

Лекция 1.

Тема: Высказывание. Основные логические операции.

Цель: Разъяснить понятие высказывания, рассмотреть основные логические операции.

1. Основные понятия. Логические операции

Под *высказыванием* мы понимаем предложение русского языка, о котором можно сказать, **истинно** оно или **ложно**.

Высказывания мы будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита, возможно с индексами: $A, B, X, Y, C_1, A_4, \dots$

Если высказывание A истинно, мы будем писать $A=1$; если высказывание A ложно, мы будем писать $A=0$.

Примеры

1. A =«два умножить на два равно семи»
2. B =«два плюс два равно 4»
3. C =«если сентябрь – весенний месяц, то $5*5=25$ »
4. D =«число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3»
5. E =«если после четверга следует пятница, то в году 13 месяцев»

$A=0$

$B=1$

$C=?$

$D=1$

$E=?$

Операции над высказываниями.

Отрицание

Определение 1

Высказывание "неверно, что A " называется *отрицанием* A и обозначается

\bar{A}

Например, пусть $A = "2*2=5"$, тогда

$\bar{A} = "неверно, что 2*2=5"$

Задается действие отрицания с помощью *таблицы истинности*:

A	\bar{A}
0	1
1	0

Конъюнкция

Из высказываний A , B можно образовать высказывание " A и B ".

Например, " $2*2=4$ и $5+3=9$ "

Определение 2

Высказывание " A и B " называется *конъюнкцией* (или *логическим умножением*) высказываний A и B .

Конъюнкция имеет много обозначений:

$A \wedge B$ $A \& B$ $A \cdot B$ AB

Конъюнкция задается с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ДИЗЬЮНКЦИЯ

Из высказываний A , B можно образовать высказывание " A или B ".
Например, " $2*2=4$ или $5+3=9$ ".

Определение 3

Высказывание " A или B " называется *дизъюнкцией* (или *логическим сложением*) высказываний A и B и обозначается $A \vee B$

Дизъюнкция задается с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Эквивалентность

Из высказываний A , B можно образовать следующее высказывание:

" A тогда и только тогда, когда B ".

Например, треугольник является равносторонним тогда и только тогда, когда все его углы равны между собой.

Синонимами служат фразы:

" A в том и только в том случае, когда B ",

" A необходимо и достаточно для того, чтобы выполнялось B ",

" A равносильно B ",

" A эквивалентно B ".

Определение 4

Высказывание " A равносильно B " называется *эквивалентностью* высказываний A и B и обозначается:

$$A \Leftrightarrow B$$

$$A \leftrightarrow B$$

$$A \sim B$$

Эквивалентность

Эквивалентность задается таблицей истинности:

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Импликация

Из высказываний A и B можно образовать высказывание "если A , то B ".

Например, если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой.

Синонимами служат следующие фразы:

"из A следует B ",

" B является следствием A ",

" A влечет B ",

" A достаточное условие для B ",

" B необходимое условие для A " и т.п.

Определение 5

Высказывание "если A , то B " называется *импликацией* высказываний A и B и обозначается:

$$A \rightarrow B \quad A \Rightarrow B$$

В этой ситуации высказывание A называется *посылкой*, а B – *заключением*.

Импликация

Примеры

1. D ="если сегодня среда, то завтра будет четверг"

$$D=1$$

2. Y ="если после четверга следует пятница, то после пятницы следует воскресенье"

$$Y=0$$

3. X ="если два плюс два равно пяти, то три плюс два равно десяти"

$$X=1$$

4. Z ="если $1+1=3$, то после пятницы следует суббота"

$$Z=1$$

Задается импликация таблицей истинности:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Импликация

Сделаем замечания, которые могут прояснить суть определения таблицы истинности для импликации и, возможно, помогут лучше ее запомнить:

1) если посылка ложна, то импликация всегда истинна, независимо от заключения, то есть

$$0 \rightarrow B = 1$$

2) если заключение истинно, то импликация также истинна, независимо от посылки, то есть

$$A \rightarrow 1 = 1$$

Или обобщающая фраза: “из истины ложь не следует”

$$1 \rightarrow 0 = 0$$

Пример

Формализовать высказывание:

F=«Хлеба уцелеют тогда и только тогда, когда будут вырыты ирригационные каналы; если хлеба не уцелеют, то фермеры обанкротятся и оставят фермы.»

Решение

Пусть

A=«хлеба уцелеют»

B=«будут вырыты ирригационные каналы»

C=«фермеры обанкротятся»

D=«фермеры оставят фермы».

Тогда

$$F = (A \leftrightarrow B) \wedge (\bar{A} \rightarrow C \wedge D)$$

Пример

Построить таблицу истинности для высказывания
 $(A \vee \bar{C}) \rightarrow B \leftrightarrow A$

A	B	C	\bar{C}	$A \vee \bar{C}$	$B \leftrightarrow A$	$\overline{B \leftrightarrow A}$	F
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0

- **Вопросы:**
- Какие значения может принимать переменная, соответствующая высказыванию?
- В таблице истинности какой операции содержится больше всего нулей?