11 класс. Алгебра и начала математического анализа.

Тема урока:
«Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла»

Учитель математики
Кутенкова Т.В.
ГБОУ СОШ № 527
Санкт-Петербург

"

ЦЕЛИ УРОКА:

- - обучающие: *повторить и обобщить типы задач на вычисление площадей фигур, в том числе фигур сложной геометрической конфигурации, классифицировать задачи, систематизировать способы решения, скорретировать знания, познакомиться с историей развития интегрального исчисления;*
- - развивающая: *научить мыслить и оперировать математическими знаниями, стимулировать мышление учащихся;*
- - воспитательная: *развивать у учащихся коммуникативные компетенции (умение работать в группе, культуру общения), способствовать развитию интеллектуальной деятельности учащихся.*

ПЛАН УРОКА

I. Блиц – опрос. Повторение основных теоретических знаний

II. Практическое применение знаний

III. Защита домашних задач

IY. Постановка проблемы (обобщение)

Y. Коррекция знаний по теме

YI. Историческая справка

YII. Подведение итогов

YIII. Домашнее задание

БЛИЦ - ОПРОС

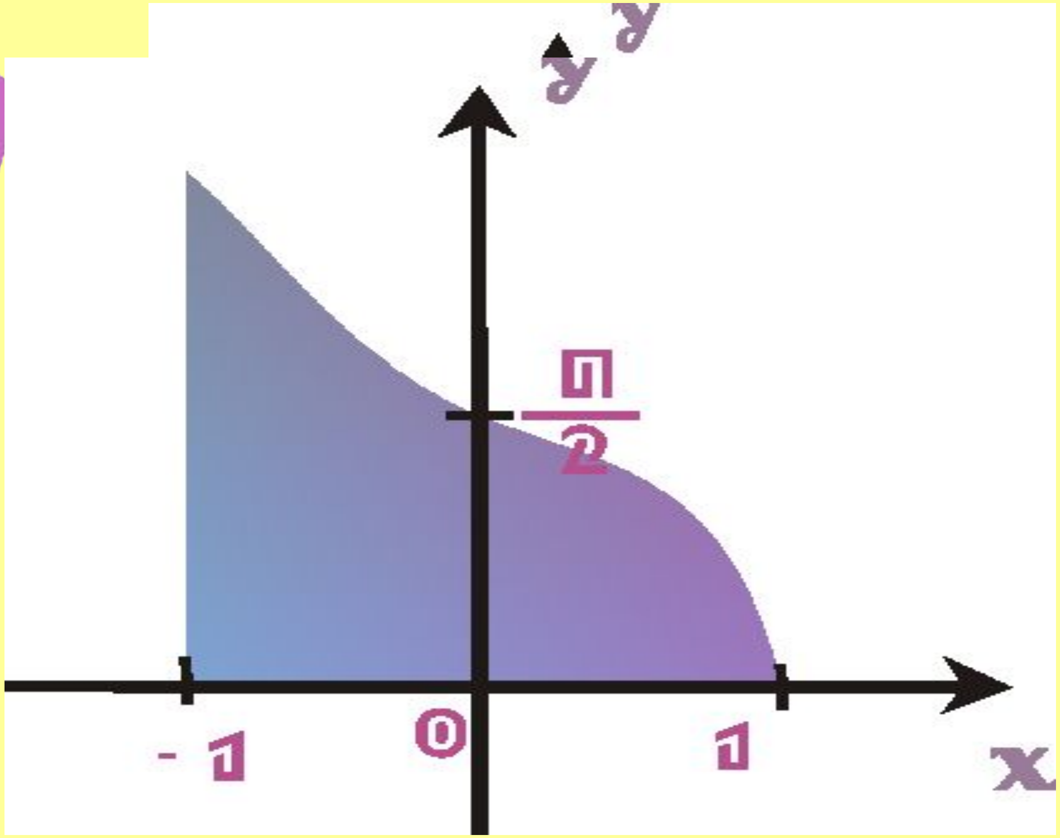
1. В чем заключается геометрический смысл интеграла?
2. Какую фигуру называют криволинейной трапецией?
3. Как найти п… …е, если $f(x) \leq 0$ на [a;b]…

Интеграл от
неотрицательной
непрерывн…

Фигура, ограниченная
…ком оси абсцисс,
…ми x=a, x=b,
… непрерывной
… $f(x) \geq 0$ на [a;b]

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx$$

ЗАДАЙТЕ АНАЛИТИЧЕСКИ ФИГУРУ

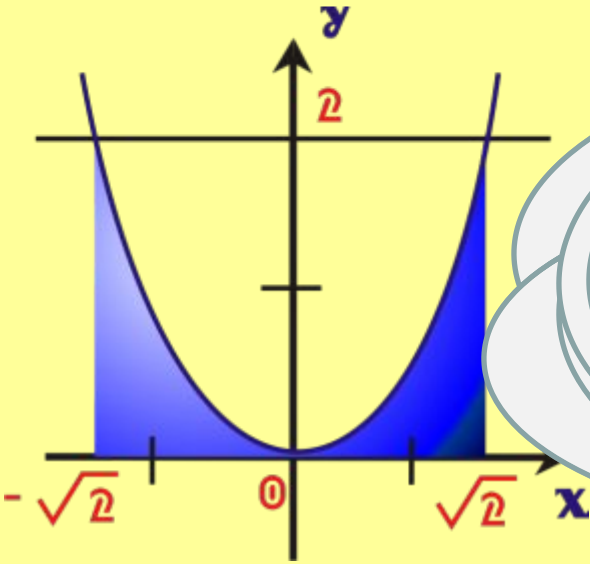


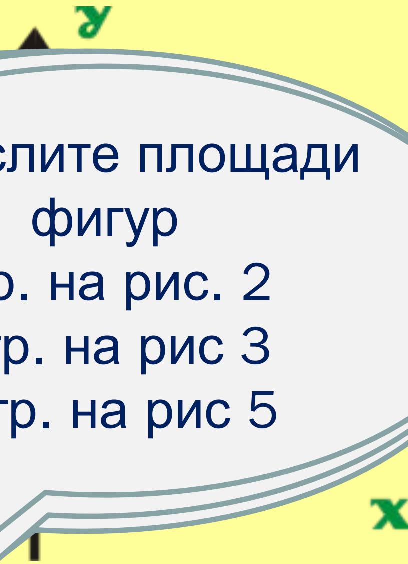
$y = \arccos x, y = 0, x = -1$

$y = x^2, y = 2, y = 1$

$y = \cos x, y = 0, \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

$y = \sqrt{2} \quad = 2$



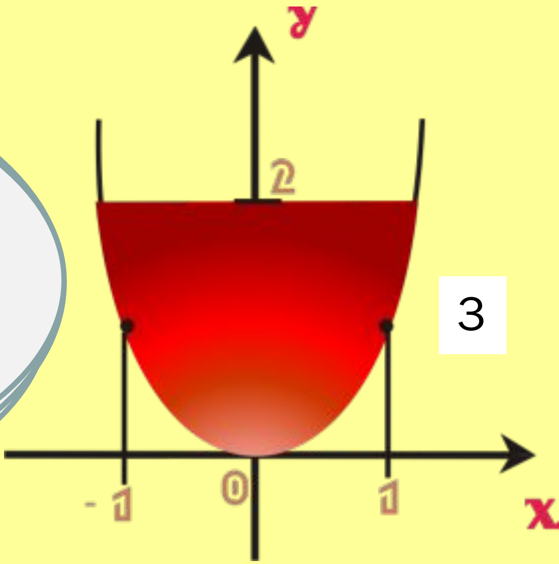


Вычислите площади фигур

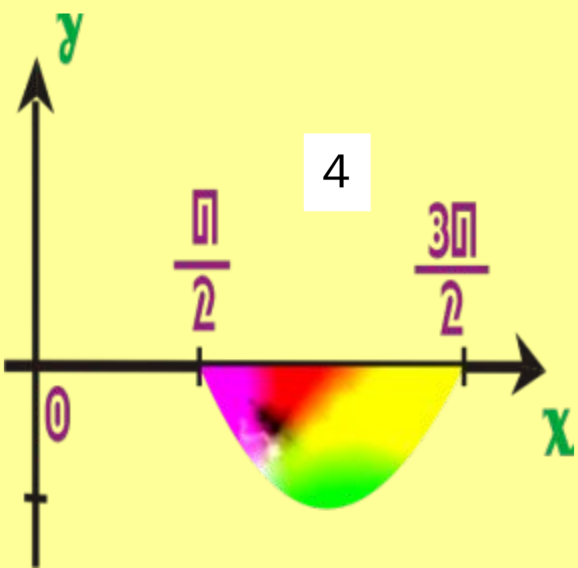
I гр. на рис. 2

II гр. на рис 3

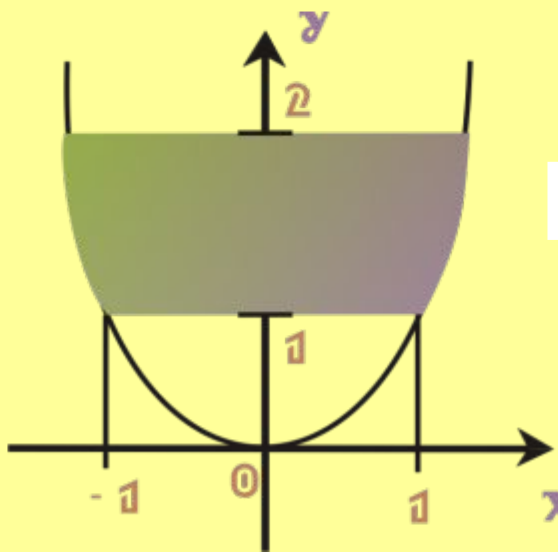
III гр. на рис 5



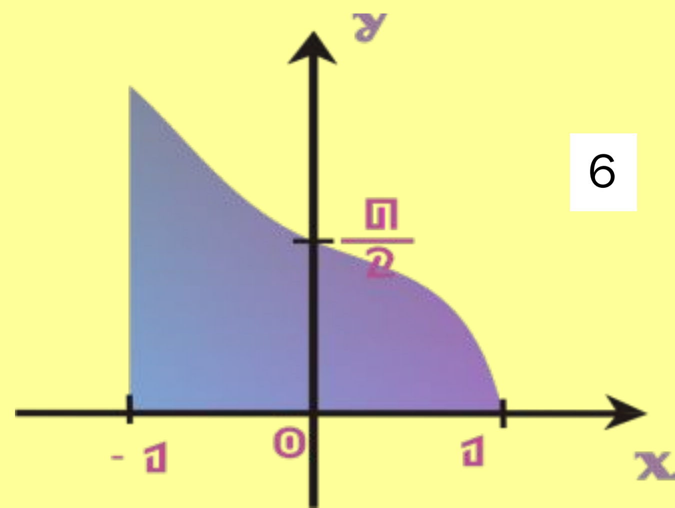
3



4



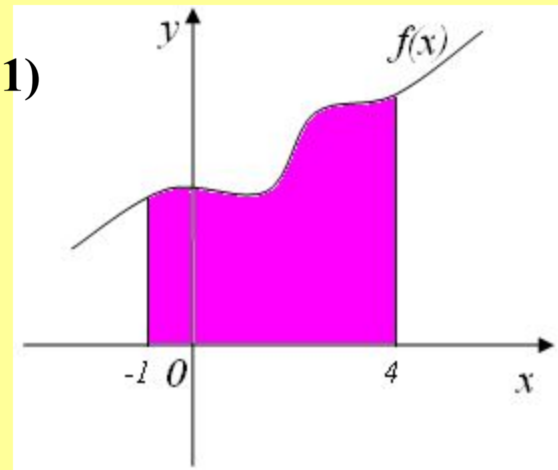
5



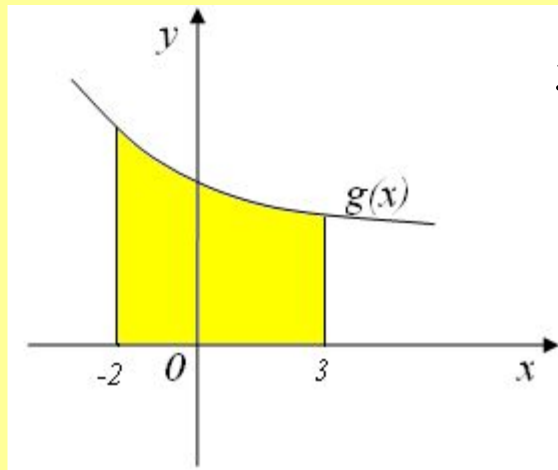
6

Выразите с помощью интеграла площади фигур, изображенных на рисунках:

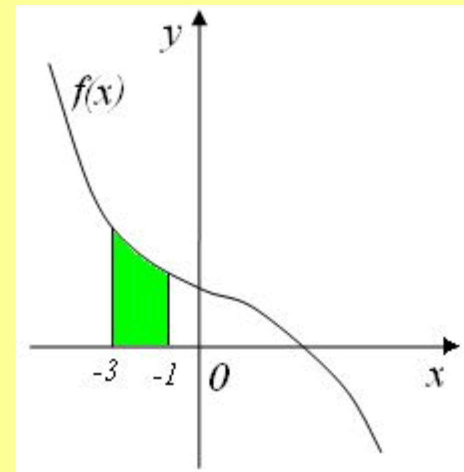
1)



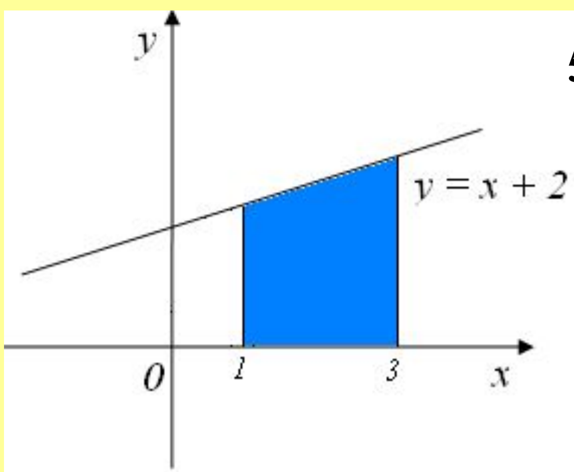
2)



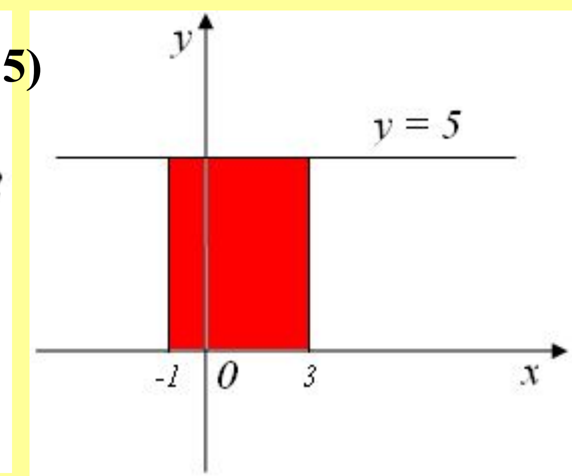
3)



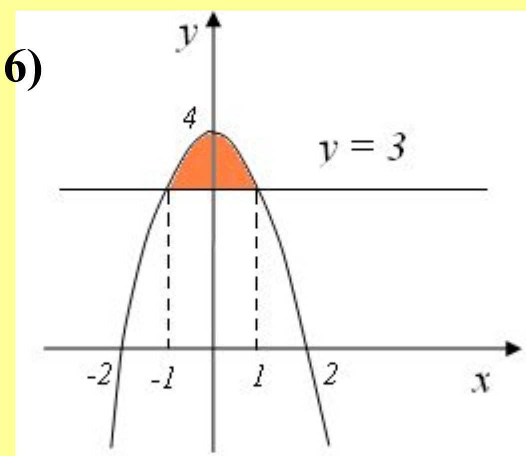
4)



5)



6)



Вычислите интегралы:

1). $\int_{2}^{5} x\,dx$

10,5

2). $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

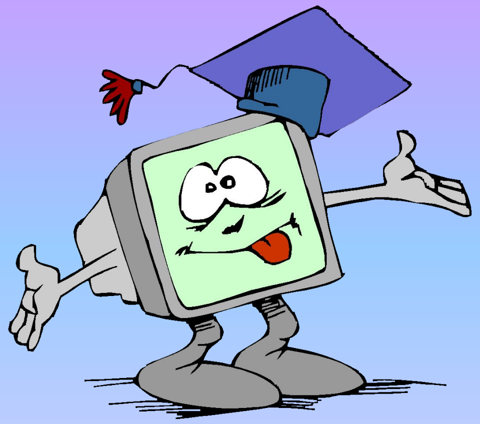
1

3). $\int_{0}^{4} x^{3}\,dx$

64

4). $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1}{\cos^{2} x}\,dx$

1



Защита домашних задач

- **Задание I группы.** Вычислить площадь фигуры, расположенной между линиями

  $y = x^2 - 2x, \quad y = 4 - x^2.$
- **Задание II группы.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$,

  $y = x^2/2, \; y = 2x.$
- **Задание III группы.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной синусоидой, косинусоидой на отрезке $[\pi/4; 5\pi/4]$.

ЗАДАЧА I ГРУППЫ

График функции $y=x^2-2x$ –парабола

x	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3

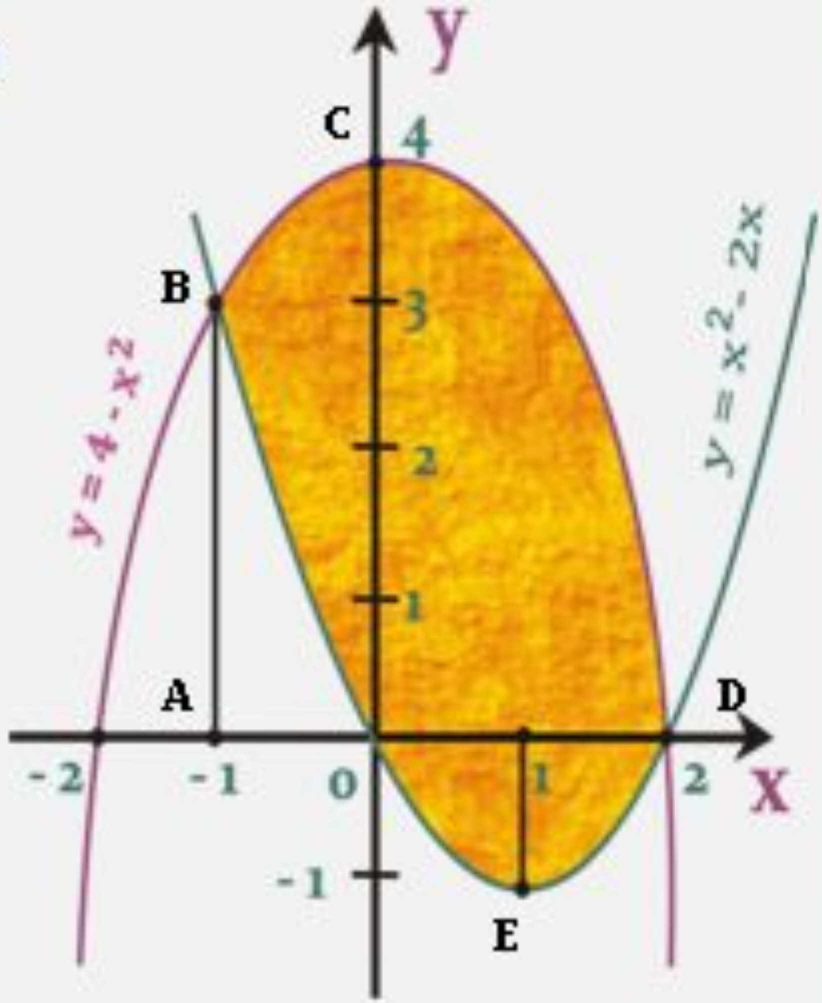
График функции $y=4-x^2$ - парабола

x	-2	-1	0	1	2
y	0	3	4	3	0

Точки пересечения B(-1;3), Д(2;0)

$S_ф = S_{ABCД} - S_{ABO} + S_{OEД}$

Вычислим площадь каждой фигуры.



$$S_{АВСД}=\int_{-1}^{2}(4-x^2)dx=(4x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^{2}=9$$

$$S_{АВО}=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx=(\frac{x^3}{3}-x^2)\Big|_{-1}^{0}=1\frac{1}{3}$$

$$S_{ОДЕ}=-\int_{0}^{2}(x^2-2x)dx=(x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_{0}^{2}=1\frac{1}{3}$$

$$S_{ф}=9-1\frac{1}{3}+1\frac{1}{3}=9(кв.ед.)$$

ЗАДАЧА II ГРУППЫ

График функции у=x^2 - парабола

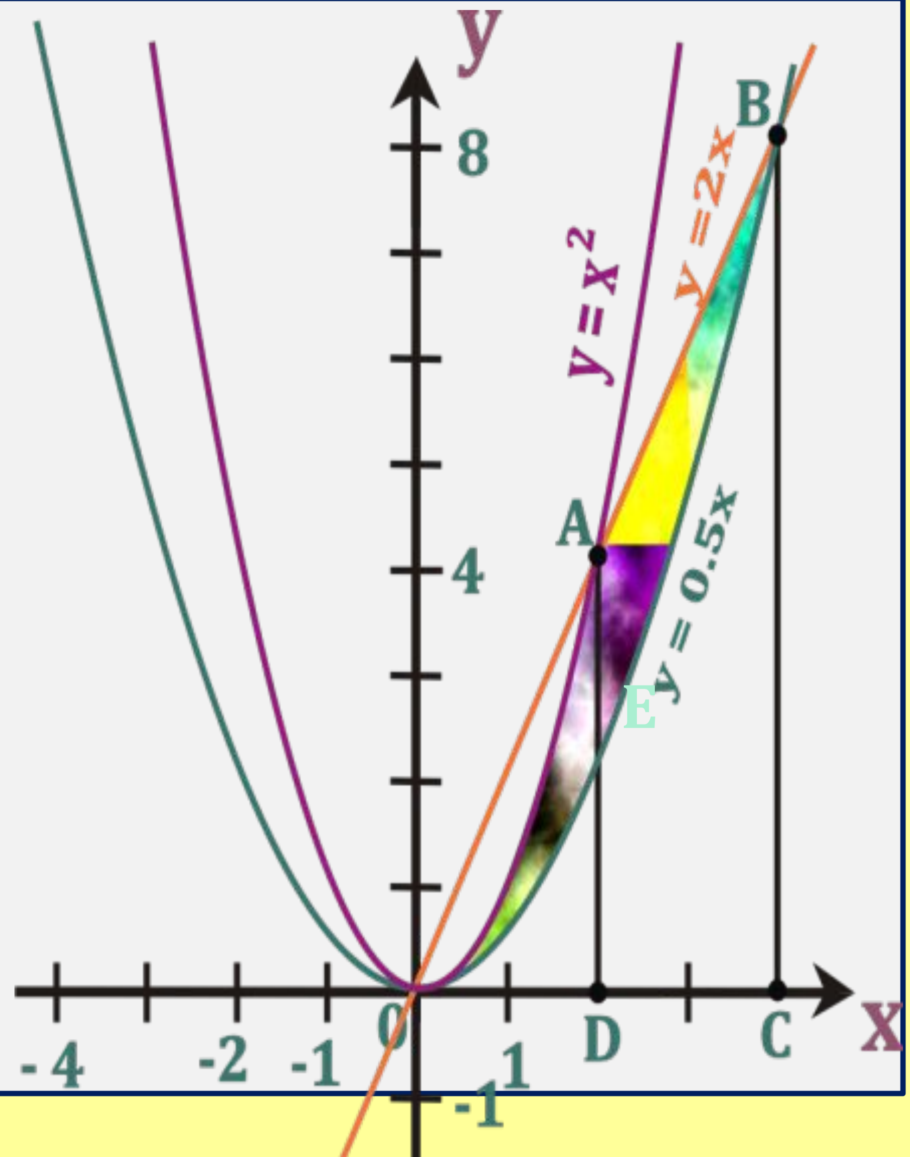
Х	±2	±1	0
У	4	1	0

График функции у=½ x^2 - парабола

Х	±4	±2	±1	0
у	8	2	0,5	0

У=2х

x	0	4
y	0	8



$S_ф = S_{OAE}+S_{EAB} = (S_{OAД} - S_{OEД}) + (S_{ДABC} - S_{ДEBC})$

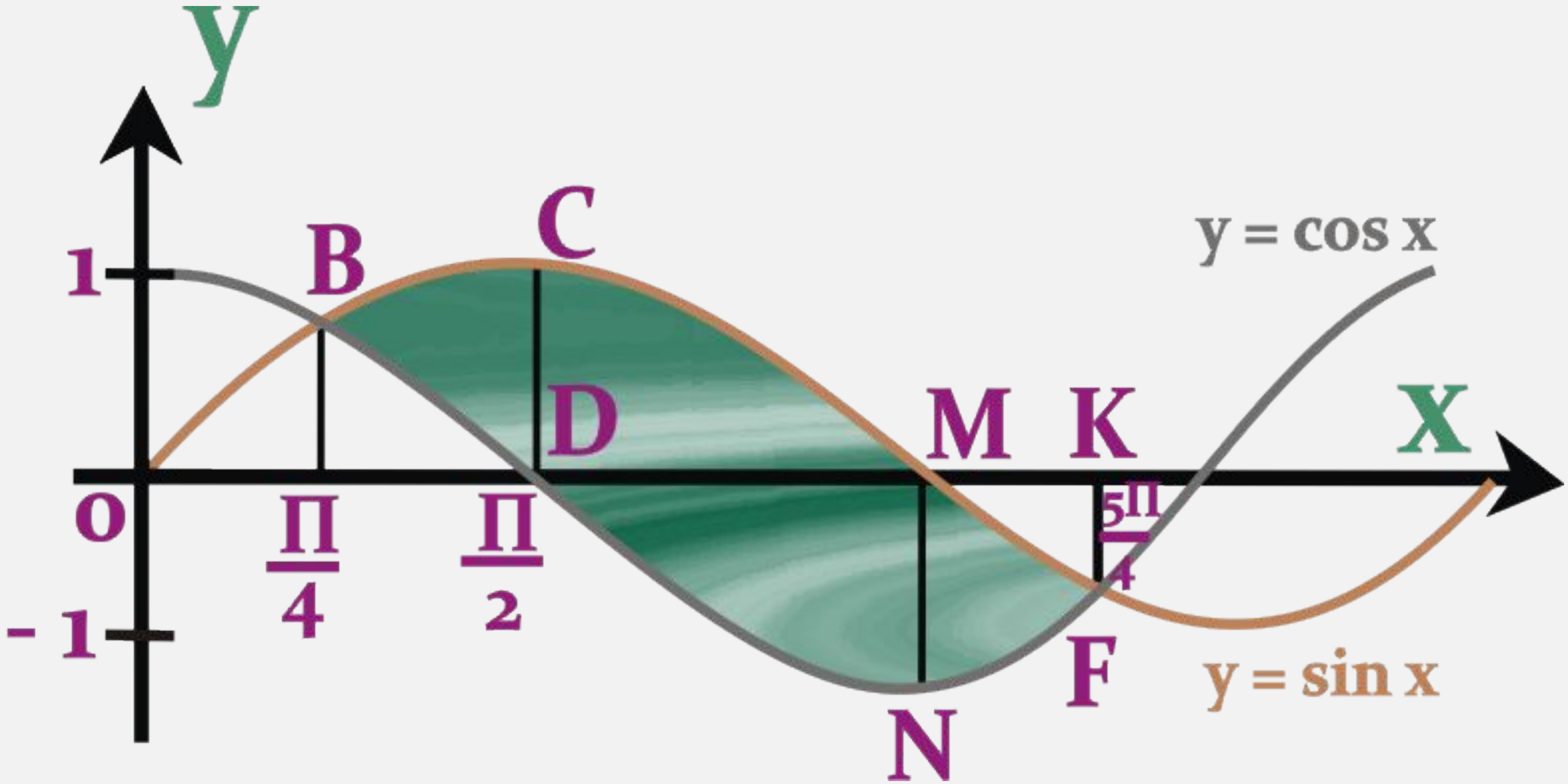
Выполним вычисления, применив свойство аддитивности интеграла

$$S_{ф}=\int_0^2 x^2dx-\int_0^2\frac{1}{2}x^2dx+\frac{1}{2}(4+8)2-$$

$$-\int_2^4\frac{1}{2}x^2dx=\frac{1}{2}(\int_0^2 x^2dx-\int_2^4 x^2dx)+12=$$

$$=\frac{x^3}{6}\Big|_0^2-\frac{x^3}{6}\Big|_2^4+12=10\frac{2}{3}(кв.ед.)$$

ЗАДАЧА III ГРУППЫ



$S_{ф} = S_{BCD} + S_{DCM} + S_{DMN} + S_{MNF} =$

$= S_{ABCD} – S_{ABD} + S_{DCM} + S_{DMN} + S_{MNFK} - S_{MKF}$

Выполним вычисления, применив свойство аддитивности интеграла

$$S_{\phi} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx -$$

$$- \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx - \int_{\pi}^{5\pi/4} \cos x dx + \int_{\pi}^{5\pi/4} \sin x dx =$$

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx = -(\cos x + \sin x)\Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2\sqrt{2}$$

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ (ОБОБЩЕНИЕ)

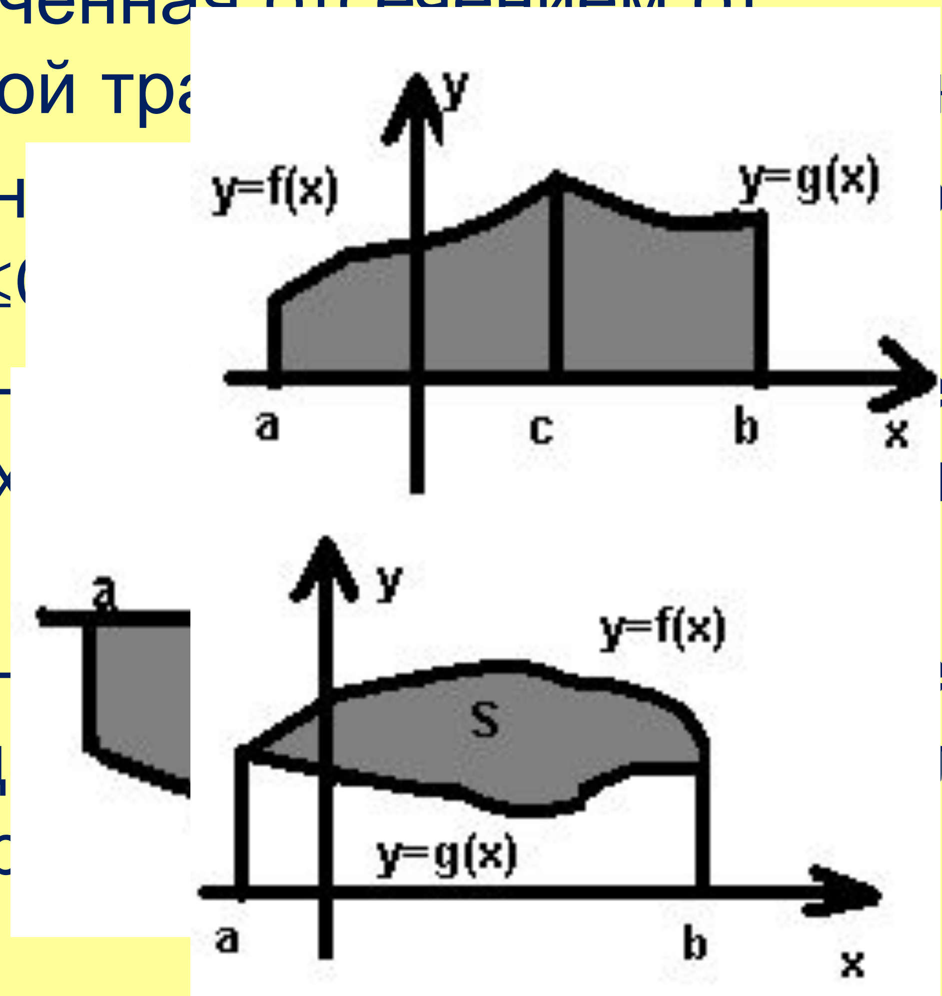
Проблема: Как с помощью интеграла вычислить площадь фигуры, не являющейся криволинейной трапецией?

Решение проблемы

Задачи на вычисление площадей фигур с помощью интеграла можно классифицировать по виду геометрических фигур, площади которых необходимо вычислить

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ

- Фигура, полученная отсечением от криволинейной тра ка
- Фигура, огран рывной функции f(x)≤0
- Фигура, огран ерывных функций y=f(x ыми x=a, x=b
- Фигура, огран ерывных функций, зад лами на различных пр



ЧТО ПОМОЖЕТ УПРОСТИТЬ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ФИГУР?

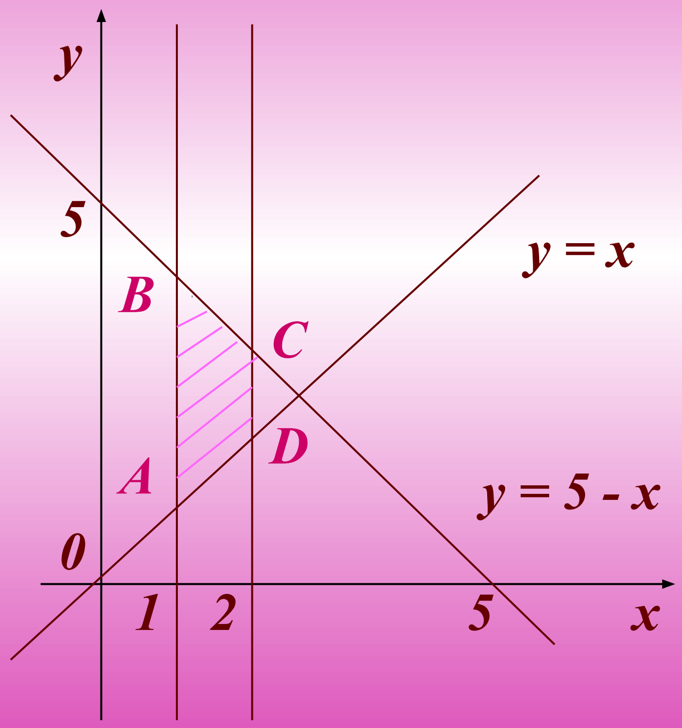
Свойство симметрии фигуры

Перемещение фигуры (сдвиг вдоль оси Оу)

Применение свойств интеграла (свойство аддитивности)

<u>Пример.</u> **Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями**

$$y = x,\ y = 5 - x,\ x = 1,\ x = 2.$$



$$S_{ABCD} = \int_1^2 \left(\left(5 - x\right) - x\right)dx =$$

$$= \int_1^2 \left(5 - 2x\right)dx = \left(5x - x^2\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \left(5 \cdot 2 - 2^2\right) - \left(5 \cdot 1 - 1^2\right) = 2$$

$$\textit{Ответ}: 2$$

Немного истории

«Интеграл» придумал **Якоб Бернулли** (1690г.)

«восстанавливать» от латинского integro

«целый» от латинского integer

«Примитивная функция»,

от латинского

primitivus – начальный,

ввел

Жозеф Луи Лагранж

(1797г.)

Интеграл в древности

Первым известным методом для расчёта интегралов является **метод исчерпания Евдокса** (*примерно* 370 до н. э.), который пытался найти площади и объёмы, разрывая их на бесконечное множество частей, для которых площадь или объём уже известен.

Архимед

Евдокс Книдский

Этот метод был подхвачен и развит **Архимедом**, и использовался для расчёта площадей парабол и приближенного расчёта площади круга.

Исаак Ньютон
(1643-1727)

Наиболее полное изложение дифференциального и интегрального исчислений содержится в **«Методе флюксий...»** (1670–1671, опубликовано в 1736).

Переменные величины - **флюенты (первообразная или неопределенный интеграл)**

Скорость изменения флюент – **флюксии (производная)**

Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646-1716)

$\int ydx$ **- впервые использован Лейбницем в конце XVII века**

Символ образовался из буквы S — сокращения слова *summa* (сумма)

Определенный интеграл

И. Ньютон

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$$

где $F'(x) = f(x)$

Г. Лейбниц

$$\int_b^a f(x)dx = \sum_{i \in [a,b]} f(x_i)dx_i$$

Формула Ньютона - Лейбница

$$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

- Таким образом, уже Архимед успешно находил площади фигур, несмотря на то, что в математике его времени не было понятия интеграла
- Но лишь интегральное исчисление дает общий метод решения всех подобных задач
- Недаром даже поэты воспевали интеграл

"Смысл - там, где змеи интеграла,
Меж цифр и букв, меж d и f"

В. Я. Брюсов

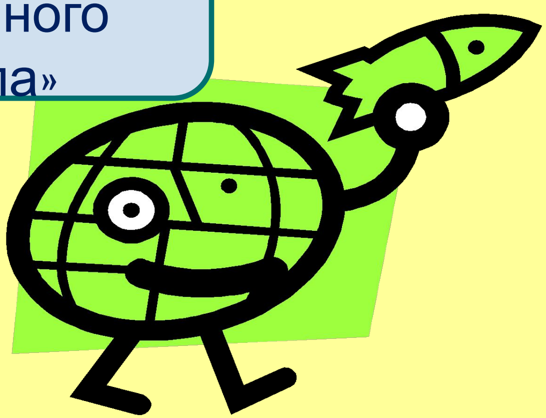
ИТОГИ УРОКА

Что планировали

Обобщить знания по теме «Вычисление площадей плоских фигур с помощью определённого интеграла»

Что сделали

1. Классифицировали задачи
2. Систематизировали способы решения
3. Скорректировали знания
4. Совершили экскурс в историю
5. Подготовились к контрольной работе по данной теме.



Символ интеграла в жизни

ЛИСТ САМООЦЕНКИ

	Навыки и умения	отметка
1.	Построение графиков функций	
2.	Выделение площади искомой фигуры	
3.	Определение общих точек графиков функций и пределов интегрирования	
4.	Выражение площади искомой фигуры через площади криволинейных трапеций или других фигур	
5.	Применение свойств фигур для упрощения решения	

СПАСИБО ЗА УРОК!

Домашнее задание:

1. ***п.58;***
2. ***№ 1017, 1018***