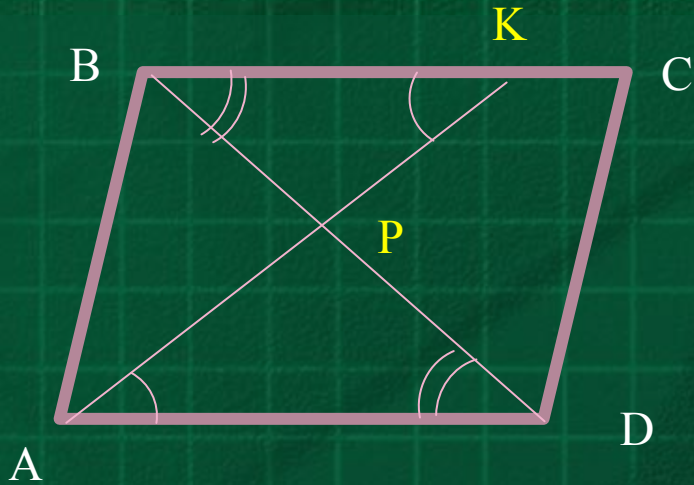
**Ответ: 6.**

*Задача №2. (ФИПИ 2014г.)*

На стороне  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  выбрана точка  $K$ . Отрезки  $AK$  и  $BD$  пересекаются в точке  $P$ . Площадь параллелограмма  $ABCD$  равна 24, а площадь четырёхугольника  $PKCD$  равна 10. Найдите площадь треугольника  $APD$ .







Решение.

1.  $\triangle ABD = \triangle CDB$  (по трём равным сторонам).

$$S_{ABD} = S_{CDB} = 0,5 \cdot S_{ABCD} = 0,5 \cdot 24 = 12;$$

$$S_{KPB} = S_{CDB} - S_{PKCD} = 12 - 10 = 2$$

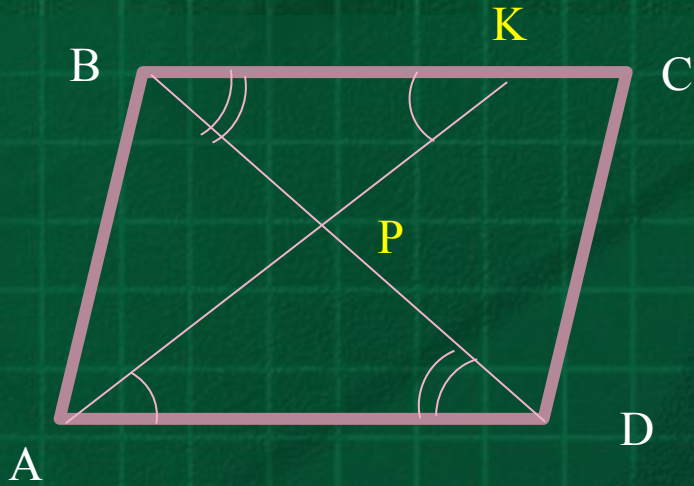
2.  $\triangle APD \sim \triangle KPB$  (по двум равным углам);  $S_{APD} : S_{KPB} = k^2$ ;  
 $AP = k \cdot PK$ ,  $DP = k \cdot PB$

3.  $\triangle ABP$  и  $\triangle BPK$  имеют общую высоту из вершины  $B$ , значит, отношение их площадей равно отношению их оснований, т.е.

$$S_{ABP} : S_{KPB} = AP : PK = k \text{ (из п.2)}$$

4.  $\triangle APD$  и  $\triangle ABP$  имеют общую высоту из вершины  $A$ , значит, отношение их площадей равно отношению их оснований, т.е.

$$S_{APD} : S_{ABP} = DP : PB = k \text{ (из п.2)}$$



5. Из п.3 и п.1  $S_{ABP} = k \cdot S_{KPB} = 2k$

6. Из п.4 и п.5

$$S_{APD} = k \cdot S_{ABP} = k \cdot 2k = 2k^2$$

7.  $S_{ABD} = S_{ABP} + S_{APD} = 2k + 2k^2$ .

Из п.1 следует  $2k + 2k^2 = 12$ .

Корни уравнения  $k^2 + k - 6 = 0$  числа  $-3$  и  $2$ ;

по смыслу задачи  $k = 2$ .

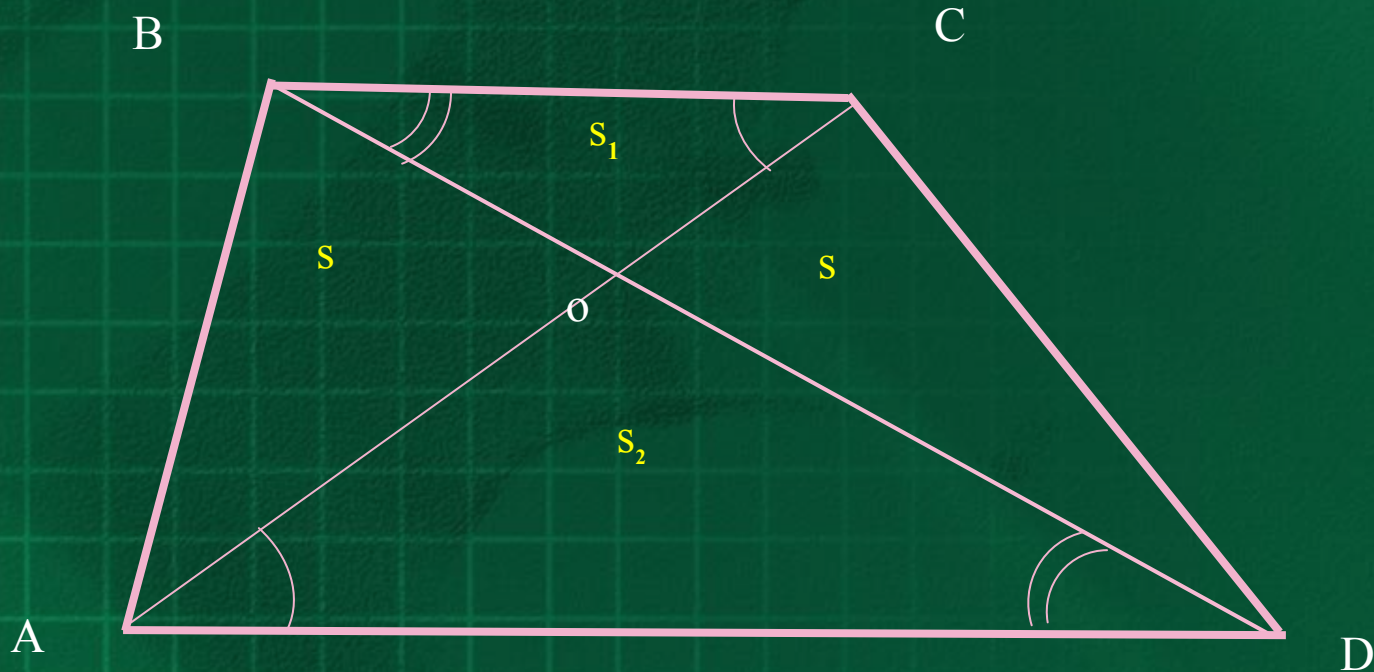
8.  $S_{APD} = 2k^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$ .

**Ответ: 8.**

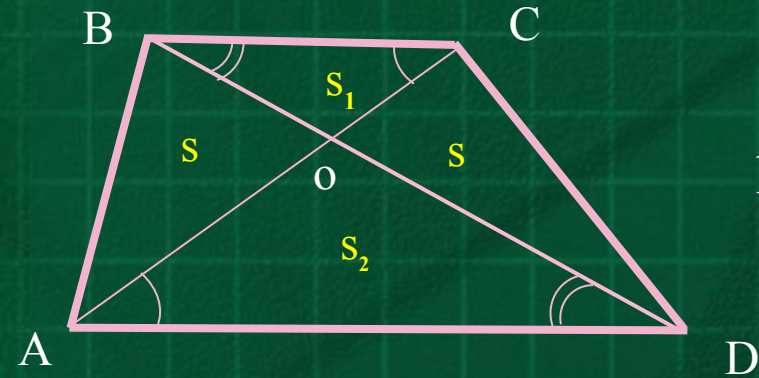


*Задача №3. (МИОО 2013г.)*

Диагонали  $AC$  и  $BD$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Площади треугольников  $OAD$  и  $OCB$  равны соответственно  $16 \text{ см}^2$  и  $9 \text{ см}^2$ . Найдите площадь трапеции.



Решение.



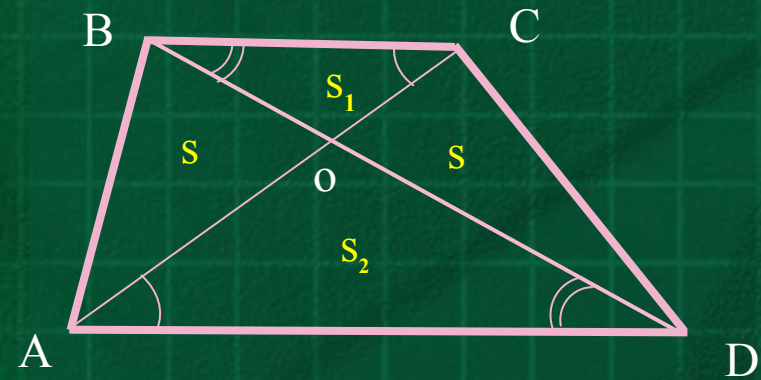
1. По условию  $S_{OAD}$  не равна  $S_{OCB}$ , значит,  $AD$  и  $BC$  – основания трапеции  $ABCD$ .

2.  $\triangle OAD \sim \triangle OCB$  (по двум равным углам),  $S_{OAD} : S_{OCB} = k^2 = 16:9$ , где  $k = 4:3 = OA:OC$ .

3.  $\triangle ABO$  и  $\triangle CBO$  имеют общую высоту из вершины  $B$ , значит, отношение их площадей равно отношению их оснований, т.е.  $S_{ABO} : S_{CBO} = OA : OC = 4:3$  (из п.2). Следовательно,

$$S_{ABO} = \frac{4}{3} S_{CBO} = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12.$$





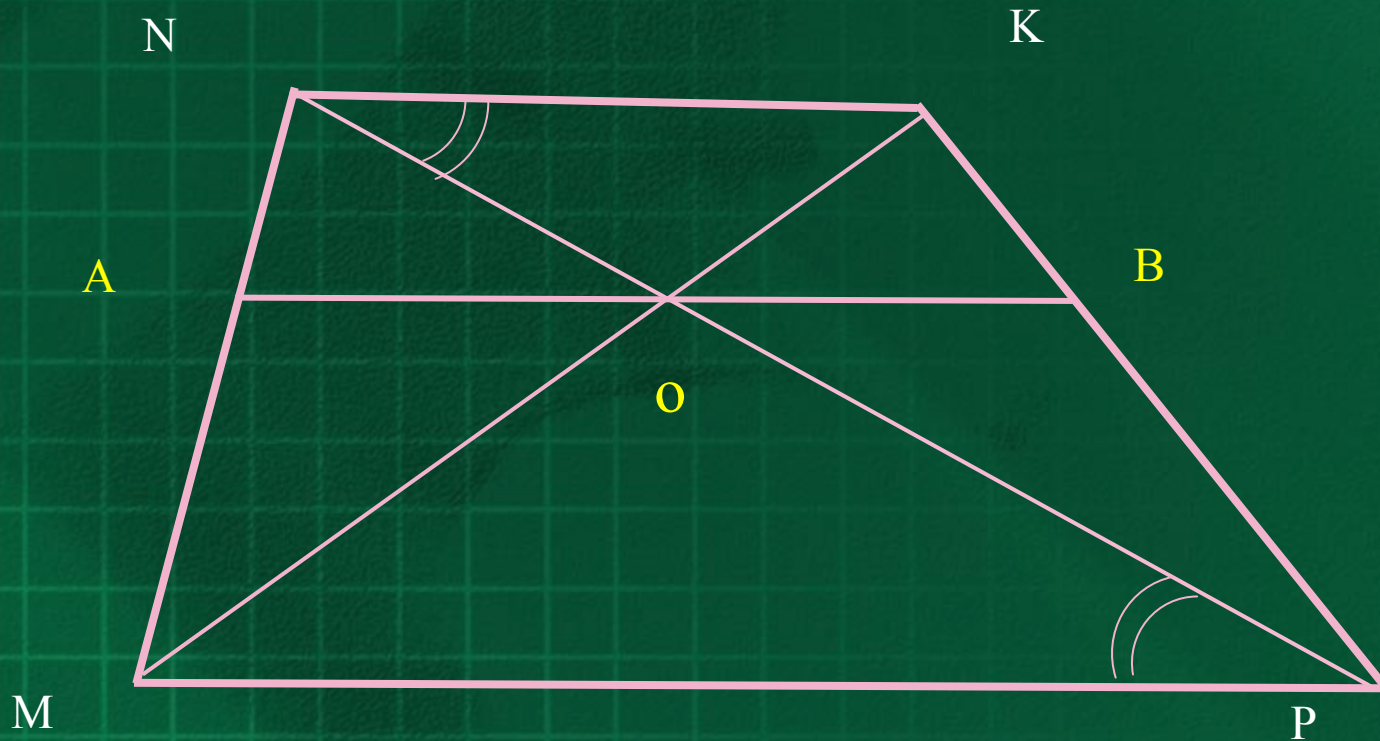
4.  $S_{BAD} = S_{CAD}$ , т. к. эти треугольники имеют общее основание  $AD$  и их высоты, проведённые к этому основанию, равны как высоты трапеции. Значит,  $S_{OAB} = S_{ABC} - S_{OBC} = S_{DBC} - S_{OBC} = S_{OCD}$ , т. е.  $S_{OCD} = S_{OAB} = 12$ .

5.  $S_{ABCD} = S_{OAD} + S_{OCB} + S_{OCD} + S_{OAB} = 16 + 9 + 12 + 12 = 49 \text{ см}^2$ .

**Ответ:  $49 \text{ см}^2$ .**

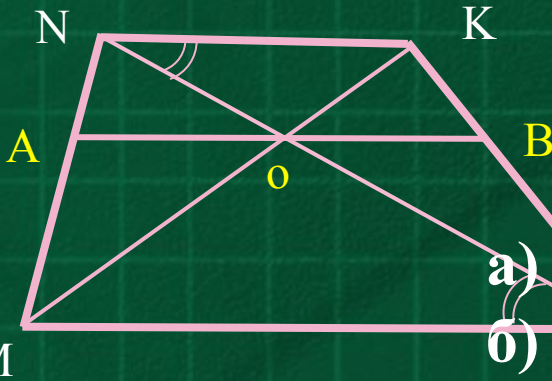
**Задача №4. (МИОО 2010г.)**

Прямая, параллельная основаниям  $MP$  и  $NK$  трапеции  $MNKP$ , проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и пересекает её боковые стороны  $MN$  и  $KP$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Найдите длину отрезка  $AB$ , если  $MP=40$  см,  $NK=24$  см.





Решение.



1.  $\triangle MOP \sim \triangle KON$  по двум углам:

а)  $\angle NOK = \angle MOP$  как вертикальные

б)  $\angle PMO = \angle NKO$  как внутренние

накрест лежащие углы при  $NK$  параллельной  $MP$  и секущей  $MK$ .

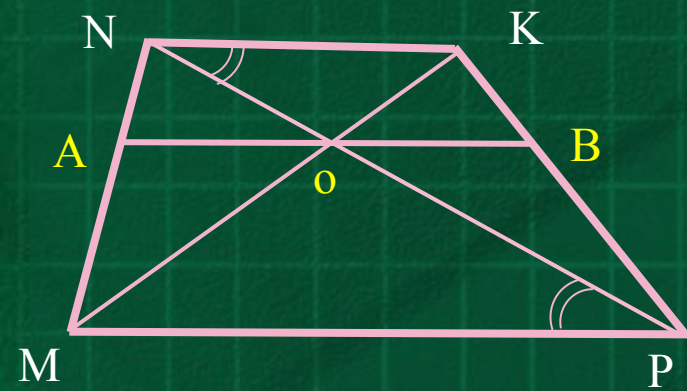
$$\frac{NO}{PO} = \frac{KO}{MO} = \frac{NK}{MP} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}; \quad KO = \frac{3}{5}MO; \quad NO = \frac{3}{5}PO$$

2.  $\triangle AMO \sim \triangle NMK$  по двум углам:

а)  $\angle M$  общий;

б)  $\angle MAO = \angle MNK$  как соответственные при  $AO$  параллельной  $NK$  и секущей  $MN$ .

$$\frac{AO}{NK} = \frac{MO}{MK} = \frac{MO}{MO + KO} = \frac{MO}{MO + \frac{3}{5}MO} = \frac{5MO}{8MO} = \frac{5}{8}; \quad AO = \frac{5}{8}NK = 15$$



3. Аналогично  $BO = \frac{3}{5} NK = 15$

4.  $AB = 30$  см.

*Ответ: 30 см.*



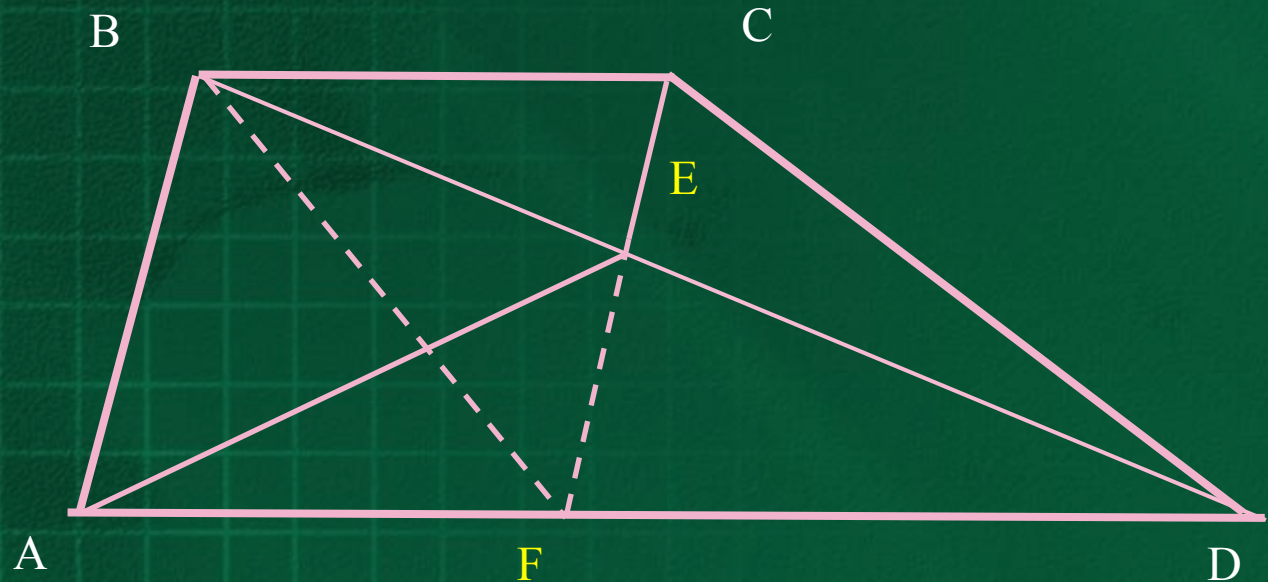
*Задача №5. (МИОО 2013г.)*

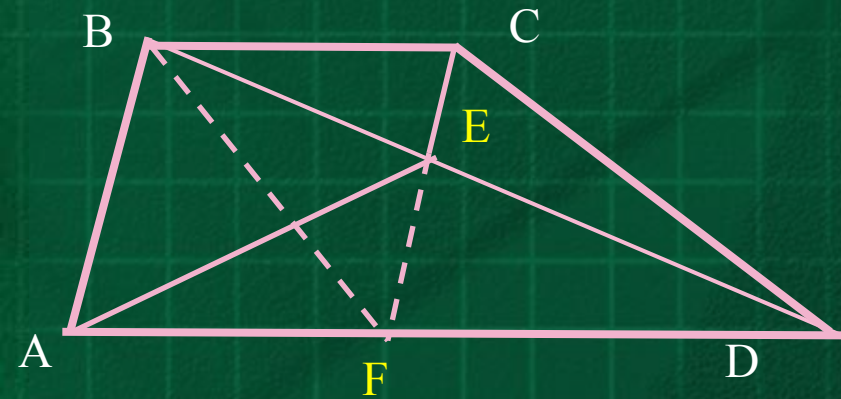
В трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC, AD > BC$ )

на диагонали  $BD$  выбрана точка  $E$  так, что

$$CE \parallel AB.$$

Площадь треугольника  $DCB$  равна 15. Найдите площадь  
треугольника  $ABE$ .

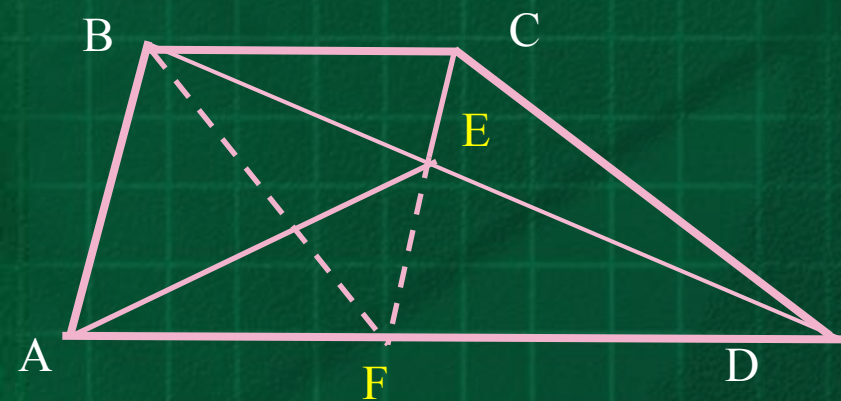




Решение.

1. Пусть точка  $F$  – точка пересечения прямых  $CE$  и  $AD$ . Тогда  $ABCF$  – параллелограмм (по определению параллелограмма).  $BF$  – диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника;  $S_{FCB} = 0,5 \cdot S_{ABCF}$





2.  $S_{DCB} = S_{FCB}$  (как площади треугольников, имеющих общее основание и одинаковую высоту – высоту трапеции).

Значит,

$$S_{DCB} = S_{FCB} = 0,5 \cdot S_{ABCF} = 15.$$

3.  $\triangle ABE$  и параллелограмм  $ABCF$  имеют одно и то же основание  $AB$  и общую высоту, проведённую к  $AB$ . Значит,

$$S_{ABE} = 0,5 \cdot S_{ABCF} = S_{DCB} = 15.$$

*Отв*

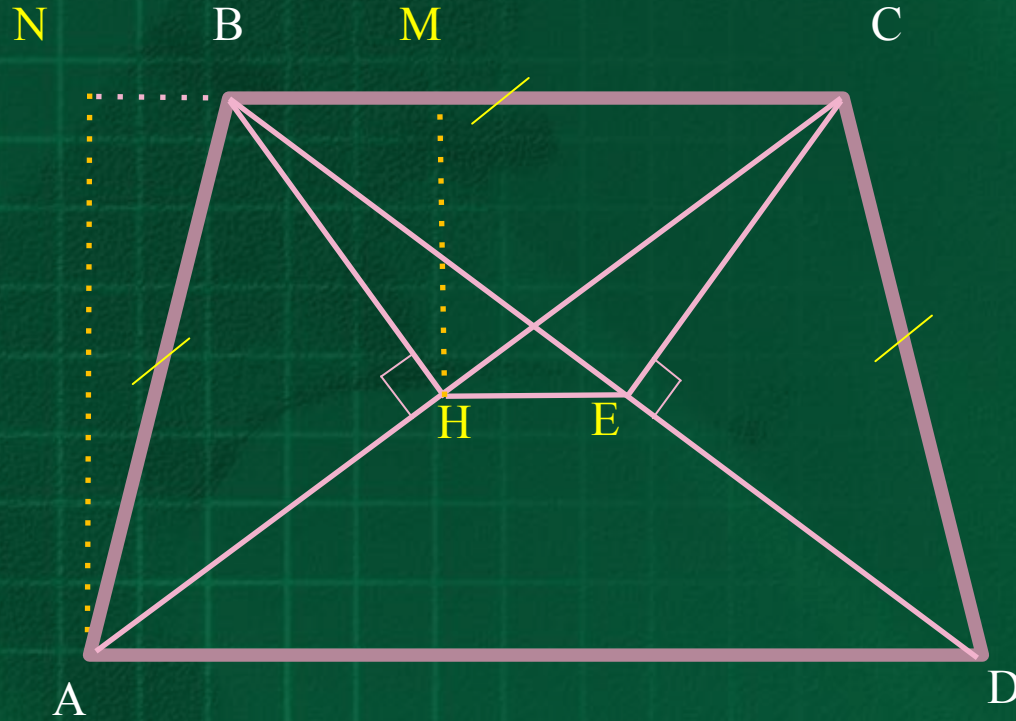
*ет: 15.*

### Задача № 6 (МИОО 2013г.)

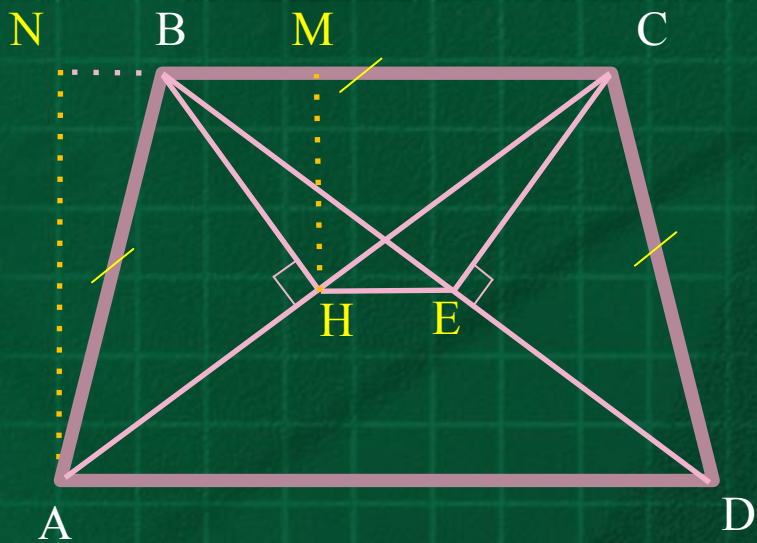
В равнобедренной трапеции  $ABCD$  боковые стороны равны меньшему основанию  $BC$ .

К диагоналям трапеции провели перпендикуляры  $BH$  и  $CE$ .

Найдите площадь четырёхугольника  $BCEH$ , если площадь трапеции  $ABCD$  равна 36.



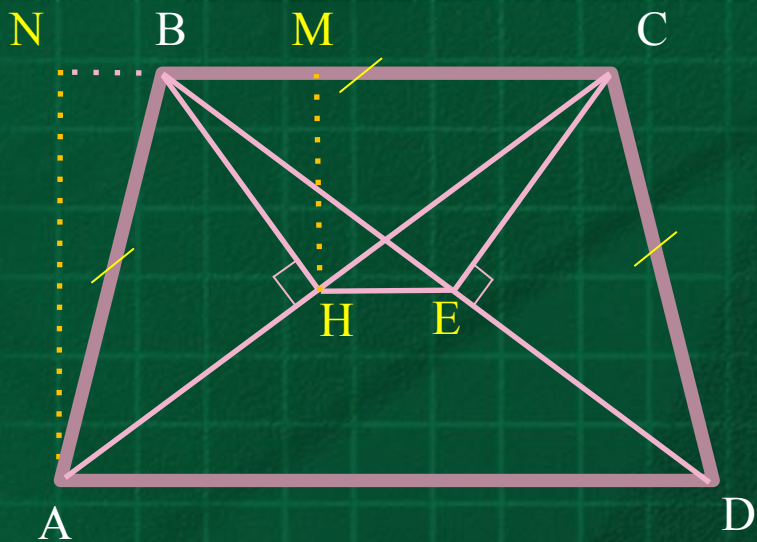




Решение.

По свойству равнобедренной трапеции  $AC=BD$ , следовательно, треугольники  $ABC$  и  $DCB$  равны. Так как  $AB=BC=CD$ , треугольники  $ABC$  и  $DCB$  равнобедренные, следовательно,  $BH$  и  $CE$  – соответствующие медианы этих треугольников. Значит,  $AH=HC=BE=ED$ .

Отрезок  $HE$  соединяет середины диагоналей трапеции, следовательно, прямые  $HE$ ,  $AD$  и  $BC$  параллельны, поэтому,  $BCEH$  – трапеция.



Площадь трапеции  $ABCD$ :

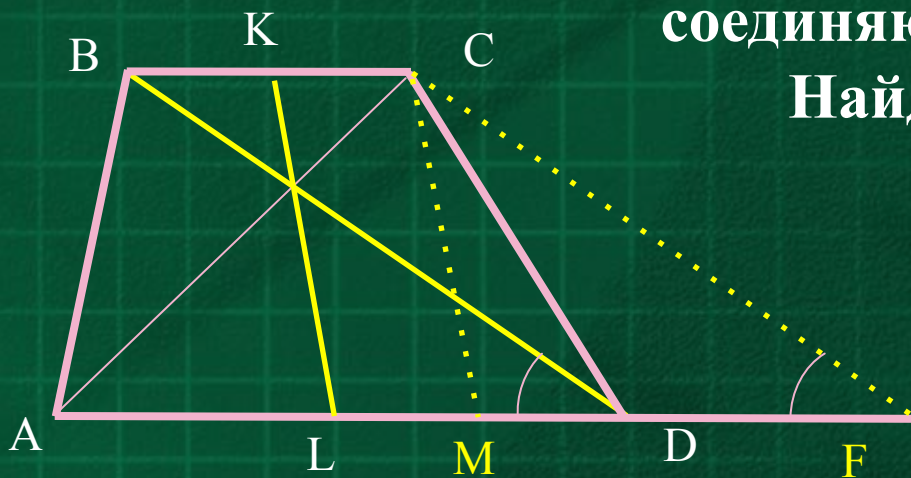
$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} HM \cdot (BC + HE) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AN \cdot \left( BC + \frac{AD - BC}{2} \right) = \\
 &= \frac{1}{8} AN \cdot (AD + BC) = \frac{1}{4} S_1 = 9
 \end{aligned}$$

**Ответ: 9.**



## Задача № 7.

Диагонали трапеции 3 и 5; отрезок, соединяющий середины оснований 2. Найдите площадь трапеции.

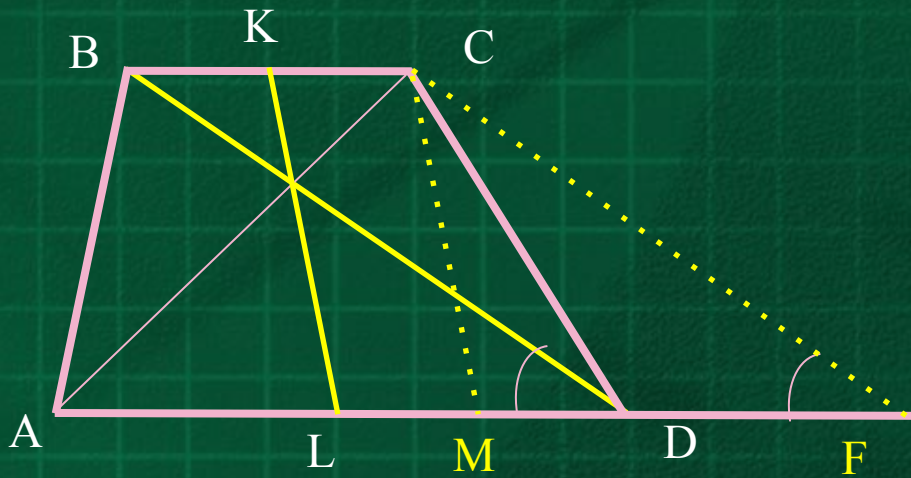


**Решение.** 1. Дополнительное построение:  $CM$  параллельна  $KL$ ,  $CF$  параллельна  $BD$ .

2. Из построения следует:  $LKCM$  и  $DBCF$  параллелограммы;  $LM = KC = 0,5 \cdot BC$ ,  $DF = BC$ ,  $AM = AL + LM = 0,5 \cdot AD + 0,5 \cdot BC$ .

3.  $CM$  – медиана треугольника  $ACF$ . По формуле медианы

$$2 = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot AC^2 + 2 \cdot CF^2 - AF^2} = \frac{1}{2} \sqrt{68 - AF^2}, \quad AF = 2\sqrt{13}.$$



Полупериметр треугольника  $ACF$  равен  $4 + \sqrt{13}$ .

По формуле Герона

$$S_{ACF} = \sqrt{p(p-3)(p-5)(p-2\sqrt{13})} = \sqrt{(4+\sqrt{13})(1+\sqrt{13})(\sqrt{13}-1)(4-\sqrt{13})} = 6.$$

4. Пусть  $h$  – высота трапеции  $ABCD$  или треугольника  $ACF$ .

Тогда

$$S_{ABCD} = 0,5 \cdot (AD+BC) \cdot h = 0,5 \cdot (AD+DF) \cdot h = 0,5 \cdot AF \cdot h = S_{ACF} = 6.$$

**Ответ: 6.**



## • Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите площадь выпуклого четырёхугольника с диагоналями 8 и 5, если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон равны.

**Ответ: 20.**

2. В выпуклом четырёхугольнике  $ABCT$  длина отрезка, соединяющего середины сторон  $AB$  и  $CT$ , равна одному метру. Прямые  $BT$  и  $AC$  перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей  $AC$  и  $BT$ .

**Ответ: 1 метр.**

3. На стороне  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  выбрана точка  $K$ . Отрезки  $AK$  и  $BD$  пересекаются в точке  $P$ . Площадь параллелограмма  $ABCD$  равна 80, а площадь четырёхугольника  $PKCD$  равна 31. Найдите площадь треугольника  $APD$ .

**Ответ: 25.**

• *Задачи для самостоятельного решения*

4. Диагонали  $AC$  и  $BD$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Площади треугольников  $AOD$  и  $BOC$  равны соответственно  $25 \text{ см}^2$  и  $16 \text{ см}^2$ . Найдите площадь трапеции.

*Ответ:  $81 \text{ см}^2$ .*

5. Прямая, параллельная основаниям  $BC$  и  $AD$  трапеции  $ABCD$ , проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и пересекает её боковые стороны  $AB$  и  $CD$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Найдите длину отрезка  $EF$ , если  $AD=12 \text{ см}$ ,  $BC=24 \text{ см}$ .

*Ответ:  $16 \text{ см}$ .*

6. В трапеции  $ABCD$  ( $AD$  параллельна  $BC$ ,  $AD > BC$ ) на диагонали  $AC$  выбрана точка  $E$  так, что  $BE$  параллельна  $CD$ . Площадь треугольника  $ABC$  равна  $10$ . Найдите площадь треугольника  $DEC$ .

*Ответ:  $10$ .*



## • *Использованные источники*

- ✓ А.С. Зеленский, И.И. Панфилов «Геометрия в задачах». Учебное пособие для учащихся старших классов и поступающих в вузы. – Москва, НТЦ «Университетский» УНИВЕР-ПРЕСС, 2008.
- ✓ И.В. Ященко, С.А. Шестаков и др. Математика. 9 класс. Типовые тестовые задания. – «Экзамен», Москва, 2013.
- ✓ Образовательный портал для подготовки к экзаменам РЕШУ ЕГЭ
- ✓ <http://pedsovet.su/load/321>
- ✓ <http://www.mathvaz.ru/>
- ✓ <http://alexlarin.net/>