ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Задача заключается в определении оптимального маршрута объезда *n* городов по критерию времени, стоимости или длине маршрута. Эта задача связана с определением гамельтонова цикла минимальной длины.

Основным методом решения таких задач является метод ветвей и границ. Сущность метода заключается в том, что все множество допустимых решений задачи делится на последовательно уменьшающиеся подмножества с помощью процедуры ветвления. В результате находится последовательность объезда пунктов (маршрут), протяженность которого меньше любого другого возможного варианта, т.е. строится оптимальный кольцевой маршрут.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Построить оптимальный кольцевой маршрут для неографа *G(X,Y)* (рис. 10.36) с вершинами x_i, $i = \overline{1,6}$. Пропускные способности ребер указаны на графе.

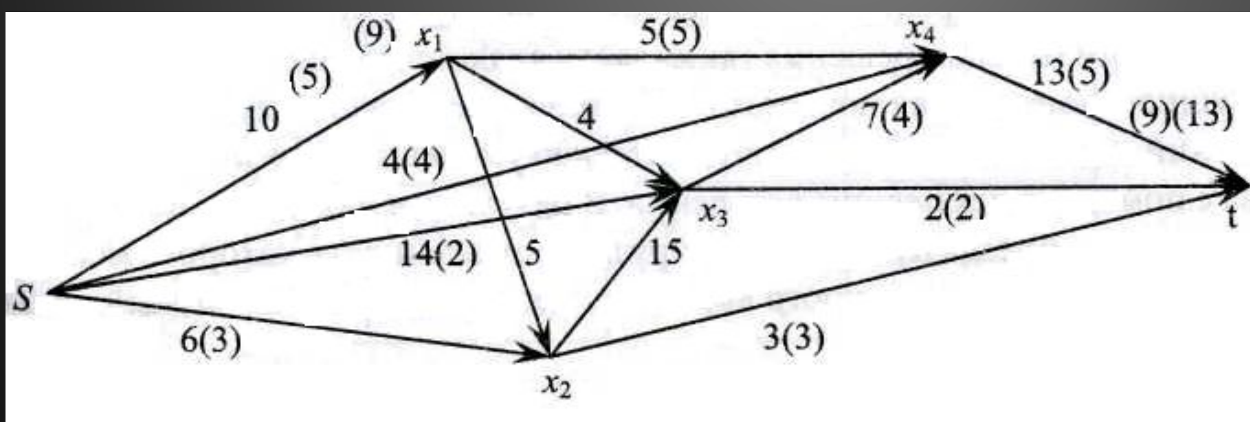
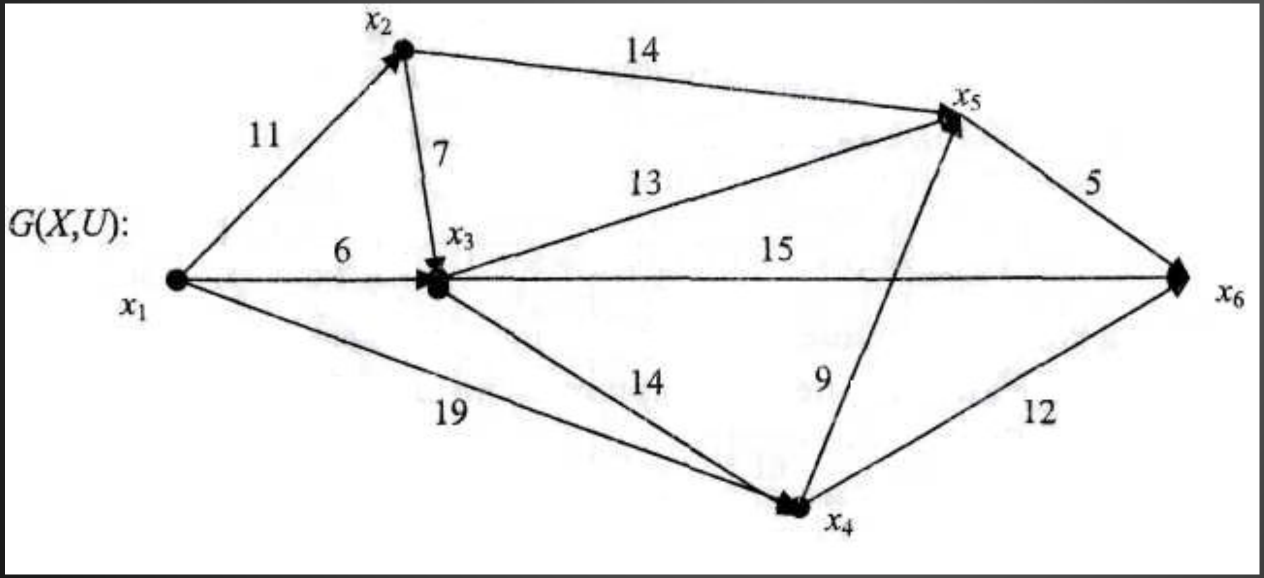


Рис. 10.36

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

1. Составим матрицу пропускных способностей ребер *C(G)* графа *G(X,U)* рис.10.37.



- Рис. 10.37

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Пропускную способность между однородными вершинами условно принимаем равну $c_{ii} = \infty,\ i = \overline{1,6}$ ности, т.е. (клетки главной диагонали матрицы *C*)

C_6:

	s	x_1	x_2	x_3	x_4	t
s		9	3	2	4	
x_1			0	4	5	
x_2			0			3
x_3						2
x_4						13
t						

- (10.14)

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Для определения нижней границы множества выполним приведение матрицы (табл. 10.14), т.е. в каждом столбце и строке матрица должна содержать не менее одного нуля. С этой целью выберем в каждой строке минимальный элемент и запишем их в правой колонке табл. 10.14.

$C(G)$: (10.14)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\min_k a_{ik}$
x_1	∞	11	6	18	19	21	6
x_2	11	∞	7	21	14	19	7
x_3	6	7	∞	14	13	15	6
x_4	19	21	14	∞	9	12	9
x_5	19	14	13	9	∞	5	5
x_6	21	19	15	12	5	∞	5

- Табл. 10.14.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Вычитая из элементов каждой строки соответствующие значения min a_{ik}, получаем табл. 10.15.

$C_1(G)$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	5	0	13	13	15
x_2	4	∞	0	14	7	12
x_3	0	1	∞	8	7	9
x_4	10	12	5	∞	0	3
x_5	14	9	8	4	∞	0
x_6	16	14	10	7	0	∞
$\min\limits_i a_{ik}$	0	1	0	4	0	0

- Табл. 10.15

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Для завершения приведения матрицы табл. 10.15 вычитаем минимальные значения в каждом столбце min a_{ik} и получим приведенную матрицу (табл. 10.16). Сумма констант приведения по строкам и столбцам матрицы составит:

$$H = 6 + 7 + 6 + 9 + 5 + 5 + 1 + 4 = 43.$$

Сумма констант приведения H = 43 является границей всех циклов, т.е. любой вариант кольцевого маршрута не может быть меньше этой нижней границы.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

С помощью ветвления рассматриваются циклы (последовательности обхода вершин графа), которые могут привести к построению оптимального (минимального) кольцевого маршрута.

На первом этапе построения древовидного графа множество всех циклов делится на два подмножества: первое из них включает все циклы (замкнутые маршруты) с перемещением от вершины x_i к вершине x_k, а второе множество содержит циклы без этого перемещения.

На графе ветвления от исходной вершины $H = 43$ отходят две дуги (ветви): к вершине *(i,k)*, изображающей первое из этих подмножеств и к вершине, указывающее второе (рис. 10.38).

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

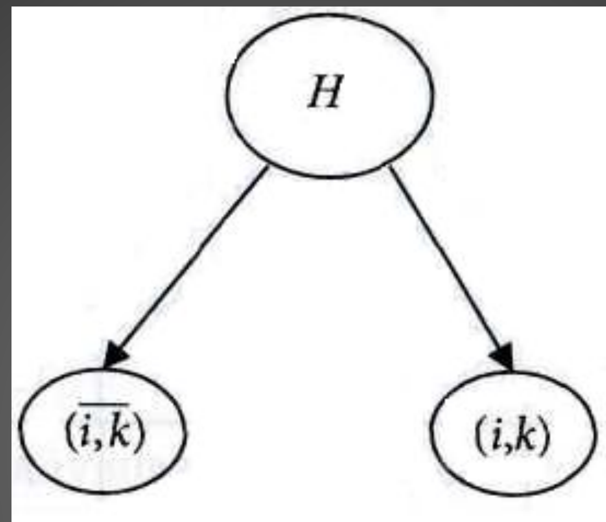


Рис. 10.38

Рассмотрим, как выбирается пара вершин *(i,k)* $(\overline{i,k})$. Пара вершин *(x_i, x_k)* на основании *a(i,k)*, которые рассчитываются для всех клеток приведенной матрицы (10.15), содержащих нули. Для определения *a(i,k)* в строке x_i выбирается минимальный элемент ($c_{ik} = 0$) и минимальный в столбце x_k. Эти минимальные элементы складываются, а их сумма равна значению *a(i,k)*.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- В рассматриваемом примере эти значения элементов в строках укажем справа, а в столбцах — внизу (табл. 10.16), сумму минимальных элементов запишем в клетках, содержащих нули и отметим их кружком (табл. 10.16). Вычислим *a(i,k)* для каждой клетки с нулевым элементами:

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	∞	4	4 0	9	13	15	4
x_2	4	∞	4 0	10	7	12	4
x_3	4 0	4 0	∞	4	7	9	0
x_4	10	11	5	∞	3 0	3	3
x_5	4	8	8	3 0	∞	3 0	0
x_6	16	13	10	3	3 0	∞	3
	4	4	0	3	0	3	

- (10.16)

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

$\alpha(1,3) = 4 + 0,\quad \alpha(2,3) = 4 + 0,\quad \alpha(3,1) = 0 + 4,$

$\alpha(3,2) = 0 + 4,\quad \alpha(4,5) = 3 + 0,\quad \alpha(5,4) = 0 + 3,$

$\alpha(5,6) = 0 + 3,\quad \alpha(6,5) = 3 + 0.$

Запишем значения *α(i,k)* в соответствующих клетках с нулями, отмечая их кружками в табл. 10.16, выбираем наибольшее значение *α(i,k)*

Таких значений в табл. 10.16 четыре. Выбираем одно из них, например, *α(3,1) = 0 + 4 =4* (для строки x_3 и столбца x_1.

Вычеркивая их, получаем табл. 10.17, в которой нуль, расположенный в строке x_1 и столбце x_3, заменяем на ∞, так как вершина x_3 не должна иметь цикла (3,1), т.е. c_{13} =∞

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	4	∞	9	13	15
x_2	∞	0	10	7	12
x_4	11	5	∞	0	3
x_5	8	8	0	∞	0
x_6	13	10	3	0	∞

- (10.17)

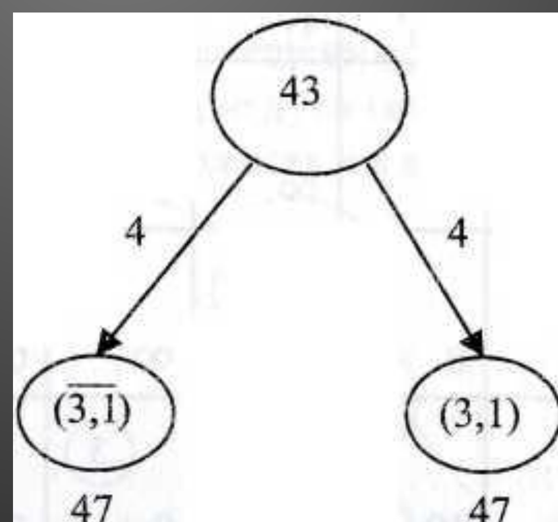


Рис. 10.39

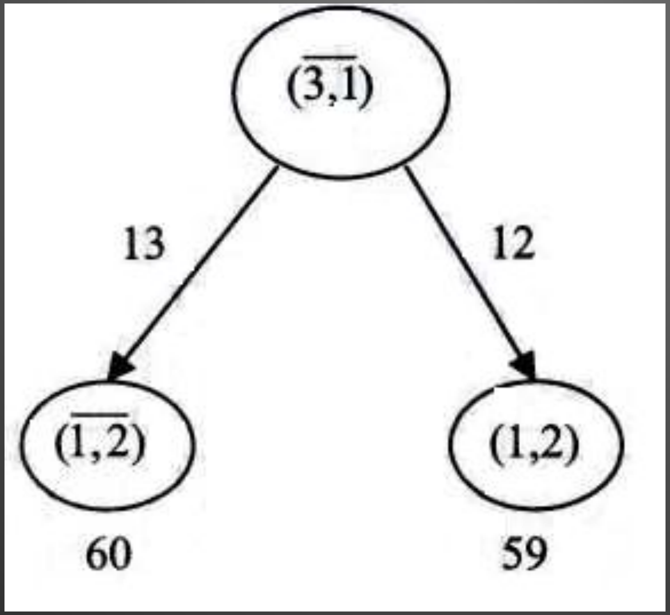
ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Определяем ребро ветвления, деля множества маршрутов на два $(\overline{3,1})$ и (3,1), рис. 10.39. Нижняя граница вершины $(\overline{3,1})$ представляет сумму значений нижней границы предыдущей вершины, р $\alpha(\overline{3,1}) = 4,$ и $H(\overline{3,1}) = 43 + 4 = 47.$

- Для определения нижней границы вершины вторым слагаемым берется сумма констант приведения матрицы 10.17. Для приведения этой матрицы из строки x_1 следует вычесть минимальный элемент 4 и получим матрицу 10.18.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Сумма констант приведения равна $h = 4$. Нижняя граница вершины (3,1) составит $H(3,1) = 43 + 4 = 47$ (рис. 10.40).



- Рис. 10.40

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Для получения следующей пары вершин от вершины (3,1) определим α и выберем новую пару вершин, входящих в концевой маршрут.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

В табл. 10.18 укажем минимальные элементы в строках и столбцах, записанных справа и внизу этой таблицы соответственно. Вычислим сумму констант приведения α*(i,k)* и включим их в табл. 10.18:

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	13 0	∞	5	9	12	5
x_2	∞	12 0	10	7	12	7
x_4	11	5	∞	3 0	3	3
x_5	8	8	3 0	∞	3 0	0
x_6	13	10	3	3 0	∞	3
	8	5	3	0	3	

- Табл. 10.18

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

$$\alpha(1,2) = 5 + 8 = 13 \quad \alpha(2,3) = 7 + 5 = 12,$$
$$\alpha(4,5) = 3 + 0 \quad \alpha(5,4) = 0 + 3,$$
$$\alpha(5,6) = 0 + 3 \quad \alpha(6,5) = 3 + 0.$$

Принимаем вершины x_1 и x_2 с величиной приведения $\alpha(1,2) = 13$ в качестве звена в кольцевом маршруте.

В табл. 10.18 вычеркиваем столбец x_2 и получаем та

Табл.10.19

	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	∞	10	7	12
x_4	5	∞	0	3
x_5	8	0	∞	3
x_6	10	3	0	∞

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Определяем вершины ветвления для ребер (1,2) $(\overline{1,2})$.
Нижняя граница вершины $(\overline{1,2})$. определяется из условия $H(\overline{1,2}) = H(3,1) + \alpha(1,2)$, $H(\overline{1,2}) = 47 + 13 = 60.$

Для определения нижней границы вершины (1,2) вторым слагаемым берем сумму констант приведения табл. 10.19, вычитая из строки x_2 a_{25} = 7 и в столбце x_3 величину α_{43} = 5, чтобы матрица имела нули в каждой строке и каждом столбце.

Величина приведения

$$h = 7 + 5.\ H(1,2) = 47 + 7 + 5 = 59.$$

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Приведенная матрица табл. 10.20 имеет вид:

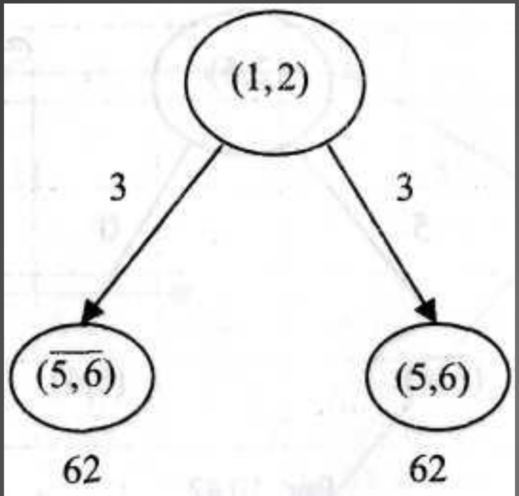
	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	∞	3	0 (3)	5	3
x_4	0 (3)	∞	0 (0)	3	0
x_5	8	0 (3)	∞	0 (3)	0
x_6	5	3	0 (3)	∞	3
	3	3	0	3	

- Табл. 10.20

- Определяем значения $\alpha(i,k)$ для клеток с нулевыми элементами:

$$\alpha(2,5) = 3 + 0, \quad \alpha(4,3) = 0 + 3 = 5,$$
$$\alpha(4,5) = 0 + 0, \quad \alpha(5,4) = 0 + 3,$$
$$\alpha(5,6) = 0 + 3, \quad \alpha(6,5) = 3 + 0.$$

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА



- Рис. 10.41

Исключаем из табл. 10.20 x_5 строку и столбец x_6.

Получаем табл. 10.21

	x_3	x_4	x_5
x_2	∞	3	0
x_4	0	∞	0
x_6	5	3	∞

- (10.21)

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

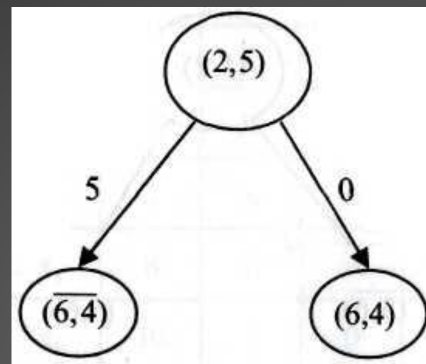
- Приведем табл. 10.21, вычитая из каждого элемента строки x_6 минимальный элемент a_{64} = 3, Получаем табл. 10.22 в виде:

	x_3	x_4	x_5	
x_2	∞	3	3 0	3
x_4	0	∞	0	0
x_6	2	5 0	∞	2

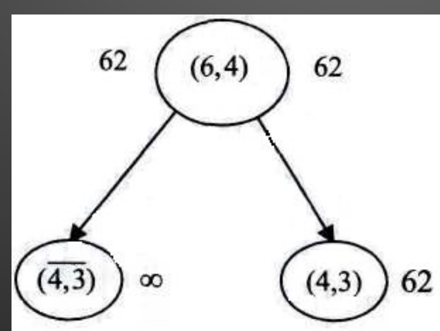
- (10.22)

- Строим подграф (рис. 10.42), исключаем в табл. 10.22 строку x_6 и столбец x_4, так как $\alpha(6,4) = 5$. Получаем табл. 10.23, в которой $\alpha_{44} = 0$. Заменяем ∞ чтобы исключить цикл.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА



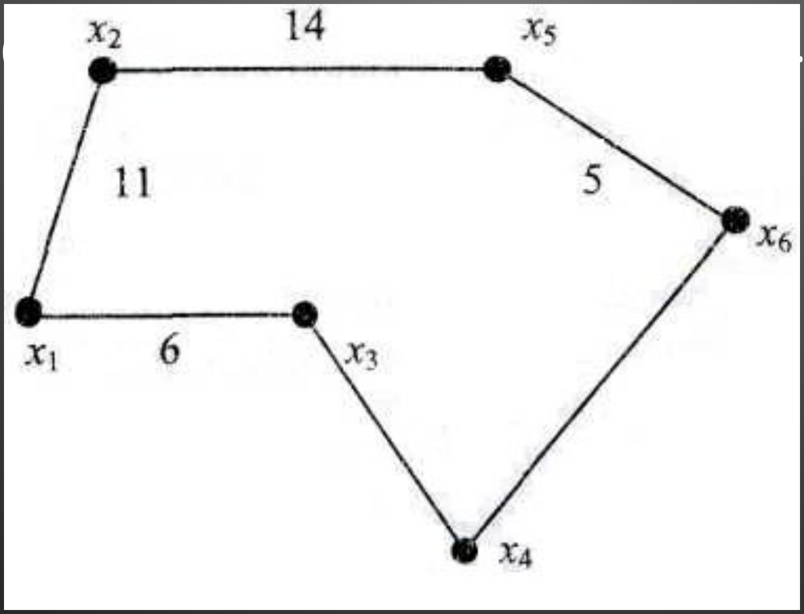
	x_3	x_5
x_2	∞	∞ 0
x_4	∞ 0	∞



- Рис. 10.42
- (10.23)
- Рис. 10.43

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Строим древовидный граф ветвлений (рис. 10.45), соединяя отдельные элементы графа (рис. 10.39-10.43) и гамельтонов цикл обхода вершин исходн … 4).

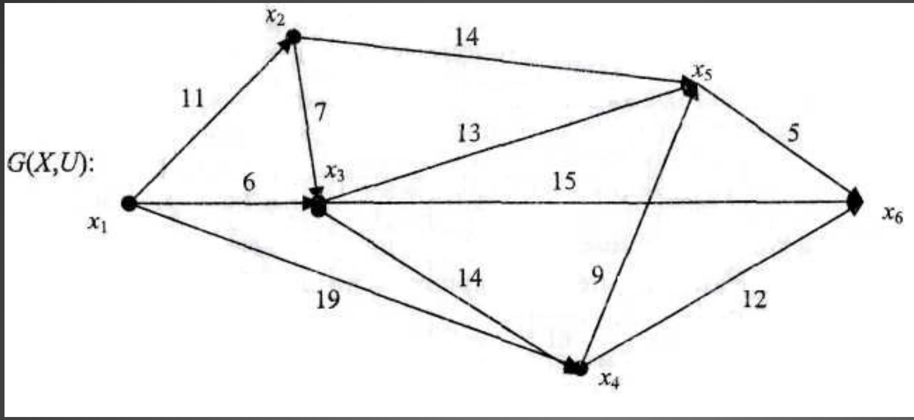


- Рис. 10.44

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

- Гамельтонов цикл образуют ребра $(x_{3,}x_1)$, $(x_{1,}x_2)$, $(x_{2,}x_5)$, $(x_{5,}x_6)$, $(x_{6,}x_4)$, $(x_{4,}x_3)$.
- Длина маршрута обхода вершин $x_3 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_5 \rightarrow x_6 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3$ графа $G(X,Y)$ (рис. 10. 37) составляет $M = 6 + 11 + 14 + 5 + 12 + 14 = 62$ и совпадает с нижней границей графа (рис. 10.45).

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА



- Рис.10.37

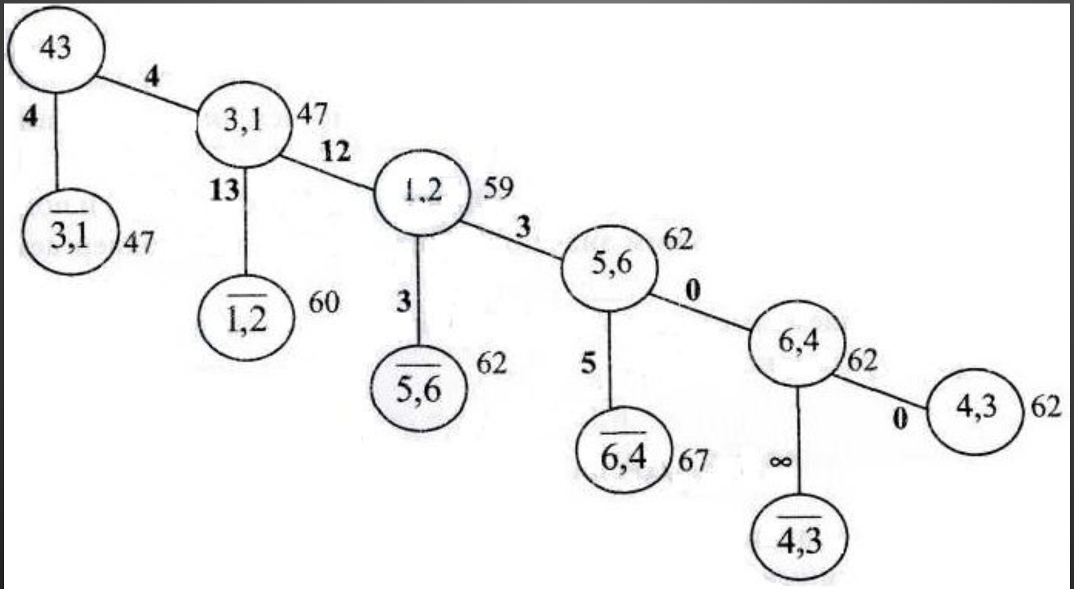


Рис. 10.45

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Последовательность решения задачи коммивояжера методом ветвей и границ состоит в следующем:

1. На основании графа посещения городов составляется матрица расстояний от соответствующих вершин.
2. Проводится приведение матрицы, вычитая минимальные элементы по строкам и столбцам.
3. Определяем нижнюю границу всего множества маршрутов, складывая значения вычитаемых минимальных элементов.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

4. В каждой клетке приведенной матрицы, в которых $a_{ik} = 0$, заменяем поочередно нули на ∞ и вычисляем суммы новых констант приведения $H(x_{i,}\ x_{k}),$ которые записываем в клетке с нулем, отмеченной кружком.
5. Выбираем ребро ветвления *(i,k)* по максимальной величине суммы констант приведения H_{max}. Затем исключаем его из множества путем замены элемента матрицы $a_{1к} =\infty$. В результате будет определено подмножество маршрутов *{(i,k)}*.
6. В полученной матрице расстояний по строкам получаем нули, вычитая минимальное значение элементов в соответсвующих строках и определяем нижнюю границу подмножества маршрутов *H(i,k)*.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

7. Включаем ребро *(i,k)* в маршрут, вычеркивая строку *i* и столбец *к* в приведенной матрице расстояний и заменяя симметричный элемент $a_{ik} = \infty$ для исключения образования негамельтонова цикла.
8. Приводим сокращенную матрицу (получаем нули в строках вычитанием минимального элемента) и определяем нижнюю границу подмножества *H(i,k).*
9. Сравниваем нижние границы подмножеств *H(i,k)* и $H(\underline{i,k})$ и подмножество с меньшим значением нижней границы подвергаем ветвлению.
10. Определяем гамельтонов цикл при получении окончательной матрицы размерности 2х2.