ГАОУ ДПО СарИПКиПРО
III региональный конкурс творческих работ по математике
«Математика в моей жизни»
Номинация «Бенефис одной задачи»

Задача и пять методов её решения

Выполнила: Шатилова Виктория
Ученица 11 класса
МОУ «СОШ р.п. Красный Текстильщик
Саратовского района Саратовской области»
Научный руководитель: Свириденко О.В.

2011г

Введение

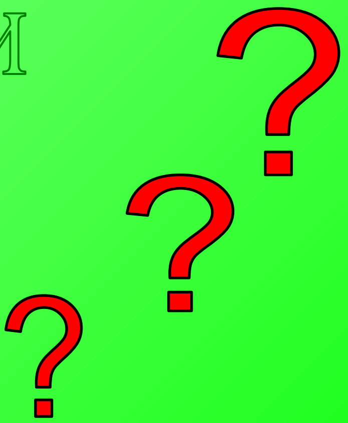
Для успешного изучения геометрии необходимо знать
не только основные формулы и теоремы, но и владеть различными методами решения задач.

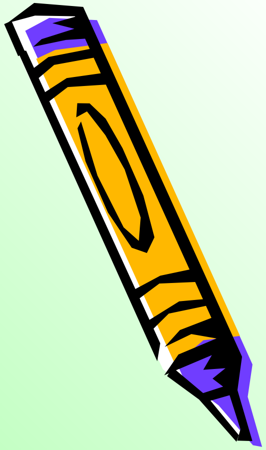
Пять основных методов, применяемых в решении задач:

- ***координатный***
- ***векторный***
- ***аналитический***
- ***тригонометрический***
- ***геометрический***

Гипотеза:

Возможно ли решить конкретную задачу всеми указанными методами?





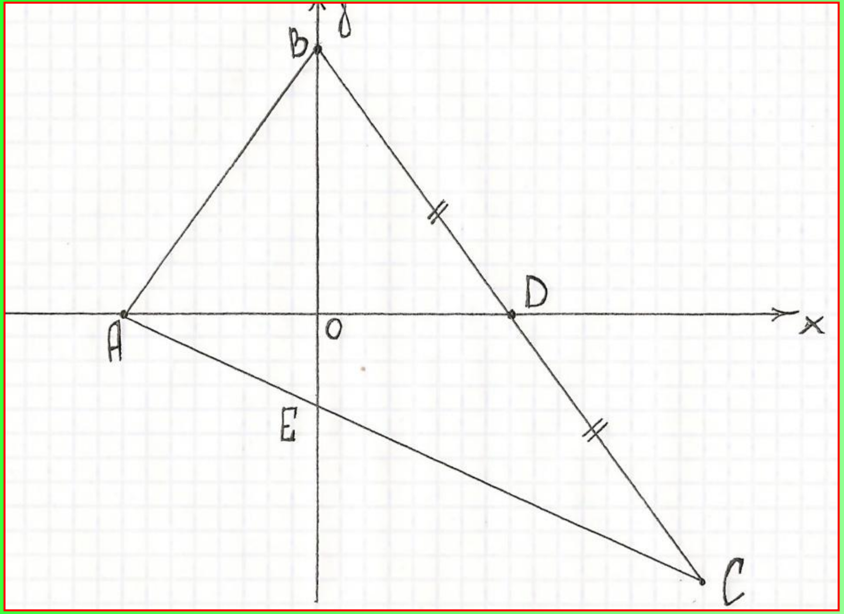
Цель работы:

Научиться распознаванию и использованию математических методов при рассмотрении различных решени одной и той же задачи

Задачи работы:

- ✔ испробовать разные методы на одной задаче;
- ✔ выявить отличительные черты, сильные и слабые стороны разных методов.

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника ABC.

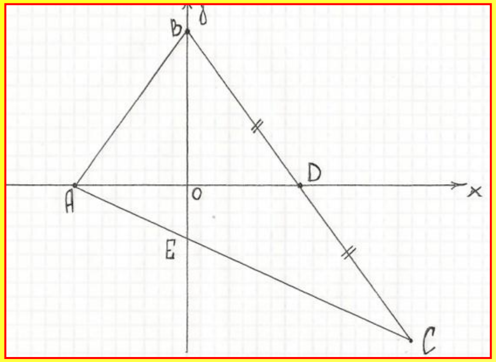


Приступая к решению задачи, сразу замечаем, что если O – точка пересечения биссектрисы BE и медианы AD, то прямоугольные треугольники ABO и DBO равны.

Поэтому AO=OD=2 и AB=BD, так что BC=2AB.

Способ первый:

Координатный



Примем точку O за начало прямоугольной системы координат, оси Ox придадим направление вектора OD и будем считать $\frac{|\overrightarrow{OD}|}{2}$ единицей масштаба.

В данной системе точки A, D, B имеют координаты:

A (-2;0), D (2;0) и B (0;b).

Для того чтобы определить длины сторон треугольника ABC, надо найти число b. Выразим через b координаты точек C и E. Так как D – середина отрезка BC, то C (4;-b). Для точки E имеем координаты (0;y). Вторую координату точки E найдем, пользуясь, тем что точка E принадлежит прямой AC. Уравнение прямой AC имеет вид: $\frac{x+2}{6} = \frac{y}{-b}$

Координаты точки E (0;y) удовлетворяют этому уравнению. Подставив в него 0 вместо x, получим: $y = -\frac{1}{3}b$ Следовательно, $BE = \frac{4}{3}b$ По условию задачи BE=4, значит, $\frac{4}{3}b = 4$, или b=3.

Итак, A (-2;0), B (0;3), C (4;-3). Зная координаты вершин треугольника ABC, найдем его стороны:

$$AB = \sqrt{13}, BC = 2\sqrt{13}, AC = 3\sqrt{5}$$

Способ второй:

Векторный

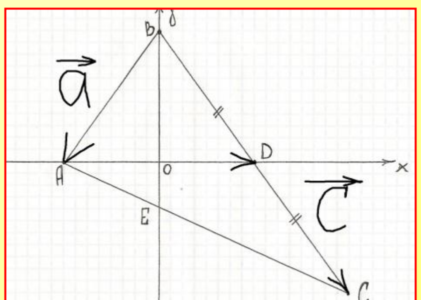
$$\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{c}.$$

Векторы BE и АД выразим через а и с.Так как BC=2BD, то CE=2AE(по свойству биссектрисы треугольника). Пользуясь формулой деления отрезка в данном отношении, получим: $\overrightarrow{BE} = \dfrac{\vec{c} + 2\vec{a}}{3}$

Согласно вычитанию векторов, имеем: $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}$

Длины векторов BE и AD известны. Пусть $|\vec{a}| = a, тогда |\vec{c}| = 2a$

Вычислив скалярные квадраты вектором BE и AD, получим уравнения:



$$2a^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} = 36$$

$$2a^2 - \vec{a} \cdot \vec{c} = 16$$

$$a^2 = 13, \vec{a} \cdot \vec{c} = 10.$$

$$Значит, AB = \sqrt{13}, BC = 2\sqrt{13}.$$

Найдем теперь через сторону AC, пользуясь векторной формулировкой теоремы косинусов: $AC^2 = 5a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c}.$

Подставим найденные выше значения и получим: $AC = 3\sqrt{5}$

Способ третий:

Аналитический

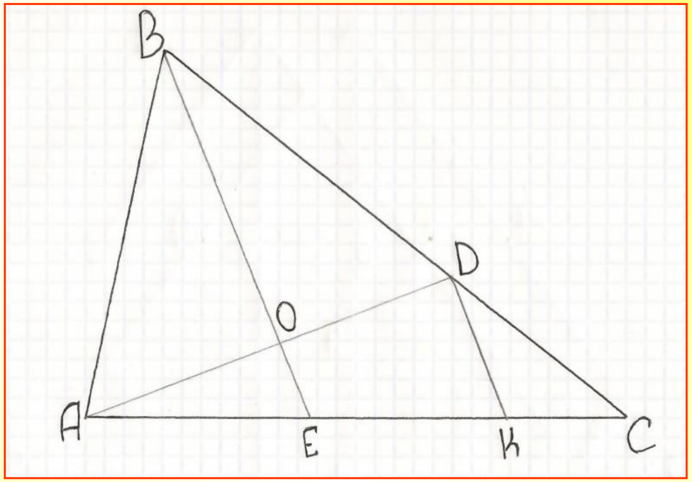
Медиану AD и биссектрису BE треугольника ABC выразим через длины a, b, c сторон треугольника по формулам:

$$AD^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$$

$$BE^2=ac-a_1c_1, где$$

$$a_1=CE, c_1=AE$$

Пусть AB=x, AE=y, тогда BC=2x и CE=2y.
Получим систему уравнений:



$$\frac{x^2+9y^2}{2}-x^2=16$$

$$x^2-y^2=8$$

$$Отсюда, x^2=13, y^2=5. Значит, AB=\sqrt{13}, AC=3\sqrt{5}$$

Способ четвертый:

Тригонометрический

Обозначим AB=x, угол ABC=2α. По теореме косинусов из треугольников ABE и BCE находим:

$$AE^2 = x^2 + 16 - 8x\cos\alpha,$$

$$CE^2 = 4x^2 + 16 - 16x\cos\alpha.$$

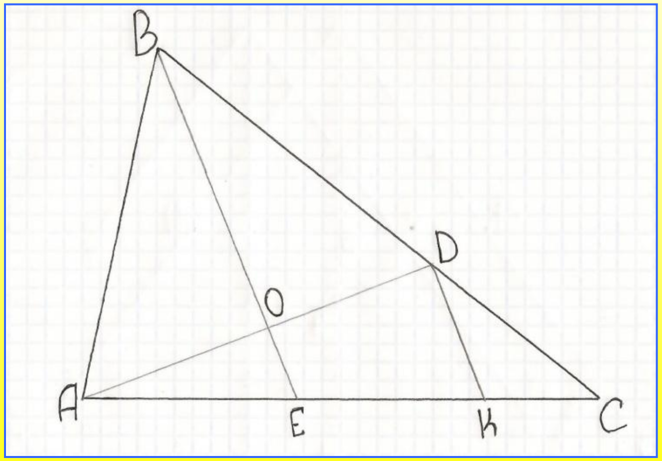
Учитывая, что CE=2AE или $CE^2=4AE^2$,

получаем: x cos α=3.

Но x cos α=BO, значит, BO=3 и OE=1.

Остается, пользуясь теоремой Пифагора, вычислить стороны треугольника ABC.

$$AB = \sqrt{13}, BC = 2\sqrt{13}, AC = 3\sqrt{5}$$



Геометрический способ

1. С помощью площадей

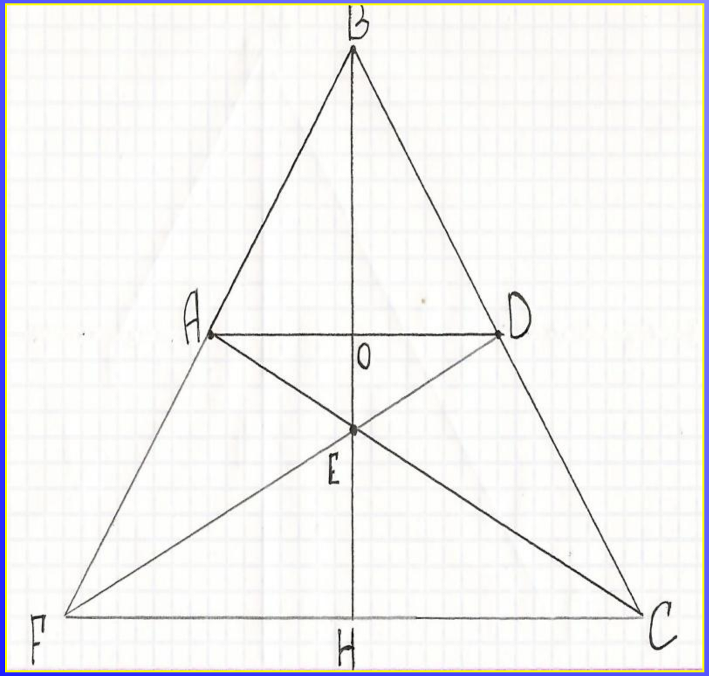
2. С помощью осевой симметрии

3. По теореме о средней линии треугольника

4. По теореме Менелая

Способ пятый:

С помощью площадей



Так как AO=OD=2, BE=4 и

AD перпендикулярна BE, то площадь каждого из треугольников BAE и BDE равна 4. Площадь треугольника CDE так же равна 4, так как медиана ED делит треугольник BCE на два равновеликих треугольника.

Значит, площадь треугольника ABC равна 12.

По скольку AD-медиана треугольника ABC,

то площадь треугольника ABD равна 6.

Остается применить формулу площади треугольника. Получим: AO*BO=6.

Но AO=2, значит, BO=3

Стороны треугольника ABC найдем по теореме Пифагора.

$$AB = \sqrt{13}, BC = 2\sqrt{13}, AC = 3\sqrt{5}$$

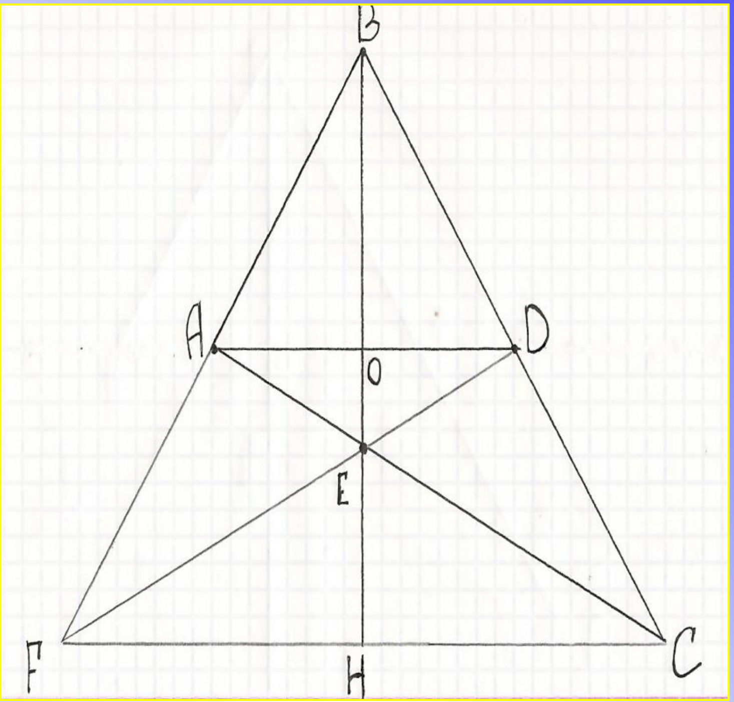
Способ шестой:

С помощью осевой симметрии

Точки A и D симметричны относительно биссектрисы BE. Построим еще точку, симметричную точке C относительно прямой BE. Для этого продолжим отрезок DE до пересечения с прямой AB и обозначим через F точку пересечения прямых AB и DE. Получим равнобедренный треугольник BCF, из равенства треугольника BEF и BEC следует, что BF=BC. Продолжим еще биссектрису BE до пересечения с CF в точке H. Тогда BH - биссектриса треугольника BCF, а следовательно, и его медиана. Таким образом, E – точка пересечения медиан треугольника BCF,

и поэтому EH=0,5BE=2, а BH=6.

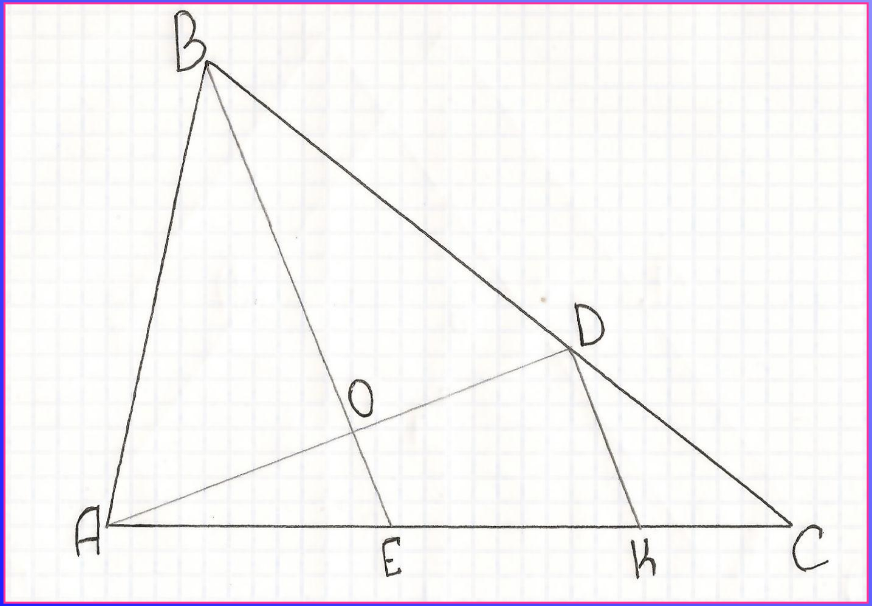
Средняя линия AD треугольника BCF делит медиану BH пополам, поэтому BO=3. Далее поступаем так же, как при решении задачи другими способами и получаем тот же ответ.



$$AB=\sqrt{13}, BC=2\sqrt{13}, AC=3\sqrt{5}$$

Способ седьмой:

По теореме о средней линии треугольника



Проведем среднюю линию DK треугольника BCE. Так как DK параллельна BE и AO=OD, то OE – средняя линия треугольника ADK.

Следовательно: $OE = \frac{1}{2}DK, DK = \frac{1}{2}BE, т.е. OE = \frac{1}{4}BE$

Так как BE=4, то OE=1 и BO=3

Из приведенного решения видно, что отношение BO/OE не зависит от отрезков BE и AD. Найти это отношение можно также, используя лишь тот факт, что AD – медиана треугольника ABC и AO=OB, причем без всяких вспомогательных построений.

$$AB = \sqrt{13}, BC = 2\sqrt{13}, AC = 3\sqrt{5}$$

Способ восьмой:

По теореме Менелая

Секущая BE пересекает стороны треугольника ACD в точках E и O. По теореме Менелая из треугольника ACD имеем:

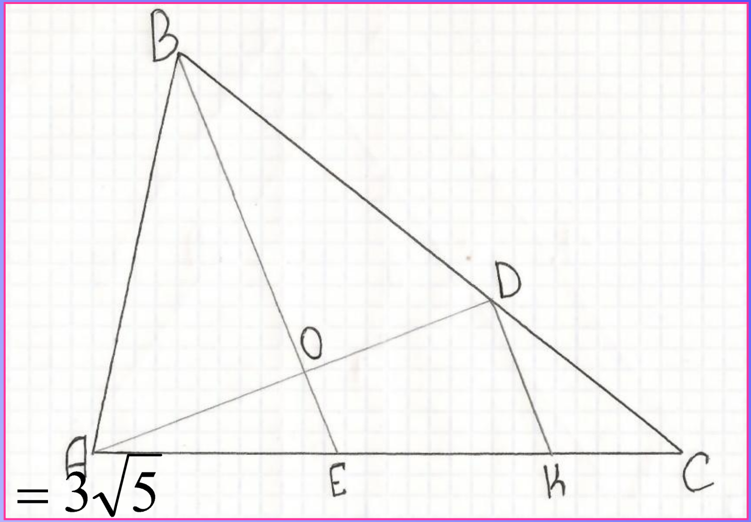
$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DO}{OA}=1$$

а так как ${}^{CB}\!/_{BD}=2, DO=OA, \text{то} AE=\frac{1}{2}EC$

Применив теперь теорему Менелая к треугольнику BCE и секущей AD, получим: $\frac{BO}{OE}\cdot\frac{EA}{AC}\cdot\frac{CD}{DB}=1$

Но AE/AC=1/3 и CD=DB.

Следовательно, BO/OE=3.



$$AB=\sqrt{13}, BC=2\sqrt{13}, AC=3\sqrt{5}$$

Вывод:

В ходе работы мы рассмотрели пять методов решения конкретной задачи:

- координатный
- векторный
- аналитический
- тригонометрический
- геометрический

Как правило, основными методами решения планиметрических задач на вычисления являются алгебраические и тригонометрические методы. Но как видно из работы, геометрические методы оказались проще и изящнее, хотя к ним можно прийти только догадавшись провести некоторые вспомогательные линии. Таким образом, важно владеть геометрическими приемами, которые позволяют найти наиболее простое и красивое решение с помощью дополнительных построений.

Литература:

- Научно-теоретический и методический журнал МО РФ «Математика в школе»
  №3 1994