Задачи на делимость натуральных чисел

(по материалам ЕГЭ)

Кретова Д.Н. МОУ «Лицей №47» г.Саратов

Задача 1.

Найдите все натуральные числа, которые делятся на 42 и имеют ровно 42 различных натуральных делителя (включая единицу и само число).

Для решения используем формулу нахождения числа (количества) делителей какого-либо числа :

$$y = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)\ldots(\alpha_k + 1),$$

где ***y*** - количество делителей

- показатель степени в разложении на простые множители- $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$

- 1) Разложим число 42 на простые множители:

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

- 2) Пусть A - некоторое число. Раз 42 – делитель числа A, то число A делится на 2, 3 и 7, значит разложение числа A на множители можно записать в виде:

$A = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\alpha_3} \cdot Q,$ где Q - некоторое число

- 3) Применим формулу нахождения количества делителей какого-либо числа:

где $y = 42$

$$y = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \dots (\alpha_k + 1),$$

- Получим:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \dots (\alpha_k + 1) = 42$$

- 4) Заменим 42 на его разложение на простые множители:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \dots (\alpha_k + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 7,$$

- 5) Т.к. 42 раскладывается на 3 простых множителя, значит k = 3

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

- 5) Т.к. левая и правая части состоят из произведения одинакового числа простых множителей, тогда сами множители равны с точностью до порядка.

6) Найдем показатели степеней в разложении числа А:

1) $\begin{cases} \alpha_1 + 1 = 2, \\ \alpha_2 + 1 = 3 \\ \alpha_3 + 1 = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \alpha_1 + 1 = 2, \\ \alpha_2 + 1 = 7 \\ \alpha_3 + 1 = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \alpha_1 + 1 = 3, \\ \alpha_2 + 1 = 2 \\ \alpha_3 + 1 = 7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \alpha_1 + 1 = 3, \\ \alpha_2 + 1 = 7 \\ \alpha_3 + 1 = 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \alpha_1 + 1 = 7, \\ \alpha_2 + 1 = 2 \\ \alpha_3 + 1 = 3 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \alpha_1 + 1 = 7, \\ \alpha_2 + 1 = 3 \\ \alpha_3 + 1 = 2 \end{cases}$

7) Решив системы, получим, что

$$A_1 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^6 = 2117682$$

$$A_2 = 2 \cdot 3^6 \cdot 7^2 = 71442$$

$$A_3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^6 = 1411788$$

$$A_4 = 2^2 \cdot 3^6 \cdot 7 = 20412$$

$$A_5 = 2^6 \cdot 3 \cdot 7^2 = 9408$$

$$A_6 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 = 4032$$

Задача 2.

- Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящиеся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?

- Решение
- Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммами его цифр, стоящих на нечётных и на чётных местах, делится на 11.

- 1) Запишем все цифры подряд: 9876543210. В написанном числе указанная разность сумм равна 5.

  9+7+3+1=25 , 8+6+4+2+0=20 , 25-20=5

- 2) Меняя местами, например, 5 и 8, мы одну сумму увеличиваем на 3, а другую уменьшаем на 3. Значит, разность между суммами его цифр, стоящих на нечётных и на чётных местах, становится равной 11. Меняя местами, например, 4 и 1, или 3 и 6, получаем требуемые примеры.

  Ответ: Да.

Задача 3.

- Натуральные числа удовлетворяют условию $ab=cd$. Может ли число $a+b+c+d$ быть простым?

- Решение.
- Выразим переменную *a* через остальные

переменные из равенства $ab = cd$ $a = \dfrac{cd}{b}$

Подставим этот результат в выражение $a+b+c+d$:

$$a+b+c+d=\frac{cd}{b}+b+c+d=\frac{cd+b^2+bc+bd}{b}=\frac{c(b+d)+b(b+d)}{b}=$$

$$=\frac{(b+c)(b+d)}{b}.$$

- Заметим, что последняя дробь является целым числом (т.к. исходно мы преобразовали целое число a+b+c+d). Следовательно, числитель должен нацело делиться на знаменатель, или, иначе говоря, данную дробь можно сократить так, чтобы в знаменателе осталась единица. При сокращении этой дроби, часть делителей числа b (имеются в виду делители, присутствующие в каноническом представлении числа b) сократится с первой скобкой, оставшаяся часть – со второй. Предположим, что после сокращения от первой скобки осталось натуральное число m от второй натуральное число n.

В этом случае можно утверждать, что $m, n > 1$

$(\, m \geq \dfrac{b+c}{b} > \dfrac{b}{b} = 1$, аналогично – с n).

Следовательно, число $a+b+c+d=mn$, где $m,n>1$.

Значит, это число не простое.

Ответ: это число не может быть простым.

Задача 4.

- Найдите все пары натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно 78, а наибольший общий делитель равен 13.

- Решение.
- 1. Пусть a и b натуральные числа, тогда по свойству НОК(a,b)·НОД(a,b)=a·b имеем $13 \cdot 78 = a \cdot b$.
- 2. Разложим левую часть равенства на простые множители $13 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 3 = a \cdot b$
- 3. Подбором находим искомые пары чисел $a=13 \cdot 3=39$ $b=13 \cdot 2=26$ или $a=13 \cdot 3 \cdot 2=78$ $b=13$
- Ответ: 39 и 26, 78 и 13.

Задача 5.

- Найдите все натуральные числа, последняя десятичная цифра которых 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей (включая единицу и само число).

- Решение
- 1. Пусть p натуральное число, удовлетворяющие условию задачи. Если натуральное число p имеет 15 различных делителей и кол-во делителей определяется по формуле $p=(m+1)(n+1)$, где m, n кратности простых делителей.

- 2. По условию задачи должны быть по меньшей мере 2 простых делителя – 2 и 5.
- 3. 15=(m+1)(n+1); m=2, n=4 (единственное решение без привязки к конкретным множителям).
- Существуют 2 числа $N = 2^2 \cdot 5^4 = 2500$ и

$$N = 2^4 \cdot 5^2 = 400.$$

Ответ: 2500; 400

Задача 6.

- Найдите все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 55.

- Решение

Пусть m и n натуральные числа и $m^2 - n^2 = 55$,

тогда $(m-n)(m+n)=5\cdot 11$ или $(m-n)(m+n)=55\cdot 1$.

Рассмотрим системы:

1) $\begin{cases} m-n=5 \\ m+n=11 \end{cases}$

3) $\begin{cases} m-n=1 \\ m+n=55 \end{cases}$

2) $\begin{cases} m-n=11 \\ m+n=5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} m-n=55 \\ m+n=1 \end{cases}$

2 из 4 систем не имеют решения в натуральных числах, следовательно $m=8$, $n=3$ и $m=28$, $n=27$.

Ответ: $m=8$, $n=3$ и $m=28$, $n=27$.