

ГАОУ ДПО СарИПКиПРО  
III региональный конкурс творческих  
работ по математике  
«Математика в моей жизни»  
Номинация «Бенефис одной задачи»

Задача

и пять методов её

решения

Выполнила: Шатилова Виктория  
Ученица 11 класса  
МОУ «СОШ р.п. Красный Текстильщик  
Саратовского района Саратовской области»  
Научный руководитель: Свириденко О.В.



2011г

# Введение

Для успешного изучения геометрии необходимо знать не только основные формулы и теоремы, но и владеть различными методами решения задач.

*Пять основных методов, применяемых в решении задач:*

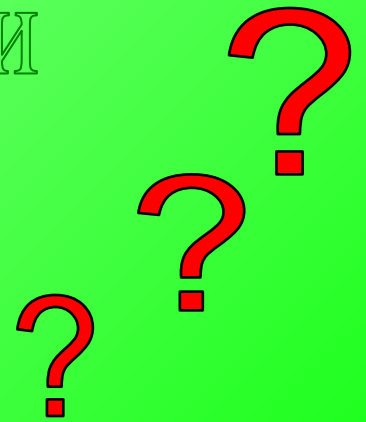


- ✓ **координатный**
- ✓ **векторный**
- ✓ **аналитический**
- ✓ **тригонометрический**
- ✓ **геометрический**

# Гипотеза:

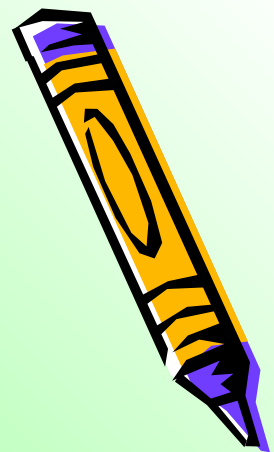
---

Возможно ли решить  
конкретную задачу всеми  
указанными методами?



# Цель работы:

Научиться распознаванию и использованию математических методов при рассмотрении различных решений одной и той же задачи

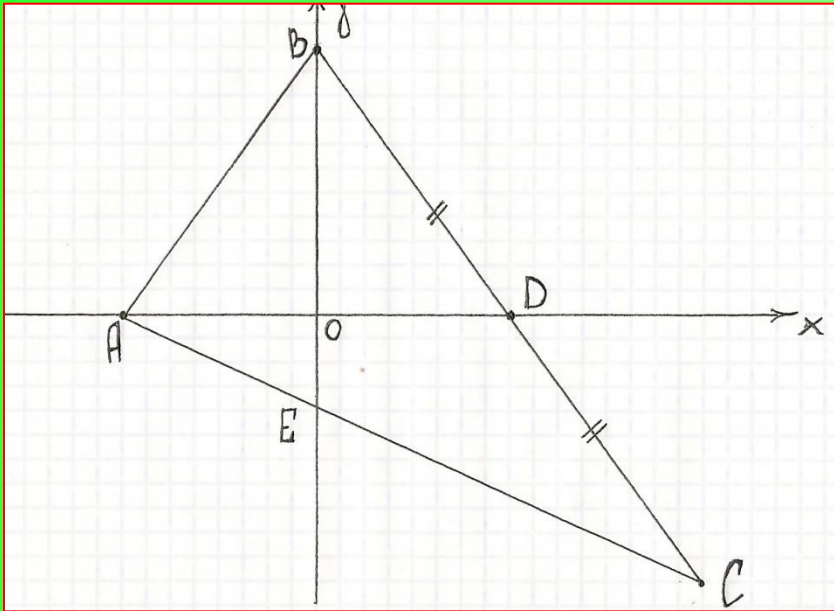


## Задачи работы:

- ✓ испробовать разные методы на одной задаче;
- ✓ выявить отличительные черты, сильные и слабые стороны разных методов.



**В треугольнике  $ABC$  биссектриса  $BE$  и медиана  $AD$  перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника  $ABC$ .**

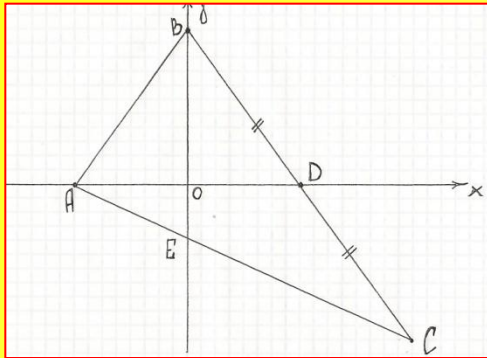
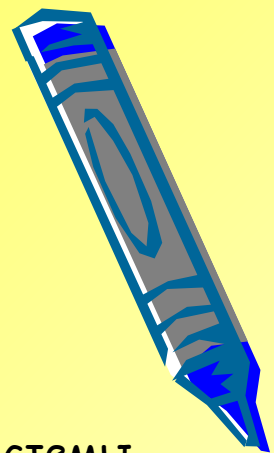


Приступая к решению задачи, сразу замечаем, что если  $O$  – точка пересечения биссектрисы  $BE$  и медианы  $AD$ , то прямоугольные треугольники  $ABO$  и  $DBO$  равны.

Поэтому  $AO=OD=2$  и  $AB=BD$ , так что  $BC=2AB$ .

# Способ первый:

# Координатный



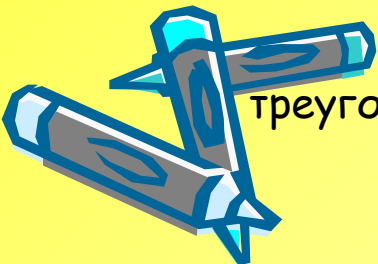
Примем точку  $O$  за начало прямоугольной системы координат, оси  $Ox$  придадим направление вектора  $OD$  и будем считать  $|\overrightarrow{OD}|$  единицей масштаба.

В данной системе точки  $A, D, B$  имеют координаты:  
 $A(-2;0), D(2;0)$  и  $B(0;b)$ .

Для того чтобы определить длины сторон треугольника  $ABC$ , надо найти число  $b$ . Выразим через  $b$  координаты точек  $C$  и  $E$ . Так как  $D$  - середина отрезка  $BC$ , то  $C(4;-b)$ . Для точки  $E$  имеем координаты  $(0;y)$ . Вторую координату точки  $E$  найдем, пользуясь, тем что точка  $E$  принадлежит прямой  $AC$ . Уравнение прямой  $AC$  имеет вид:  $\frac{x+2}{6} = \frac{y}{-b}$ . Координаты точки  $E(0;y)$  удовлетворяют этому уравнению. Подставив в него  $0$  вместо  $x$ , получим:  $y = -\frac{1}{3}b$ . Следовательно,  $BE = \frac{4}{3}b$ . По условию задачи  $BE=4$ , значит,  $\frac{4}{3}b=4$ , или  $b=3$ .

Итак,  $A(-2;0), B(0;3), C(4;-3)$ . Зная координаты вершин треугольника  $ABC$ , найдем его стороны:

$$AB = \sqrt{13}, BC = 2\sqrt{13}, AC = 3\sqrt{5}$$



# Способ второй:

# Векторный

$$\vec{BA} = \vec{a}, \vec{BC} = \vec{c}.$$

Векторы  $BE$  и  $AD$  выразим через  $a$  и  $c$ . Так как  $BC=2BD$ , то  $CE=2AE$  (по свойству биссектрисы треугольника). Пользуясь формулой деления отрезка в данном отношении, получим:  $\vec{BE} = \frac{c+2a}{3}$

Согласно вычитанию векторов, имеем:  $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}$

Длины векторов  $BE$  и  $AD$  известны. Пусть  $|\vec{a}| = a$ , тогда  $|\vec{c}| = 2a$

Вычислив скалярные квадраты векторов  $BE$  и  $AD$ ,

получим уравнения:

$$2a^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} = 36$$

$$2a^2 - \vec{a} \cdot \vec{c} = 16$$

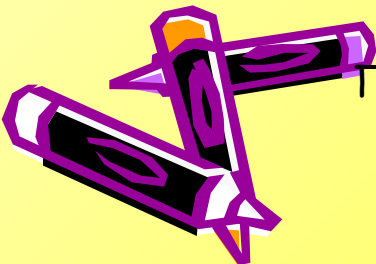
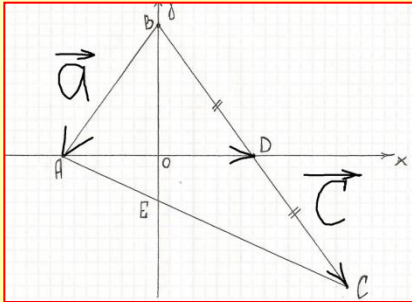
$$a^2 = 13, \vec{a} \cdot \vec{c} = 10.$$

Значит,  $AB = \sqrt{13}, BC = 2\sqrt{13}$ .

Найдем теперь через сторону  $AC$ , пользуясь векторной

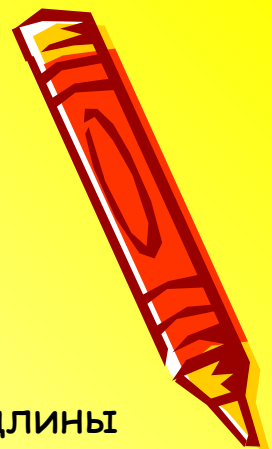
формулировкой теоремы косинусов:  $AC^2 = 5a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c}$ .

Подставим найденные выше значения и получим:  $AC = 3\sqrt{5}$



# Способ третий:

# Аналитический



Медиану AD и биссектрису BE треугольника ABC выразим через длины a, b, c сторон треугольника по формулам:

$$AD^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$BE^2 = ac - a_1c_1, \text{ где}$$

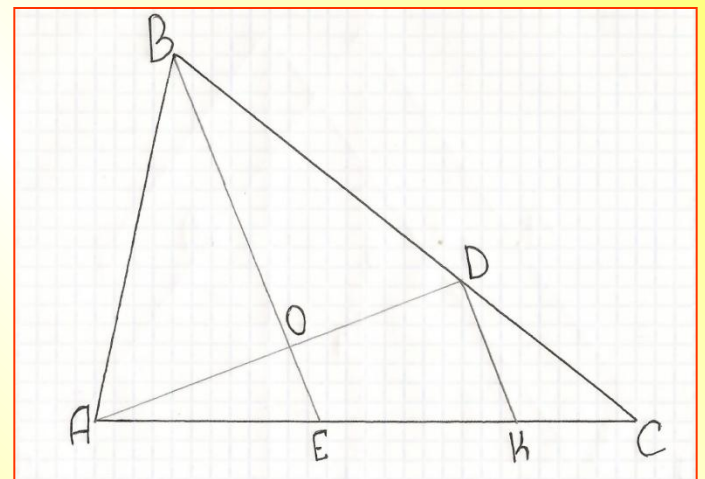
$$a_1 = CE, c_1 = AE$$

Пусть  $AB=x$ ,  $AE=y$ , тогда  $BC=2x$  и  $CE=2y$ .  
Получим систему уравнений:

$$\frac{x^2 + 9y^2}{2} - x^2 = 16$$

$$x^2 - y^2 = 8$$

Отсюда,  $x^2 = 13$ ,  $y^2 = 5$ . Значит,  $AB = \sqrt{13}$ ,  $AC = 3\sqrt{5}$





# Способ четвертый:

## Тригонометрический

Обозначим  $AB=x$ , угол  $ABC=2\alpha$ . По теореме косинусов из треугольников  $ABE$  и  $BCE$  находим:

$$AE^2 = x^2 + 16 - 8x \cos \alpha,$$

$$CE^2 = 4x^2 + 16 - 16x \cos \alpha.$$

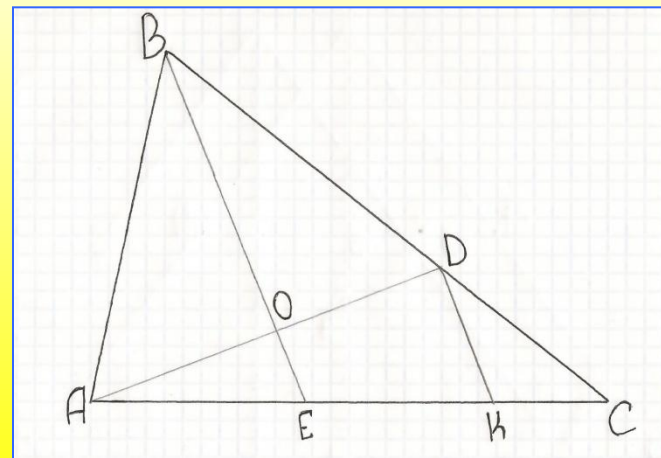
Учитывая, что  $CE=2AE$  или  $CE^2=4AE^2$ ,

получаем:  $x \cos \alpha = 3$ .

Но  $x \cos \alpha = BO$ , значит,  $BO=3$  и  $OE=1$ .

Остается, пользуясь теоремой Пифагора, вычислить стороны треугольника  $ABC$ .

$$AB = \sqrt{13}, BC = 2\sqrt{13}, AC = 3\sqrt{5}$$

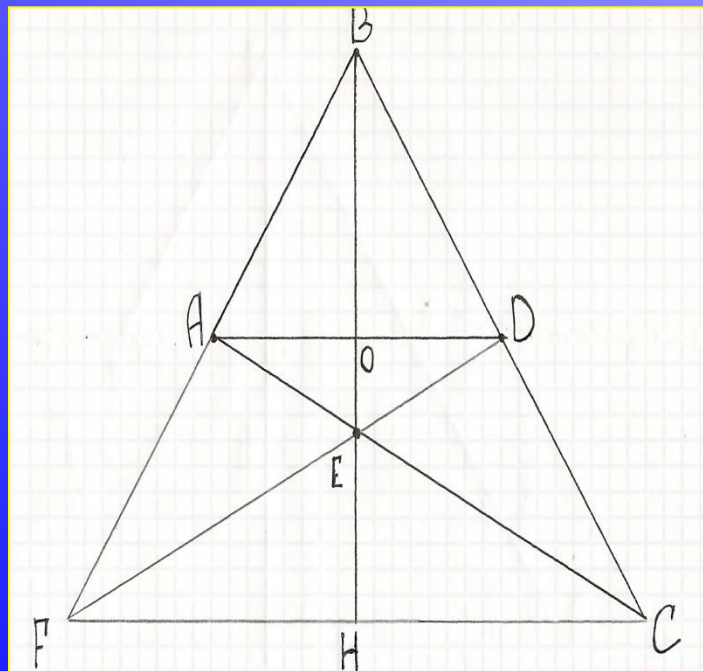


# *Геометрический способ*

- 1. С помощью площадей*
- 2. С помощью осевой симметрии*
- 3. По теореме о средней линии треугольника*
- 4. По теореме Менелая*

# Способ пятый:

## С помощью площадей



Так как  $AO=OD=2$ ,  $BE=4$  и  $AD$  перпендикулярна  $BE$ , то площадь каждого из треугольников  $BAE$  и  $BDE$  равна 4. Площадь треугольника  $CDE$  так же равна 4, так как медиана  $ED$  делит треугольник  $BCE$  на два равновеликих треугольника.

Значит, площадь треугольника  $ABC$  равна 12.

По скольку  $AD$ -медиана треугольника  $ABC$ , то площадь треугольника  $ABD$  равна 6.

Остается применить формулу площади треугольника. Получим:  $AO \cdot BO = 6$ .

Но  $AO=2$ , значит,  $BO=3$

Стороны треугольника  $ABC$  найдем по теореме Пифагора.

$$AB = \sqrt{13}, BC = 2\sqrt{13}, AC = 3\sqrt{5}$$

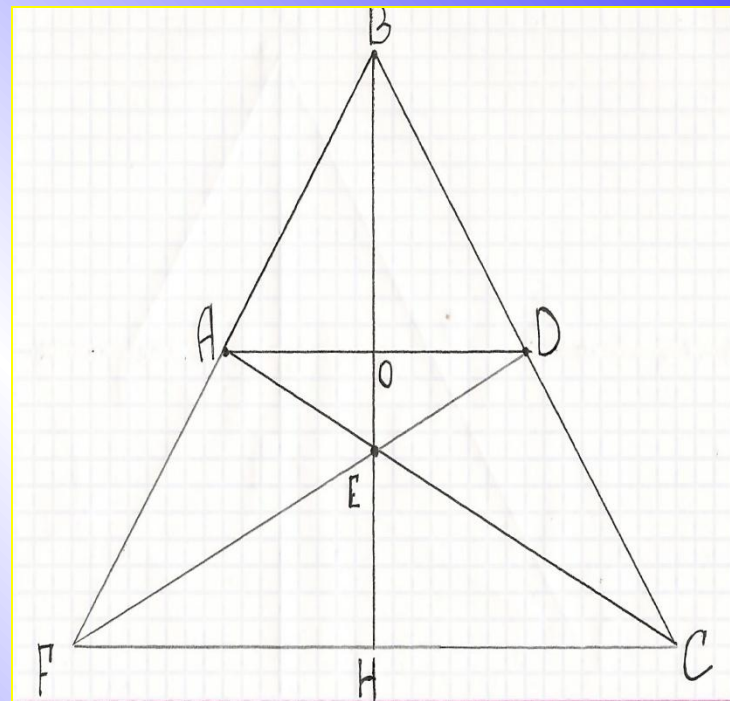


# Способ шестой:

## С помощью осевой симметрии

Точки  $A$  и  $D$  симметричны относительно биссектрисы  $BE$ . Построим еще точку, симметричную точке  $C$  относительно прямой  $BE$ . Для этого продолжим отрезок  $DE$  до пересечения с прямой  $AB$  и обозначим через  $F$  точку пересечения прямых  $AB$  и  $DE$ . Получим равнобедренный треугольник  $BCF$ , из равенства треугольника  $BEF$  и  $BEC$  следует, что  $BF=BC$ . Продолжим еще биссектрису  $BE$  до пересечения с  $CF$  в точке  $H$ . Тогда  $BH$  - биссектриса треугольника  $BCF$ , а следовательно, и его медиана. Таким образом,  $E$  - точка пересечения медиан треугольника  $BCF$ , и поэтому  $EH=0,5BE=2$ , а  $BH=6$ .

Средняя линия  $AD$  треугольника  $BCF$  делит медиану  $BH$  пополам, поэтому  $BO=3$ . Далее поступаем так же, как при решении задачи другими способами и получаем тот же ответ.

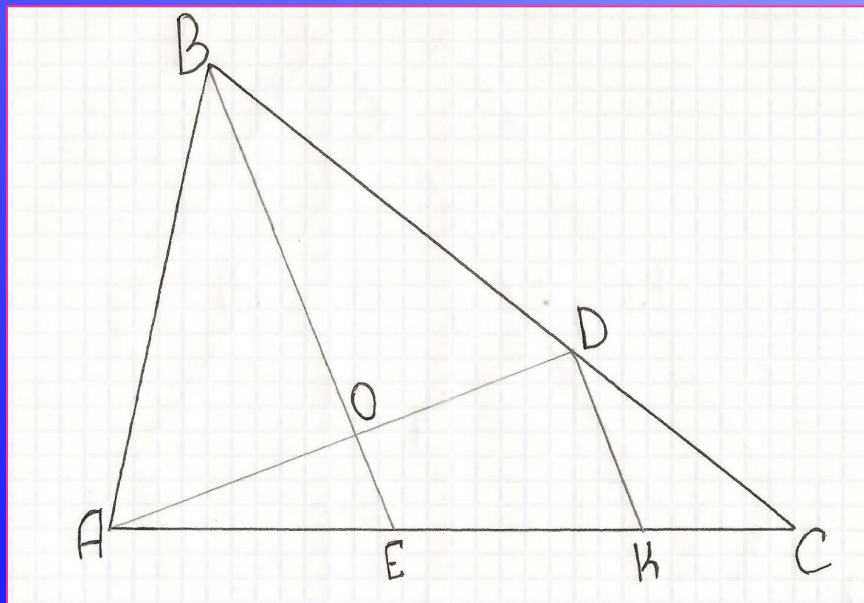


$$AB = \sqrt{13}, BC = 2\sqrt{13}, AC = 3\sqrt{5}$$



# Способ седьмой:

## По теореме о средней линии треугольника



Проведем среднюю линию DK  
треугольника BCE. Так как DK  
параллельна BE и  $AO=OD$ , то  
OE - средняя линия  
треугольника ADK.

Следовательно  $OE = \frac{1}{2}DK, DK = \frac{1}{2}BE, \text{ т.е. } OE = \frac{1}{4}BE$   
Так как  $BE=4$ , то  $OE=1$  и  $BO=3$

Из приведенного решения видно, что  
отношение  $BO/OE$  не зависит от  
отрезков BE и AD. Найти это  
отношение можно также, используя  
лишь тот факт, что AD - медиана  
треугольника ABC и  $AO=OB$ , причем  
без всяких вспомогательных  
построений.

$$AB = \sqrt{13}, BC = 2\sqrt{13}, AC = 3\sqrt{5}$$



# Способ восьмой:

## По теореме Менелая



Секущая  $BE$  пересекает стороны треугольника  $ACD$  в точках  $E$  и  $O$ . По теореме Менелая из треугольника  $ACD$  имеем:

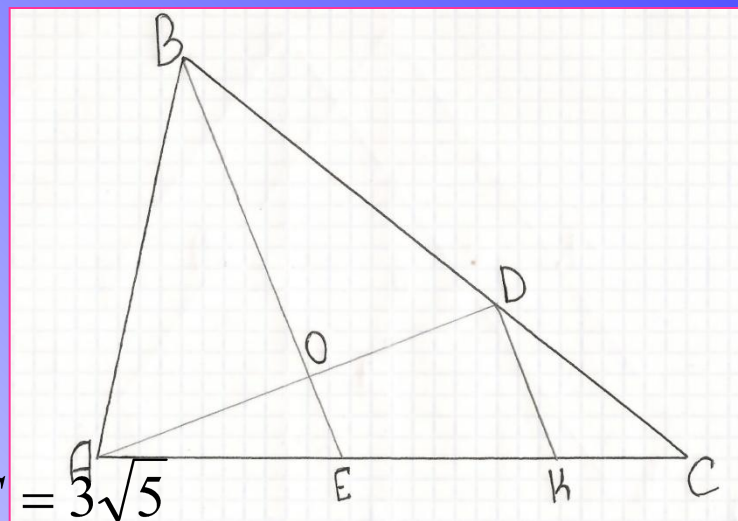
$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DO}{OA} = 1$$

а так как  $\frac{CB}{BD} = 2, DO = OA$ , то  $AE = \frac{1}{2} EC$

Применив теперь теорему Менелая к треугольнику  $BCE$  и секущей  $AD$ , получим:  $\frac{BO}{OE} \cdot \frac{EA}{AC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1$

Но  $AE/AC = 1/3$  и  $CD = DB$ .

Следовательно,  $BO/OE = 3$ .



$$AB = \sqrt{13}, BC = 2\sqrt{13}, AC = 3\sqrt{5}$$





# Вывод:

---

В ходе работы мы рассмотрели пять методов решения конкретной задачи:

- ✓ координатный
- ✓ векторный
- ✓ аналитический
- ✓ тригонометрический
- ✓ геометрический

Как правило, основными методами решения планиметрических задач на вычисления являются алгебраические и тригонометрические методы. Но как видно из работы, геометрические методы оказались проще и изящнее, хотя к ним можно прийти только догадавшись провести некоторые вспомогательные линии. Таким образом, важно владеть геометрическими приемами, которые позволяют найти наиболее простое и красивое решение с помощью дополнительных построений.

---



# ***Литература:***

---



- Научно-теоретический и методический журнал МО РФ «Математика в школе» №3 1994
-