

Кафедра математики и моделирования
Старший преподаватель Г.В. Аверкова
Курс «Высшая математика»

Тема 7 «Вывод канонического уравнения эллипса»

Исследование формы эллипса по его уравнению, эксцентриситет эллипса, связь между эллипсом и окружностью.



Цели и задачи

- Цели:

- Рассмотреть основные понятия по теме «Вывод канонического уравнения эллипса»

- Задачи:

- Рассмотреть свойства эллипса
- Исследовать зависимость формы эллипса от вида уравнения
- Установить связь между эллипсом и окружностью

Теоретический материал

Рассмотрим многочлен второй степени от двух переменных

$$F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F,$$

где A, B, C, D, E и F – постоянные действительные числа, причем, A, B и C одновременно не равны нулю

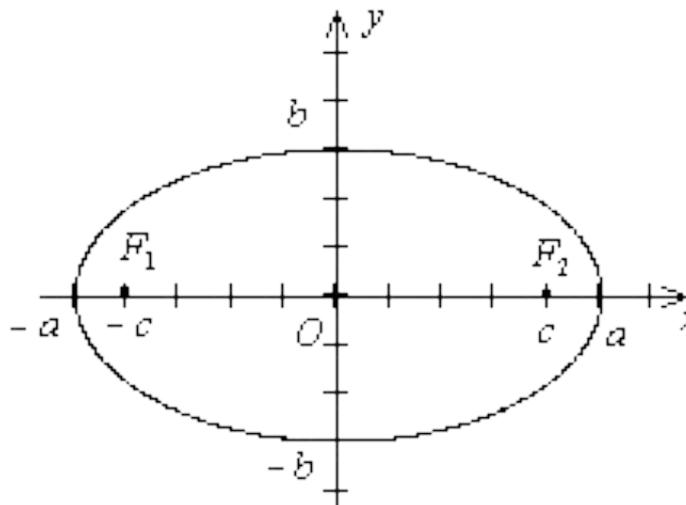
Уравнением кривой второго порядка называется уравнение вида

$$F(x, y) = 0$$

Теоретический материал

Эллипсом называется кривая, уравнение которой в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$$



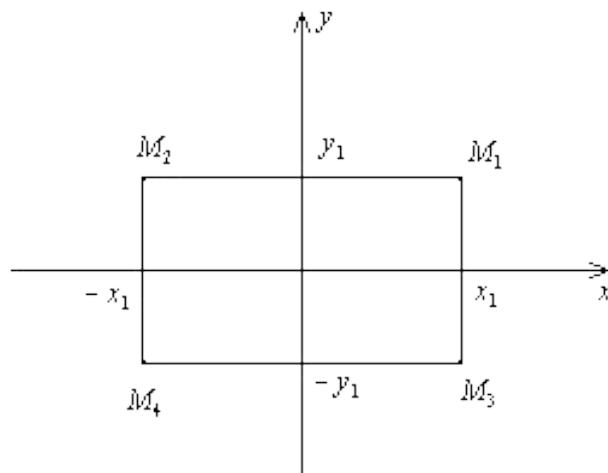
Теоретический материал

Свойства эллипса

1) Параметры a , b называются соответственно большой и малой полуосями эллипса. Эллипс содержится в прямоугольнике

$$P = \{(x, y) : |x| \leq a, |y| \leq b\}$$

Вершинами эллипса являются точки $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$

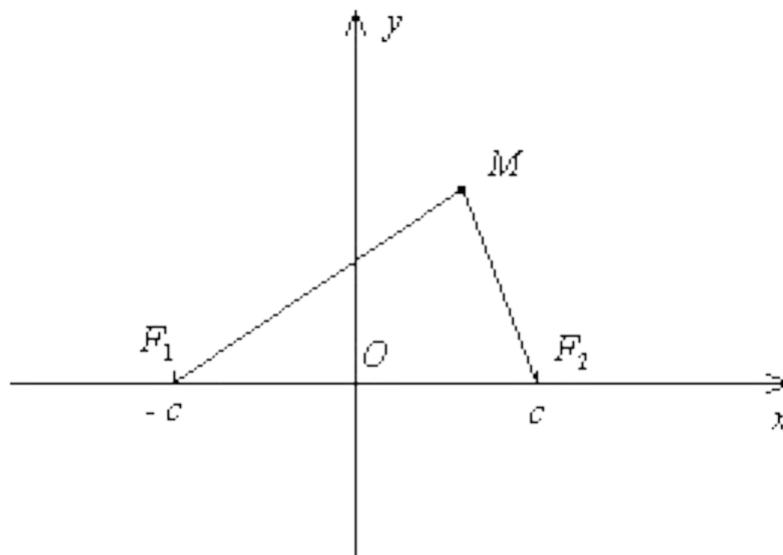


Теоретический материал

- 2) Координатные оси Ox и Oy канонической системы координат являются осями симметрии эллипса, а начало координат – его центром симметрии
- 3) Если эллипс не является окружностью, то координатные оси канонической системы – единственные оси симметрии
- 4) Эллипс есть множество точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек (фокусов) постоянна (равна заданному числу)

Теоретический материал

Точки $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, называются соответственно правым и левым фокусами эллипса. Величина $2c$ называется фокусным расстоянием.



Теоретический материал

5) Эллипс есть множество точек плоскости, отношение расстояний от которых до данной точки (фокуса эллипса) и до данной прямой (одноименной с фокусом директрисы эллипса) постоянно (равно эксцентриситету эллипса)

Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса

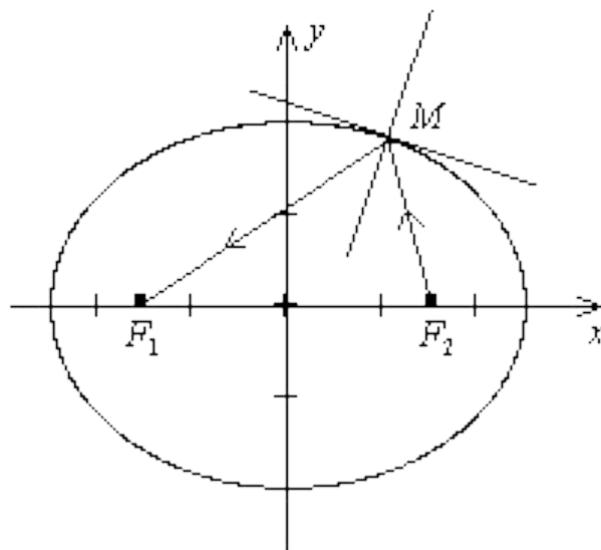
Правой и левой директрисой эллипса называются прямые

$$x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

Теоретический материал

6) Оптическое свойство эллипса

Если поместить в один из фокусов эллипса с зеркальной «поверхностью» точечный источник света, то все лучи после отражения от «поверхности» эллипса сойдутся в другом его фокусе



Теоретический материал

Окружность

является частным случаем эллипса при $a = b$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Эксцентриситет окружности равен нулю. Чем ближе значение эксцентриситета эллипса к нулю, тем больше форма эллипса приближается к форме окружности.

Окружность, центром которой является точка $O_0(x_0, y_0)$, определяется уравнением

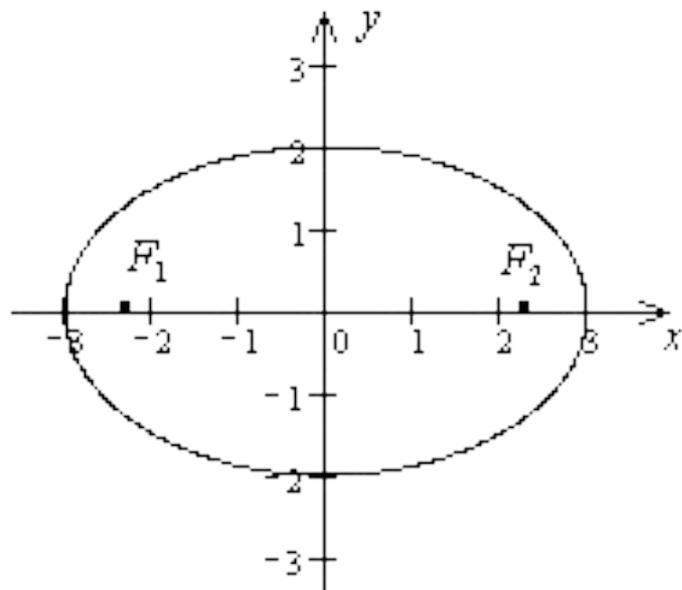
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Теоретический материал

Исследование формы эллипса по его уравнению

Пример 1

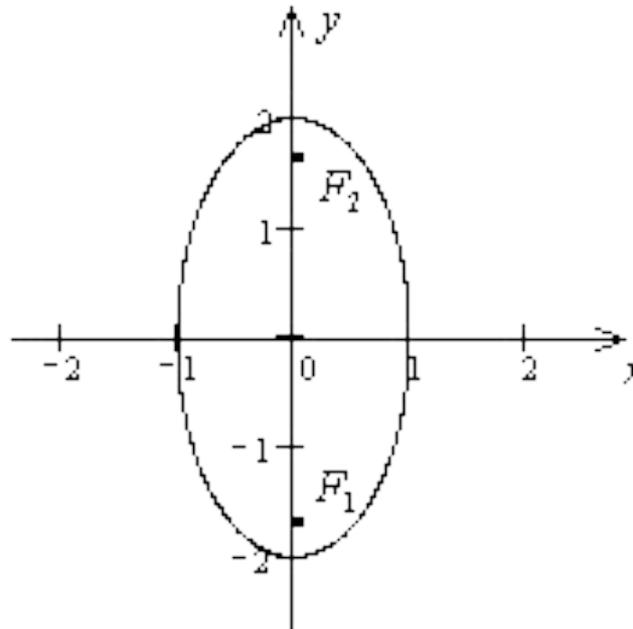
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$



Теоретический материал

Пример 2

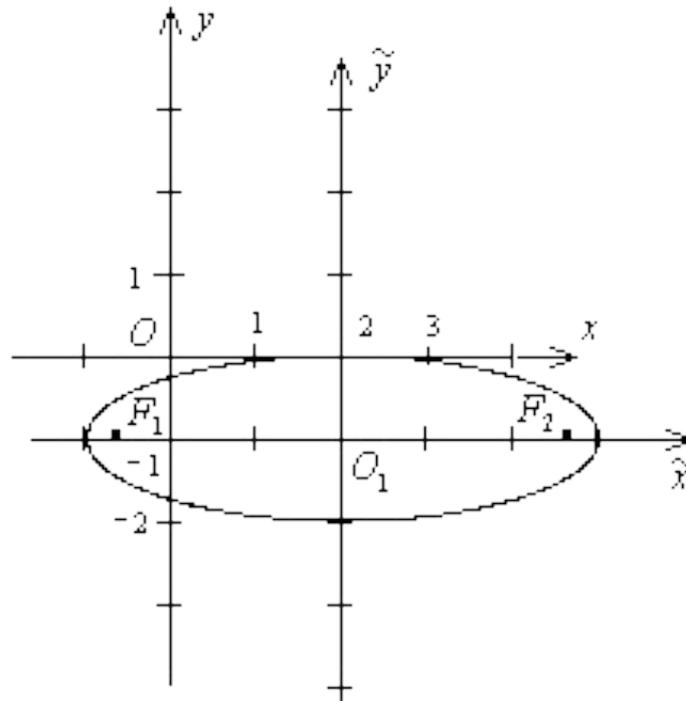
$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$$



Теоретический материал

Пример 3

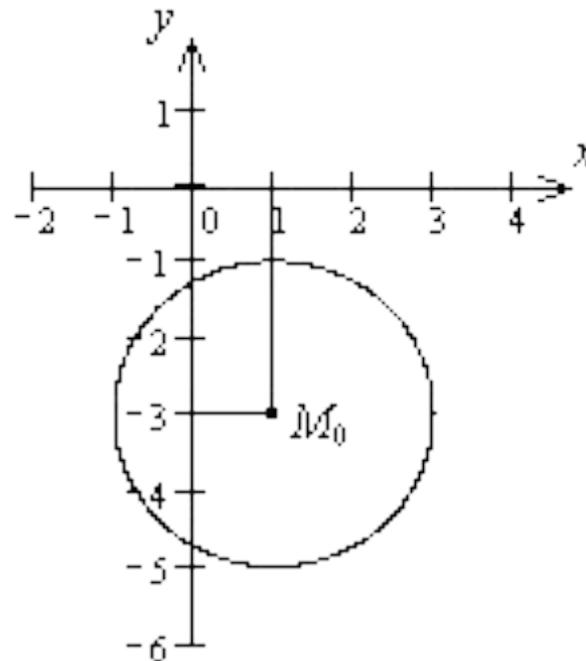
$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$



Теоретический материал

Пример 4

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$$



Ключевые понятия

- Окружность
- Эллипс
- Эксцентриситет
- Фокус
- Директриса

Контрольные вопросы

- Определение эллипса
- Свойства эллипса
- Окружность как частный случай эллипса
- Связь между уравнением эллипса и его формой
- Эксцентриситет эллипса
- Директрисы и фокусы эллипса
- Альтернативные определения эллипса

Дополнительная литература
