# *Кратчайшие пути*

Лекция 5

# Задача «Кратчайший путь»

- *Дано*: Орграф $G$, веса $c$: $E(G) \to \mathbf{R}$ и две вершины $s$, $t \in V(G)$ .
- *Найти* $s$-$t$-путь минимального веса.

# *Консервативные веса*

- Определение 5.1 Пусть $G$ — граф с весами $c\colon E(G) \to \mathbf{R}$ . Функция $c$ называется **консервативной** если не существует цикла отрицательного веса.

# *Принцип оптимальности Белмана*

**Предложение 5.2**

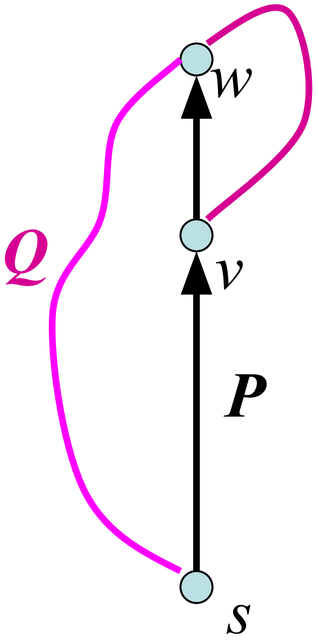
Дан орграф $G$ с консервативными весами $c: E(G) \to \mathbf{R}$, и две его вершины $s$ и $w$. Если $e=(v, w)$ — последняя дуга некоторого кратчайшего пути $P$ из $s$ в $w$, тогда $P_{[s,v]}$ ($P$ без ребра $e$) — кратчайший путь из $s$ в $v$.

# *Доказательство*

- Пусть $s$-$v$-путь $Q$ короче пути $P_{[s,v]}$.
- Тогда $c(Q) + c(e) < c(P)$.
  - Если $w \notin Q$, то $Q + e$ короче, чем $P$.
  - Противоречие $\Rightarrow w \in Q$.

# *Доказательство* ($w \in Q$)

- Пусть $s$-$v$-путь $Q$ короче пути $P_{[s,v]}$.
- $c(Q) + c(e) < c(P)$
- $c(Q_{[s,w]}) = c(Q) + c(e) - c(Q_{[v,w]}+e) <$
  $< c(P) - c(Q_{[v,w]}+e)$
- Так как $Q_{[v,w]}+e$ является циклом,
  то $c(Q_{[s,w]}) < c(P) - c(Q_{[v,w]}+e) \le c(P)$.
- Противоречие.



# *Замечание*

- Принцип оптимальности Белмана выполняется для всех орграфов с неотрицательными весами и для всех орграфов без циклов.

- $\mathrm{dist}(s,s) = 0$.
- $\mathrm{dist}(s,w) = \min\{\mathrm{dist}(s,v) + c((v,w)) \colon (v,w) \in E(G)\}$

  для всех $w \in V(G)/s$.

# *Упражнение* 7.1

- Дан ациклический орграф $G$ с произвольными весами $c$: $E(G) \to \mathbf{R}$ и $s$, $t \in V(G)$.
- Показать, как найти кратчайший $s$-$t$-путь в $G$ за линейное время.

# *Алгоритм Дейкстры*

**Input:** Орграф $G$, веса $c$: $E(G) \to \mathbf{R}_+$ и вершина $s \in V(G)$.
**Output:** Кратчайшие пути из $s$ во все $v \in V(G)$ и их длины.

- **Set** $l(s) := 0$. **Set** $l(v) := \infty$ для всех $v \in V(G) \setminus \{s\}$. **Set** $R := \varnothing$.
- Найти вершину $v \in V(G) \setminus R$ такую, что
  $l(v) = \min_{w \in V(G) \setminus \{R\}} l(w)$.
- **Set** $R := R \cup \{v\}$.
- **For** всех $w \in V(G) \setminus R$ таких, что $(v,w) \in E(G)$ **do**:
  **If** $l(w) > l(v) + c((v,w))$ **then**
  $l(w) := l(v) + c((v,w))$ и $p(w) := v$.

5) **If** $R \neq V(G)$ **then go to** 2.

# *Алгоритм Дейкстры* (2)

**Теорема 5.3 (Дейкстра [1959])**

Алгоритм Дейкстры находит оптимальное решение за $O(n^2)$ элементарных операций ($n=|V(G)|$).

# *Скетч доказательства*

Докажем, что следующие утверждения верны каждый раз когда выполняется шаг 2 алгоритма.

a) Для всех $v \in R$ и всех $w \in V(G) \backslash R$: $l(v) \leq l(w)$.

b) Для всех $v \in R$: $l(v)$ — длина кратчайшего $s$-$v$-пути в $G$. Если $l(v) < \infty$, существует $s$-$v$- путь длины $l(v)$, последняя дуга которого есть $(p(v),v)$ и все вершины которого принадлежат $R$.

c) Для всех $w \in V(G) \backslash R$: $l(w)$ — длина кратчайшего $s$-$w$- пути в $G[R \cup \{w\}]$. Если $l(w) \neq \infty$, то $p(w) \in R$ и $l(w) = l(p(w)) + c((p(w), w))$.

# *Алгоритм Дейкстры*

**Input:** Орграф $G$, веса $c$: $E(G) \to \mathbf{R}_+$ и вершина $s \in V(G)$.
**Output:** Кратчайшие пути из $s$ во все $v \in V(G)$ и их длины.

- **Set** $l(s) := 0$. **Set** $l(v) := \infty$ для всех $v \in V(G) \setminus \{s\}$. **Set** $R := \varnothing$.
- Найти вершину $v \in V(G) \setminus R$ такую, что $l(v) = \min_{w \in V(G) \setminus \{R\}} l(w)$.
- **Set** $R := R \cup \{v\}$.
- **For** всех $w \in V(G) \setminus R$ таких, что $(v,w) \in E(G)$ **do**:
  - **If** $l(w) > l(v) + c((v,w))$ **then**
    - $l(w) := l(v) + c((v,w))$ и $p(w) := v$.

5) **If** $R \neq V(G)$ **then go to** 2.

а) Для всех $v \in R$ и всех $w \in V(G) \backslash R$: $l(v) \leq l(w)$

- Пусть $v$ вершина выбранная на шаге 2.
- Для любых $x \in R$ и $y \in V(G) \backslash R$: $l(x) \leq l(v) \leq l(y)$.
- $\Rightarrow$ а) выполняется после шагов 3 и 4.

b) Для всех $v \in R$: $l(v)$ — длина кратчайшего $s$-$v$-пути в $G$. Если $l(v) < \infty$, существует $s$-$v$- путь длины $l(v)$, последняя дуга которого есть $(p(v),v)$ и все вершины которого принадлежат $R$.

- Так как $c$) справедливо до шага 3, достаточно показать, что никакой $s$-$v$-путь в $G$, содержащий вершины из $V(G)\setminus R$ не имеет длины короче чем $l(v)$.
- Пусть $\exists$ $s$-$v$-путь $P$ в $G$ содержащий $w \in V(G)\setminus R$, длина которого меньше $l(v)$.
- Пусть $w$ будет первая вершина за $R$ на этом пути.
- $c) \Rightarrow l(w) \leq c(P_{[s,w]})$
- Так как веса дуг неотрицательны, то $c(P_{[s,w]}) \leq c(P) < l(v)$.
- $\Rightarrow l(w) < l(v)$, противоречие с выбором $v$.

c) Для всех $w \in V(G)\backslash R$: $l(w)$ — длина кратчайшего $s$-$w$- пути в $G[R\cup\{w\}]$. Если $l(w) \neq \infty$, то $p(w) \in R$ и $l(w) = l(p(w)) + c((p(w), w))$.

- Пусть после шагов 3 и 4 существует $s$-$w$-путь $P$ в $G[R\cup w]$ длины меньше чем $l(w)$ для некоторого $w \in V(G)\backslash R$.
- Тогда $P$ должен содержать $v$ (в противном случае с) нарушалось уже до выполнения шагов 3 и 4).
- Пусть $(x,w) \in P$.
- $x \in R$ & a) $\Rightarrow l(x) \leq l(v)$.
- Шаг 4 $\Rightarrow l(w) \leq l(x) + c((x,w)) \leq l(v) + c((x,w))$.
- b) $\Rightarrow l(v)$ длина кратчайшего $s$-$v$-пути.
- $P$ содержит $s$-$v$-путь и $(x,w) \Rightarrow l(w) \leq l(x) + c((x,w)) \leq c(P)$.
- Противоречие.

# *Алгоритм Дейкстры*

**Теорема 5.3 (Дейкстра [1959])**

Алгоритм Дейкстры находит оптимальное решение за $O(n^2)$ элементарных операций ($n = |V(G)|$).

# *Алгоритм Мура-Беллмана-Форда*

**Input:** Орграф $G$, консервативные веса $c: E(G) \to \mathbf{R}$ и вершина $s \in V(G)$.

**Output:** Кратчайшие пути из $s$ во все $v \in V(G)$ и их длины.

- **Set** $l(s) := 0$ и $l(v) := \infty$ для всех $v \in V(G) \setminus \{s\}$.
- **For** $i := 1$ **to** $n - 1$ **do**:

  **For** каждой дуги $(v,w) \in E(G)$ **do**

  **If** $l(w) > l(v) + c((v,w))$ **then**

  $l(w) := l(v) + c((v,w))$ и $p(w) := v$.

# *Алгоритм Мура-Беллмана-Форда*(2)

**Теорема 5.4 (Moore [1959], Bellman [1958], Ford [1956])**

Алгоритм Мура-Беллмана-Форда находит оптимальное решение за $O(nm)$ операций.

# *Скетч доказательства*

На каждой итерации алгоритма пусть
$R := \{v \in V(G): l(v) < \infty\}$ и
$F := \{(x,y) \in E(G): x = p(y)\}$.

Тогда

a) $l(y) \geq l(x) + c((x,y))$ для всех $(x,y) \in F$ ;

b) Если $F$ содержит цикл $C$, то $C$ имеет отрицательный суммарный вес;

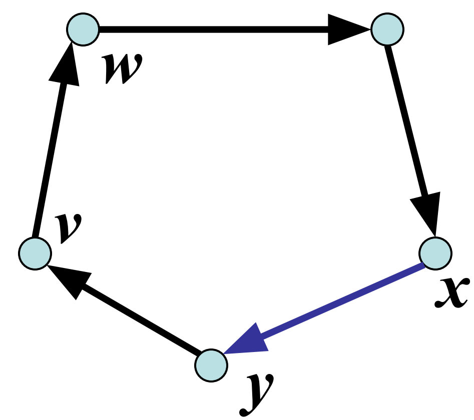
c) Если функция весов $c$ консервативная, то $(R, F)$ — ордерево с корнем в $s$.

## а) $l(y) \geq l(x) + c((x,y))$ для всех $(x,y) \in F$

- $F := \{(x,y) \in E(G)\colon x = p(y)\}$
- Рассмотрим последнюю итерацию, когда $p(y)$ присвоили $x$.
- В этот момент $l(y) = l(x) + c((x,y))$.
- На последующих итерациях $l(y)$ не менялась, а $l(x)$ могла только уменьшиться.

## b) Если $F$ содержит цикл $C$, то $C$ имеет отрицательный суммарный вес

- Пусть на некоторой итерации в $F$ образовался цикл $C$ добавлением дуги $(x,y)$.
- Тогда при проверки в операторе **if** выполнялось $l(y) > l(x) + c((x,y))$.




- a) $\Rightarrow l(w) \geq l(v) + c((v,w))$ для всех $(v,w) \in E(C)/\{(x,y)\}$.
- Суммируя по всем неравенствам, получаем, что $C$ имеет отрицательный суммарный вес.

# c) Если функция весов $c$ консервативная, то $(R, F)$ — ордерево с корнем в $s$.

- b) $\Rightarrow F$ — ациклический.
- Для всех $x \in R \setminus \{s\}$: $p(x) \in R \Rightarrow (R,F)$ — ордерево с корнем в $s$.
- $l(x)$ — длина $s$-$x$-пути в $(R,F)$ для любого $x$ и на всех шагах алгоритма.
- Докажем, что после $k$ итераций $l(x)$ не превосходит длину кратчайшего $s$-$x$-пути среди всех путей, имеющих не больше $k$ дуг.

# *Индукция*

- Пусть $P$ кратчайший $s$-$x$-путь с не более чем $k$ дугами и пусть $(w,x)$ последняя дуга в $P$.
- Тогда $P_{[s,w]}$ кратчайший $s$-$w$-путь с не более чем $k$ –1 дугой.
- По индукции $l(w) \le c(P_{[s,w]})$ после $k$ –1 итерации.
- Проверяя на итерации $k$ дугу $(w,x)$ имеем

$$l(x) \le l(w) + c((w,x)) \le c(P_{[}).$$

- Так как любой путь имеет не более $n$ – 1 дуги, то после $n$ –1 итерации алгоритм находит оптимальное решение.

# *Алгоритм Мура-Беллмана-Форда*

**Теорема 5.4 (Moore [1959], Bellman [1958], Ford [1956])**
Алгоритм Мура-Беллмана-Форда находит оптимальное решение за $O(nm)$ операций.

- Покажем, что этот алгоритм также может быть использован для проверки есть ли в орграфе циклы отрицательного веса.
- Попутно определим полезное понятие допустимого потенциала, введенное Эдмондсом и Карпом [1972].

# *Допустимый потенциал*

- Определение 5.5. Пусть $G$ — орграф с весами $c$: $E(G) \to \mathbf{R}$, и пусть $\pi : V(G) \to \mathbf{R}$. Тогда для любой $(x,y) \in E(G)$ определим **пониженную стоимость** $(x,y)$ относительно $\pi$ через $c_\pi((x,y)) := c((x,y)) + \pi(x) - \pi(y)$. Если $c_\pi(e) \geq 0$ для всех $e \in E(G)$, $\pi$ называется **допустимым потенциалом**.

# *Допустимый потенциал* (2)

**Теорема 5.6**

Пусть $G$ — орграф с весами $c$: $E(G) \to \mathbf{R}$. Допустимый потенциал для $(G,c)$ существует тогда и только тогда, когда функция весов $c$ консервативная.

# *Доказательство*

- Если $\pi$ допустимый потенциал, то для каждого цикла $C$:

$$\sum_{e\in E(C)} c(e) = \sum_{e=(x,y)\in E(C)} \bigl(c(e)+\pi(x)-\pi(y)\bigr) \geq 0.$$

- $\Rightarrow$ веса консервативны.
- Пусть веса консервативны, добавим новую вершину $s$ и соединим ее со всеми вершинами выходящими дугами нулевого веса.
- Применим алгоритм Мура-Беллмана-Форда к полученному примеру и найдем величины $l(v)$ для всех $v \in V(G)$.
- $l(v)$ длина кратчайшего $s$-$v$-пути для всех $v \in V(G)$.
- $\Rightarrow l(w) \leq l(v) + c((v,w))$ для всех $(v,w) \in E(G)$.
- $l(v)$ — допустимый потенциал.

# *Допустимый потенциал*

**Следствие 5.7**

Дан орграф $G$ с весами $c$: $E(G) \to \mathbf{R}$. Алгоритм Мура-Беллмана-Форда за время $O(nm)$ либо находит допустимый потенциал, либо отрицательный цикл.

# *Задача «Все Пары Кратчайших путей»*

- *Дано*: орграф $G$, веса $c$: $E(G) \to \mathbf{R}$.
- *Найти* число $l_{st}$ и вершины $p_{st}$ для всех $s, t \in V(G)$ с $s \neq t$, такие что $l_{st}$ есть длина кратчайшего $s$-$t$-пути, и $(p_{st}, t)$ есть последнее ребро такого пути (если оно существует).

# *Задача «Все Пары Кратчайших путей»* (2)

**Теорема 5.8**

Задача «Все Пары Кратчайших путей» может быть решена за время $O(n^3)$, где $n = |V(G)|$.

# *Алгоритм Флойда-Уоршелла*

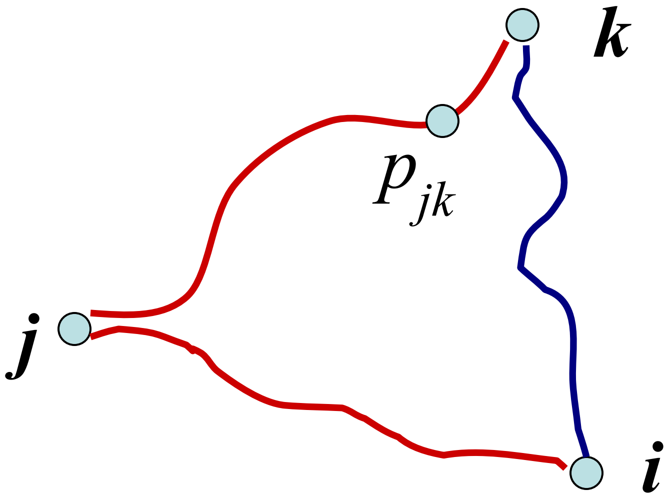
**Input:** Орграф $G$ с $V(G) = \{1,...,n\}$ и консервативные веса $c$: $E(G) \to \mathbf{R}$.

**Output:** Матрицы $(l_{ij})_{1\le i,j\le n}$ и $(p_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ,где $l_{ij}$ — длина кратчайшего пути из $i$ в $j$ и $(p_{ij}, j)$ — последняя дуга в таком пути (если он существует).

- **Set** $l_{ij} := c((i, j))$ для всех $(i, j) \in E(G)$.
  **Set** $l_{ij} := \infty$ для всех $(i, j) \in (V(G) \times V(G)) \setminus E(G)$ с $i \neq j$.
  **Set** $l_{ii} := 0$ для всех $i$. **Set** $p_{ik} := i$ для всех $i, k \in V(G)$.
- **For** $j := 1$ **to** $n$ **do:**
  **For** $i := 1$ **to** $n$ **do: If** $i \neq j$ **then:**
    **For** $k := 1$ **to** $n$ **do: If** $k \neq j$ **then:**
      **If** $l_{ik} > l_{ij} + l_{jk}$ **then** set $l_{ik} := l_{ij} + l_{jk}$ and $p_{ik} := p_{jk}$

# *Шаг* 2

**For** $j := 1$ **to** $n$ **do:**
**For** $i := 1$ **to** $n$ **do: If** $i \neq j$ **then:**
**For** $k := 1$ **to** $n$ **do: If** $k \neq j$ **then:**
**If** $\boldsymbol{l_{ik}} > \boldsymbol{l_{ij}} + \boldsymbol{l_{jk}}$ **then** set $l_{ik} := l_{ij} + l_{jk}$ and $p_{ik} := p_{jk}$



# *Алгоритм Флойда-Уоршелла* (2)

**Теорема 5.9(Floyd [1962], Warshall [1962])**

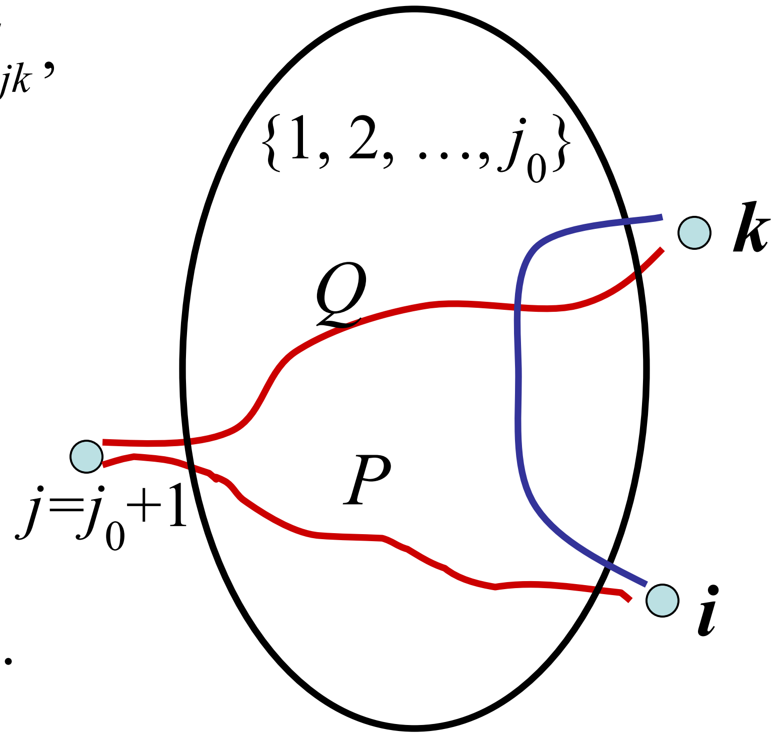
Алгоритм Флойда-Уоршелла находит решение за время $O(n^3)$.

# *Идея доказательства*

- Пусть алгоритм использовал во внешнем цикле (**For**) вершины $j = 1, 2, \ldots, j_0$. Тогда переменные $l_{ik}$ равны длине кратчайшего $i$-$k$-пути с внутренними вершинами из множества $\{1, 2, \ldots, j_0\}$ и $(p_{ik}, k)$ последняя дуга в таком пути.
- Утверждение справедливо для $j_0 = 0$ (шаг 1).
- Справедливость утверждения для $j_0 = n$ влечет корректность работы алгоритма.

# Индукция: $j_0 \to j_0 + 1$

Для любых $i$ и $k$ при выполнения шага 2 для $j = j_0 + 1$: $l_{ik}$ заменяется на $l_{ij} + l_{jk}$, если $l_{ik} > l_{ij} + l_{jk}$.




Пусть $l_{ik}$ получило новое значение. Осталось показать, что в этом случае $i$-$(j_0 + 1)$-путь $P$ и $(j_0 + 1)$-$k$-путь $Q$ не имеют общих внутренних вершин.

# *Метрическое замыкание*

- Определение 5.10

Дан связный граф $G$ с весами $c$: $E(G) \to \mathbf{R}_+$.

**Метрическим замыканием** $(G, c)$ называется пара $(\hat{G}, \hat{c})$ , где $\hat{G}$ — полный граф на $V(G)$ и $\hat{c}(\{x,y\}) = \mathrm{dist}_{(G,\, c)}(x,y)$ для всех $x, y \in V(G)$.

# *Метрическое замыкание* (2)

**Следствие 5.11**

Пусть $G$ — связный граф и $c$: $E(G) \to \mathbf{R}_+$. Тогда метрическое замыкание ($G$, $c$) может быть вычислено за время $O(n^3)$.

# *Задача «Минимальный усредненный Цикл»*

- *Дано*: орграф $G$, веса $c$: $E(G) \to \mathbf{R}$.
- *Найти* цикл $C$, усредненный вес которого $c(E(C))/|E(C)|$ минимален, или показать что $G$ — ациклический.

# *Как решать*?

- Задача «Минимальный усредненный Цикл» может быть решена динамическим программированием.
- Можно рассматривать только сильно связные графы.
- Достаточно существования одной вершины из которой достижимы другие.

# *Теорема Карпа*

**Теорема 5.12 (Karp [1978])**

Пусть G — орграф с весами $c$: $E(G) \to \mathbf{R}$. Пусть $s \in V(G)$ так, что каждая вершина достижима из $s$. Для $x \in V(G)$ и $k \in \mathbf{Z}_+$ Пусть

$$F_k(x) := \min\left\{\sum_{i=1}^{k} c((v_{i-1}, v_i)) : v_0 = s, v_k = x, (v_{i-1}, v_i) \in E(G) \textit{ for all } i\right\}$$

будет последовательность дуг минимального веса из $s$ в $x$ длины $k$ (и $\infty$, если не существует). Пусть $\mu(G)$ — значение минимального усредненного цикла в $G$. Тогда

$$\mu(G) = \min_{x \in V(G)} \max_{\substack{0 \le k \le n-1 \\ F_k(x) < \infty}} \frac{F_n(x) - F_k(x)}{n-k}.$$

# *Идея доказательства*

- Докажем, что если μ(*G*) = 0 то

$$\min_{x\in V(G)} \max_{\substack{0\le k\le n-1\\ F_k(x)<\infty}} \frac{F_n(x)-F_k(x)}{n-k}=0.$$

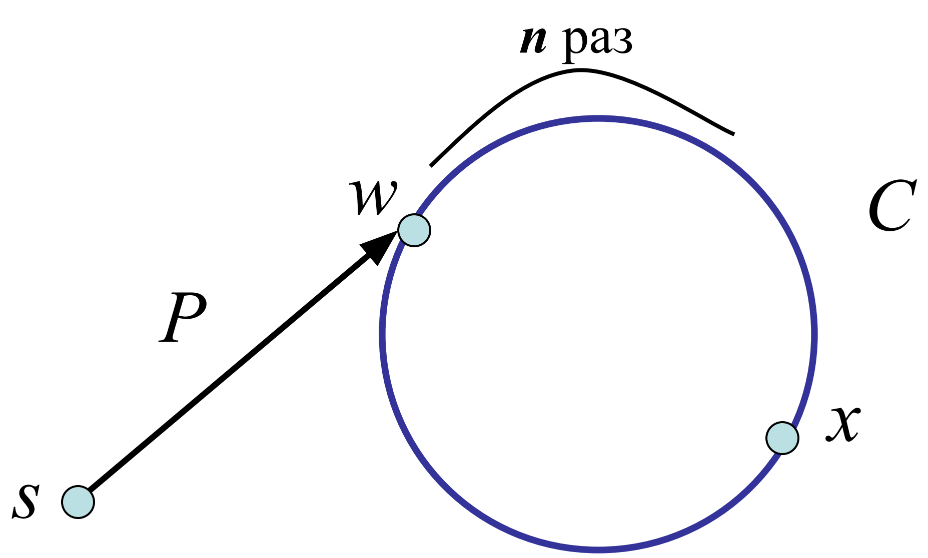
- Пусть *G* — орграф с μ(*G*) = 0. В *G* нет отрицательных циклов. Для $x \in V(G)$, пусть $l(x)$ длина кратчайшего *s*-*x*-пути. Так как *c* — консервативны, то

$$F_n(x)\ge l(x)=\min_{0\le k\le n-1} F_k(x),$$

$$\max_{\substack{0\le k\le n-1\\ F_k(x)<\infty}} \frac{F_n(x)-F_k(x)}{n-k}\ge 0.$$

# Доказательство

- Покажем, что существует такое $x$, что $F_n(x) = l(x)$.
- $\mu(G) = 0 \Rightarrow$ существует цикл $C$ нулевого веса.
- Пусть $w \in C$ и $P$ кратчайший $s$-$w$-путь.



# *Алгоритм «Минимальный усредненный Цикл»*

**Input:** Орграф $G$, веса $c$: $E(G) \to \mathbf{R}$.
**Output:** Цикл C с минимальным усредненным весом или информация, что G — ациклический.

- Добавим вершину $s$ и ребро $(s,x)$ с $c((s,x))=0$ для всех $x \in V(G)$.
- **Set** $n:=|V(G)|$, $F_0(s):=0$ и $F_0(x):=\infty$ для всех $x \in V(G)\setminus\{s\}$.
- **For** $k := 1$ **to** $n$ **do:**
  - **For** всех $x \in V(G)$ **do:** $F_k(x):=\infty$.
    - **For** всех $(w, x) \in \delta^-(x)$ **do:**
      - **If** $F_{k-1}(w)+ c((w,x)) < F_k(x)$ **then:**
        - **Set** $F_k(x) := F_{k-1}(w)+ c((w,x))$ и $p_k(x):=w$.
- **If** $F_n(x)=\infty$ для всех $x \in V(G)$ **then stop** (G — ациклический).
- Пусть $x$ — вершина: $\max\limits_{\substack{0\le k\le n-1\\ F_k(x)<\infty}} \dfrac{F_n(x)-F_k(x)}{n-k}$ минимален.

6. Пусть $C$ — любой цикл, заданный ребрами $p_n(x), p_{n-1}(p_n(x)),\ldots$

# *Алгоритм «Минимальный усредненный Цикл»*

**Следствие 5.13(Karp [1978])**

Алгоритм «Минимальный усредненный Цикл» находит решение за время $O(n(m+n))$.

# *Упражнение* 7.2

- Дан орграф $G$ с произвольными весами $c\colon E(G) \to \mathbf{R}$ и $s, t \in V(G)$.
- Найти $s$-$t$-путь у которого вес максимального ребра минимален.

# *Упражнение* 7.3

- Дан орграф $G$ с $s$, $t \in V(G)$. Пусть для каждого ребра $e \in E(G)$ задано число $r(e)$ (надежность ребра $e$), $0 \le r(e) \le 1$. Надежность пути $P$ определяется произведением надежности его ребер.
- Найти $s$-$t$-путь максимальной надежности.

# *Упражнение* 7.4

- Пусть $G$ — орграф с консервативными весами $c\colon E(G) \to \mathbf{R}$ . Пусть $s, t \in V(G)$, так что $t$ достижимо из $s$.
- Доказать, что минимум длины $s$-$t$-пути в $G$ равен максимуму величины $\pi(t) - \pi(s)$, где $\pi$ — допустимый потенциал.

# *Упражнение* 7.5

- Пусть $G$ полный граф и $c$: $E(G) \to \mathbf{R}_+$. Показать, что $(G,c)$ является собственным метрическим замыканием тогда и только тогда, когда выполняется неравенство треугольника: $c(\{x,y\}) + c(\{y,z\}) \geq c(\{x,z\})$ для любых трех вершин $x$, $y$, $z \in V(G)$.