

Кратчайшие пути

Лекция 5

Задача «Кратчайший путь»

- *Дано:* Орграф G , веса $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$ и две вершины $s, t \in V(G)$.
- *Найти* s - t -путь минимального веса.

Консервативные веса

- **Определение 5.1** Пусть G — граф с весами $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$. Функция c называется **консервативной** если не существует цикла отрицательного веса.

Принцип оптимальности Белмана

Предложение 5.2

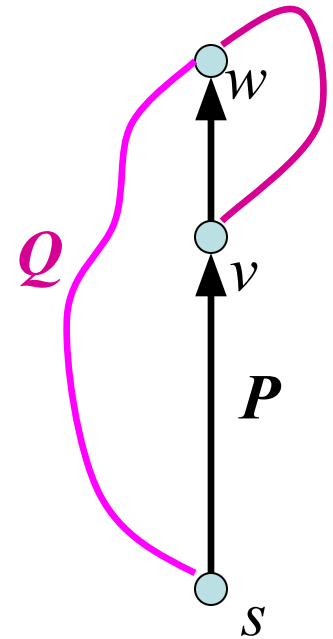
Дан орграф G с консервативными весами $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$, и две его вершины s и w . Если $e=(v, w)$ — последняя дуга некоторого кратчайшего пути P из s в w , тогда $P_{[s,v]}$ (P без ребра e) — кратчайший путь из s в v .

Доказательство

- Пусть s - v -путь Q короче пути $P_{[s,v]}$.
- Тогда $c(Q) + c(e) < c(P)$.
 - Если $w \notin Q$, то $Q + e$ короче, чем P .
 - Противоречие $\Rightarrow w \in Q$.

Доказательство ($w \in Q$)

- Пусть s - v -путь Q короче пути $P_{[s,v]}$.
- $c(Q) + c(e) < c(P)$
- $c(Q_{[s,w]}) = c(Q) + c(e) - c(Q_{[v,w]} + e) < c(P) - c(Q_{[v,w]} + e)$
- Так как $Q_{[v,w]} + e$ является циклом, то $c(Q_{[s,w]}) < c(P) - c(Q_{[v,w]} + e) \leq c(P)$.
- Противоречие.



Замечание

- Принцип оптимальности Белмана выполняется для всех орграфов с неотрицательными весами и для всех орграфов без циклов.
- $\text{dist}(s,s) = 0$.
- $\text{dist}(s,w) = \min \{ \text{dist}(s,v) + c((v,w)) : (v,w) \in E(G) \}$
для всех $w \in V(G)/s$.

Упражнение 7.1

- Дан ациклический орграф G с произвольными весами $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$ и $s, t \in V(G)$.
- Показать, как найти кратчайший s - t -путь в G за линейное время.

Алгоритм Дейкстры

Input: Оорграф G , веса $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}_+$ и вершина $s \in V(G)$.

Output: Кратчайшие пути из s во все $v \in V(G)$ и их длины.

- **Set** $l(s) := 0$. **Set** $l(v) := \infty$ для всех $v \in V(G) \setminus \{s\}$. **Set** $R := \emptyset$.
 - Найти вершину $v \in V(G) \setminus R$ такую, что
 $l(v) = \min_{w \in V(G) \setminus R} l(w)$.
 - **Set** $R := R \cup \{v\}$.
 - **For** всех $w \in V(G) \setminus R$ таких, что $(v, w) \in E(G)$ **do**:
 If $l(w) > l(v) + c((v, w))$ **then**
 $l(w) := l(v) + c((v, w))$ и $p(w) := v$.
- 5) **If** $R \neq V(G)$ **then go to 2**.

Алгоритм Дейкстры (2)

Теорема 5.3 (Дейкстра [1959])

Алгоритм Дейкстры находит оптимальное решение за $O(n^2)$ элементарных операций ($n=|V(G)|$).

Скетч доказательства

Докажем, что следующие утверждения верны каждый раз когда выполняется шаг 2 алгоритма.

- a) Для всех $v \in R$ и всех $w \in V(G) \setminus R$: $l(v) \leq l(w)$.
- b) Для всех $v \in R$: $l(v)$ — длина кратчайшего s - v -пути в G . Если $l(v) < \infty$, существует s - v -путь длины $l(v)$, последняя дуга которого есть $(p(v), v)$ и все вершины которого принадлежат R .
- c) Для всех $w \in V(G) \setminus R$: $l(w)$ — длина кратчайшего s - w -пути в $G[R \cup \{w\}]$. Если $l(w) \neq \infty$, то $p(w) \in R$ и $l(w) = l(p(w)) + c((p(w), w))$.

Алгоритм Дейкстры

Input: Оорграф G , веса $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}_+$ и вершина $s \in V(G)$.

Output: Кратчайшие пути из s во все $v \in V(G)$ и их длины.

- **Set** $l(s) := 0$. **Set** $l(v) := \infty$ для всех $v \in V(G) \setminus \{s\}$. **Set** $R := \emptyset$.
 - Найти вершину $v \in V(G) \setminus R$ такую, что
 $l(v) = \min_{w \in V(G) \setminus R} l(w)$.
 - **Set** $R := R \cup \{v\}$.
 - **For** всех $w \in V(G) \setminus R$ таких, что $(v, w) \in E(G)$ **do**:
 If $l(w) > l(v) + c((v, w))$ **then**
 $l(w) := l(v) + c((v, w))$ и $p(w) := v$.
- 5) **If** $R \neq V(G)$ **then go to 2**.

а) Для всех $v \in R$ и всех $w \in V(G) \setminus R$: $l(v) \leq l(w)$

- Пусть v вершина выбранная на шаге 2.
- Для любых $x \in R$ и $y \in V(G) \setminus R$: $l(x) \leq l(v) \leq l(y)$.
- \Rightarrow а) выполняется после шагов 3 и 4.

б) Для всех $v \in R$: $l(v)$ — длина кратчайшего s - v -пути в G . Если $l(v) < \infty$, существует s - v - путь длины $l(v)$, последняя дуга которого есть $(p(v), v)$ и все вершины которого принадлежат R .

- Так как c) справедливо до шага 3, достаточно показать, что никакой s - v -путь в G , содержащий вершины из $V(G) \setminus R$ не имеет длины короче чем $l(v)$.
- Пусть \exists s - v -путь P в G содержащий $w \in V(G) \setminus R$, длина которого меньше $l(v)$.
- Пусть w будет первая вершина за R на этом пути.
- $c) \Rightarrow l(w) \leq c(P_{[s,w]})$
- Так как веса дуг неотрицательны, то $c(P_{[s,w]}) \leq c(P) < l(v)$.
- $\Rightarrow l(w) < l(v)$, противоречие с выбором v .

с) Для всех $w \in V(G) \setminus R$: $l(w)$ — длина кратчайшего s - w -пути в $G[R \cup \{w\}]$. Если $l(w) \neq \infty$, то $p(w) \in R$ и $l(w) = l(p(w)) + c((p(w), w))$.

- Пусть после шагов 3 и 4 существует s - w -путь P в $G[R \cup w]$ длины меньше чем $l(w)$ для некоторого $w \in V(G) \setminus R$.
- Тогда P должен содержать v (в противном случае с) нарушалось уже до выполнения шагов 3 и 4).
- Пусть $(x, w) \in P$.
- $x \in R$ & а) $\Rightarrow l(x) \leq l(v)$.
- Шаг 4 $\Rightarrow l(w) \leq l(x) + c((x, w)) \leq l(v) + c((x, w))$.
- б) $\Rightarrow l(v)$ длина кратчайшего s - v -пути.
- P содержит s - v -путь и $(x, w) \Rightarrow l(w) \leq l(x) + c((x, w)) \leq c(P)$.
- Противоречие.

Алгоритм Дейкстры

Теорема 5.3 (Дейкстра [1959])

Алгоритм Дейкстры находит оптимальное решение за $O(n^2)$ элементарных операций ($n = |V(G)|$).

Алгоритм Мура-Беллмана-Форда

Input: Орграф G , консервативные веса $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$ и вершина $s \in V(G)$.

Output: Кратчайшие пути из s во все $v \in V(G)$ и их длины.

- **Set** $l(s) := 0$ и $l(v) := \infty$ для всех $v \in V(G) \setminus \{s\}$.
- **For** $i := 1$ **to** $n - 1$ **do**:
 - For** каждой дуги $(v, w) \in E(G)$ **do**
 - If** $l(w) > l(v) + c((v, w))$ **then**
 - $l(w) := l(v) + c((v, w))$ и $p(w) := v$.

Алгоритм Мура-Беллмана-Форда(2)

Теорема 5.4 (Moore [1959], Bellman [1958], Ford [1956])

Алгоритм Мура-Беллмана-Форда находит оптимальное решение за $O(nm)$ операций.

Скетч доказательства

На каждой итерации алгоритма пусть

$$R := \{v \in V(G) : l(v) < \infty\} \text{ и}$$

$$F := \{(x, y) \in E(G) : x = p(y)\}.$$

Тогда

а) $l(y) \geq l(x) + c((x, y))$ для всех $(x, y) \in F$;

б) Если F содержит цикл C , то C имеет отрицательный суммарный вес;

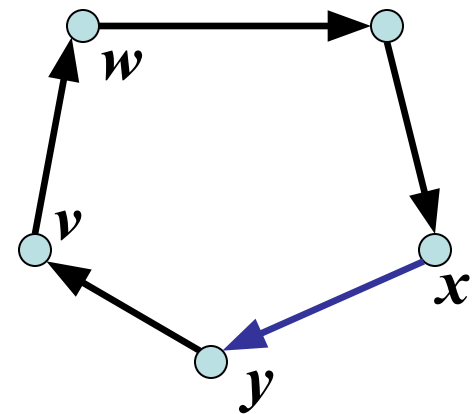
с) Если функция весов c консервативная, то (R, F) — ордеререво с корнем в s .

a) $l(y) \geq l(x) + c((x,y))$ для всех $(x,y) \in F$

- $F := \{(x,y) \in E(G): x = p(y)\}$
- Рассмотрим последнюю итерацию, когда $p(y)$ присвоили x .
- В этот момент $l(y) = l(x) + c((x,y))$.
- На последующих итерациях $l(y)$ не менялась, а $l(x)$ могла только уменьшиться.

b) Если F содержит цикл C , то C имеет отрицательный суммарный вес

- Пусть на некоторой итерации в F образовался цикл C добавлением дуги (x,y) .
- Тогда при проверки в операторе **if** выполнялось $l(y) > l(x) + c((x,y))$.
- а) $\Rightarrow l(w) \geq l(v) + c((v,w))$ для всех $(v,w) \in E(C) / \{(x,y)\}$.
- Суммируя по всем неравенствам, получаем, что C имеет отрицательный суммарный вес.



с) Если функция весов c консервативная, то (R, F) — ордеререво с корнем в s .

- б) $\Rightarrow F$ — ациклический.
- Для всех $x \in R \setminus \{s\}$: $p(x) \in R \Rightarrow (R, F)$ — ордеререво с корнем в s .
- $l(x)$ — длина s - x -пути в (R, F) для любого x и на всех шагах алгоритма.
- Докажем, что после k итераций $l(x)$ не превосходит длину кратчайшего s - x -пути среди всех путей, имеющих не больше k дуг.

Индукция

- Пусть P кратчайший s - x -путь с не более чем k дугами и пусть (w, x) последняя дуга в P .
- Тогда $P_{[s, w]}$ кратчайший s - w -путь с не более чем $k - 1$ дугой.
- По индукции $l(w) \leq c(P_{[s, w]})$ после $k - 1$ итерации.
- Проверяя на итерации k дугу (w, x) имеем
$$l(x) \leq l(w) + c((w, x)) \leq c(P).$$
- Так как любой путь имеет не более $n - 1$ дуги, то после $n - 1$ итерации алгоритм находит оптимальное решение.

Алгоритм Мура-Беллмана-Форда

Теорема 5.4 (Moore [1959], Bellman [1958], Ford [1956])

Алгоритм Мура-Беллмана-Форда находит оптимальное решение за $O(nt)$ операций.

- Покажем, что этот алгоритм также может быть использован для проверки есть ли в орграфе циклы отрицательного веса.
- Попутно определим полезное понятие допустимого потенциала, введенное Эдмондсом и Карпом [1972].

Допустимый потенциал

- **Определение 5.5.** Пусть G — орграф с весами $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$, и пусть $\pi: V(G) \rightarrow \mathbf{R}$. Тогда для любой $(x,y) \in E(G)$ определим **пониженную стоимость** (x,y) относительно π через $c_\pi((x,y)) := c((x,y)) + \pi(x) - \pi(y)$. Если $c_\pi(e) \geq 0$ для всех $e \in E(G)$, π называется **допустимым потенциалом**.

Допустимый потенциал (2)

Теорема 5.6

Пусть G — оргграф с весами $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$.
Допустимый потенциал для (G, c)
существует тогда и только тогда, когда
функция весов c консервативная.

Доказательство

- Если π допустимый потенциал, то для каждого цикла C :

$$\sum_{e \in E(C)} c(e) = \sum_{e=(x,y) \in E(C)} (c(e) + \pi(x) - \pi(y)) \geq 0.$$

- \Rightarrow веса консервативны.
- Пусть веса консервативны, добавим новую вершину s и соединим ее со всеми вершинами выходящими дугами нулевого веса.
- Применим алгоритм Мура-Беллмана-Форда к полученному примеру и найдем величины $l(v)$ для всех $v \in V(G)$.
- $l(v)$ длина кратчайшего s - v -пути для всех $v \in V(G)$.
- $\Rightarrow l(w) \leq l(v) + c((v,w))$ для всех $(v,w) \in E(G)$.
- $l(v)$ — допустимый потенциал.

Допустимый потенциал

Следствие 5.7

Дан орграф G с весами $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$.
Алгоритм Мура-Беллмана-Форда за время $O(nt)$ либо находит допустимый потенциал, либо отрицательный цикл.

Задача «Все Пары Кратчайших путей»

- *Дано:* оргграф G , веса $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$.
- *Найти* число l_{st} и вершины p_{st} для всех $s, t \in V(G)$ с $s \neq t$, такие что l_{st} есть длина кратчайшего s - t -пути, и (p_{st}, t) есть последнее ребро такого пути (если оно существует).

Задача «Все Пары Кратчайших путей» (2)

Теорема 5.8

Задача «Все Пары Кратчайших путей» может быть решена за время $O(n^3)$, где $n = |V(G)|$.

Алгоритм Флойда-Уоршелла

Input: Орграф G с $V(G) = \{1, \dots, n\}$ и консервативные веса $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$.

Output: Матрицы $(l_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ и $(p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, где l_{ij} — длина кратчайшего пути из i в j и (p_{ij}, j) — последняя дуга в таком пути (если он существует).

- **Set** $l_{ij} := c((i, j))$ для всех $(i, j) \in E(G)$.
Set $l_{ij} := \infty$ для всех $(i, j) \in (V(G) \times V(G)) \setminus E(G)$ с $i \neq j$.
Set $l_{ii} := 0$ для всех i . **Set** $p_{ik} := i$ для всех $i, k \in V(G)$.
- **For** $j := 1$ **to** n **do:**
 For $i := 1$ **to** n **do:** **If** $i \neq j$ **then:**
 For $k := 1$ **to** n **do:** **If** $k \neq j$ **then:**
 If $l_{ik} > l_{ij} + l_{jk}$ **then set** $l_{ik} := l_{ij} + l_{jk}$ **and** $p_{ik} := p_{jk}$

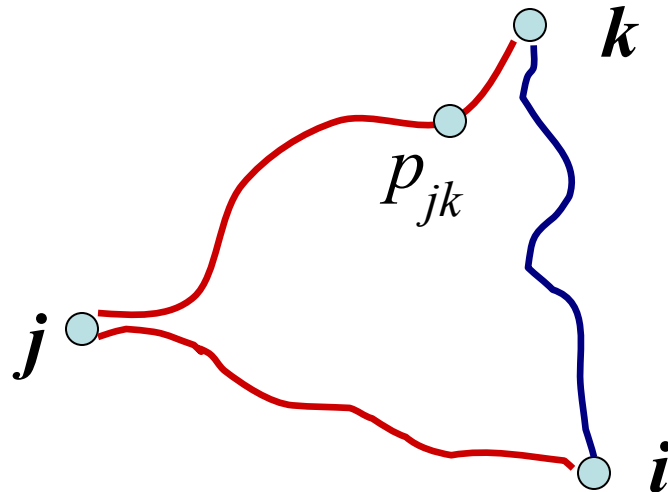
Шаг 2

For $j := 1$ to n do:

For $i := 1$ to n do: If $i \neq j$ then:

For $k := 1$ to n do: If $k \neq j$ then:

If $l_{ik} > l_{ij} + l_{jk}$ then set $l_{ik} := l_{ij} + l_{jk}$ and $p_{ik} := p_{jk}$



Алгоритм Флойда-Уоршелла (2)

Теорема 5.9(Floyd [1962], Warshall [1962])

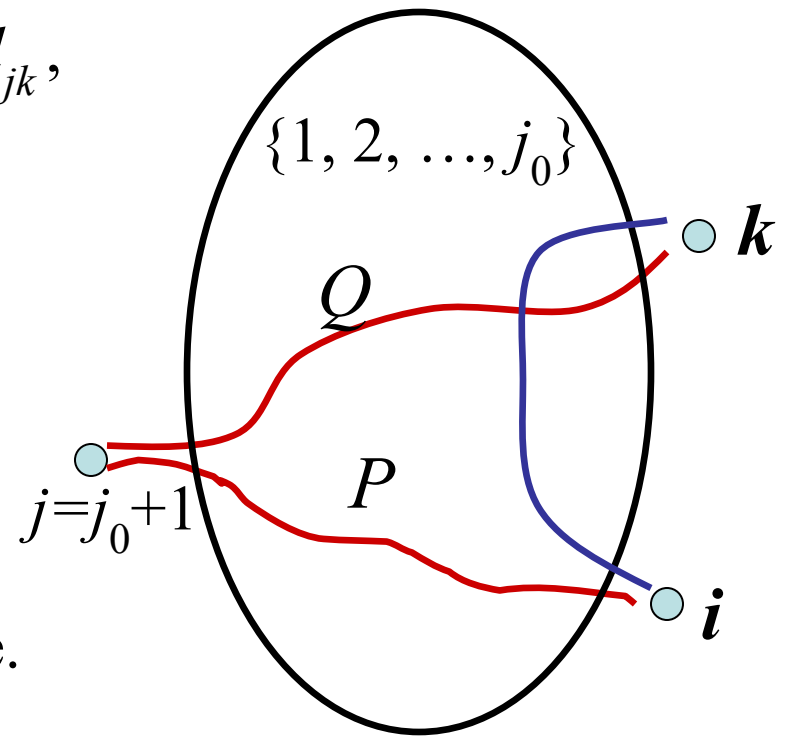
Алгоритм Флойда-Уоршелла находит решение за время $O(n^3)$.

Идея доказательства

- Пусть алгоритм использовал во внешнем цикле (**For**) вершины $j = 1, 2, \dots, j_0$. Тогда переменные l_{ik} равны длине кратчайшего i - k -пути с внутренними вершинами из множества $\{1, 2, \dots, j_0\}$ и (p_{ik}, k) последняя дуга в таком пути.
- Утверждение справедливо для $j_0 = 0$ (шаг 1).
- Справедливость утверждения для $j_0 = n$ влечет корректность работы алгоритма.

Индукция: $j_0 \rightarrow j_0 + 1$

Для любых i и k при выполнении шага 2
для $j = j_0 + 1$: l_{ik} заменяется на $l_{ij} + l_{jk}$,
если $l_{ik} > l_{ij} + l_{jk}$.



Пусть l_{ik} получило новое значение.
Осталось показать, что в этом
случае i - $(j_0 + 1)$ -путь P и $(j_0 + 1)$ - k -путь Q
не имеют общих внутренних вершин.

Метрическое замыкание

- **Определение 5.10**

Дан связный граф G с весами $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}_+$.

Метрическим замыканием (G, c) называется пара (\hat{G}, \hat{c}) , где \hat{G} — полный граф на $V(G)$ и $\hat{c}(\{x, y\}) = \text{dist}_{(G, c)}(x, y)$ для всех $x, y \in V(G)$.

Метрическое замыкание (2)

Следствие 5.11

Пусть G — связный граф и $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}_+$.

Тогда метрическое замыкание (G, c) может быть вычислено за время $O(n^3)$.

Задача «Минимальный усредненный Цикл»

- *Дано*: орграф G , веса $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$.
- *Найти* цикл C , усредненный вес которого $c(E(C))/|E(C)|$ минимален, или показать что G — ациклический.

Как решать?

- Задача «Минимальный усредненный Цикл» может быть решена динамическим программированием.
- Можно рассматривать только сильно связные графы.
- Достаточно существования одной вершины из которой достижимы другие.

Теорема Карпа

Теорема 5.12 (Карп [1978])

Пусть G — орграф с весами $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$. Пусть $s \in V(G)$ так, что каждая вершина достижима из s . Для $x \in V(G)$ и $k \in \mathbf{Z}_+$

Пусть $F_k(x) := \min \left\{ \sum_{i=1}^k c((v_{i-1}, v_i)) : v_0 = s, v_k = x, (v_{i-1}, v_i) \in E(G) \text{ for all } i \right\}$

будет последовательность дуг минимального веса из s в x длины k (и ∞ , если не существует). Пусть $\mu(G)$ — значение минимального усредненного цикла в G . Тогда

$$\mu(G) = \min_{x \in V(G)} \max_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ F_k(x) < \infty}} \frac{F_n(x) - F_k(x)}{n - k}.$$

Идея доказательства

- Докажем, что если $\mu(G) = 0$ то

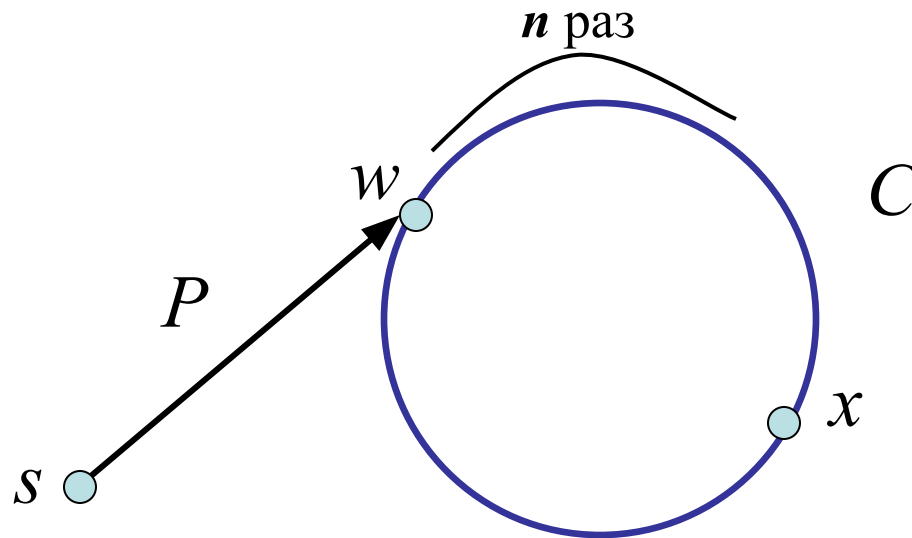
$$\min_{x \in V(G)} \max_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ F_k(x) < \infty}} \frac{F_n(x) - F_k(x)}{n - k} = 0.$$

- Пусть G — орграф с $\mu(G) = 0$. В G нет отрицательных циклов. Для $x \in V(G)$, пусть $l(x)$ длина кратчайшего s - x -пути. Так как c — консервативны, то

$$F_n(x) \geq l(x) = \min_{0 \leq k \leq n-1} F_k(x),$$
$$\max_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ F_k(x) < \infty}} \frac{F_n(x) - F_k(x)}{n - k} \geq 0.$$

Доказательство

- Покажем, что существует такое x , что $F_n(x) = l(x)$.
- $\mu(G) = 0 \Rightarrow$ существует цикл C нулевого веса.
- Пусть $w \in C$ и P кратчайший s - w -путь.



Алгоритм «Минимальный усредненный Цикл»

Input: Орграф G , веса $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$.

Output: Цикл C с минимальным усредненным весом или информация, что G — ациклический.

- Добавим вершину s и ребро (s,x) с $c((s,x))=0$ для всех $x \in V(G)$.
- **Set** $n:=|V(G)|$, $F_0(s):=0$ и $F_0(x):=\infty$ для всех $x \in V(G)\setminus\{s\}$.
- **For** $k := 1$ **to** n **do**:
 - For** всех $x \in V(G)$ **do**: $F_k(x):=\infty$.
 - For** всех $(w, x) \in \delta^-(x)$ **do**:
 - If** $F_{k-1}(w) + c((w,x)) < F_k(x)$ **then**:
 - Set** $F_k(x) := F_{k-1}(w) + c((w,x))$ и $p_k(x) := w$.
- **If** $F_n(x) = \infty$ для всех $x \in V(G)$ **then stop** (G — ациклический).
- Пусть x — вершина:

$$\max_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ F_k(x) < \infty}} \frac{F_n(x) - F_k(x)}{n - k} \quad \text{МИНИМАЛЕН.}$$

6. Пусть C — любой цикл, заданный ребрами $p_n(x), p_{n-1}(p_n(x)), \dots$

Алгоритм «Минимальный усредненный Цикл»

Следствие 5.13(Карп [1978])

Алгоритм «Минимальный усредненный Цикл» находит решение за время $O(n(m+n))$.

Упражнение 7.2

- Дан оргграф G с произвольными весами $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$ и $s, t \in V(G)$.
- Найти s - t -путь у которого вес максимального ребра минимален.

Упражнение 7.3

- Дан оргграф G с $s, t \in V(G)$. Пусть для каждого ребра $e \in E(G)$ задано число $r(e)$ (надежность ребра e), $0 \leq r(e) \leq 1$. Надежность пути P определяется произведением надежности его ребер.
- Найти s - t -путь максимальной надежности.

Упражнение 7.4

- Пусть G — орграф с консервативными весами $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}$. Пусть $s, t \in V(G)$, так что t достижимо из s .
- Доказать, что минимум длины s - t -пути в G равен максимуму величины $\pi(t) - \pi(s)$, где π — допустимый потенциал.

Упражнение 7.5

- Пусть G полный граф и $c: E(G) \rightarrow \mathbf{R}_+$.
Показать, что (G, c) является собственным метрическим замыканием тогда и только тогда, когда выполняется неравенство треугольника: $c(\{x, y\}) + c(\{y, z\}) \geq c(\{x, z\})$ для любых трех вершин $x, y, z \in V(G)$.