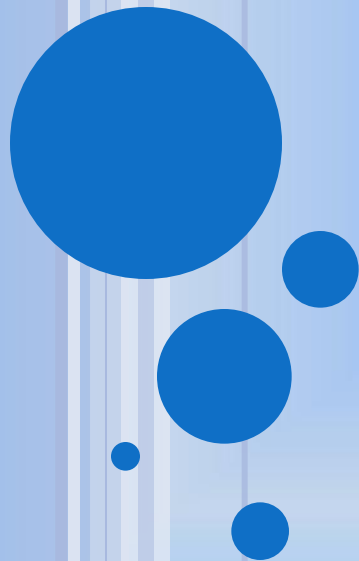


# **ЗАДАЧИ НА ДЕЛИМОСТЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ**

**(по материалам ЕГЭ)**

**Кретьова Д.Н. МОУ «Лицей №47» г.Саратов**



## Задача 1.

**Найдите все натуральные числа, которые делятся на 42 и имеют ровно 42 различных натуральных делителя (включая единицу и само число).**

Для решения используем формулу нахождения числа (количества) делителей какого-либо числа :

$$y = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \dots (\alpha_k + 1),$$

где  $y$  - количество делителей

- показатель степени в разложении на простые

множители-  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$



- 1) Разложим число 42 на простые множители:

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

- 2) Пусть  $A$  - некоторое число. Раз 42 – делитель числа  $A$ , то число  $A$  делится на 2, 3 и 7, значит разложение числа  $A$  на множители можно записать в виде:

$$A = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\alpha_3} \cdot Q, \text{ где } Q - \text{некоторое число}$$

- 3) Применим формулу нахождения количества делителей какого-либо числа:

где  $y = 42$

$$y = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \dots (\alpha_k + 1),$$

- Получим:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \dots (\alpha_k + 1) = 42$$



- 4) Заменяем 42 на его разложение на простые множители:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \dots (\alpha_k + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 7,$$

- 5) Т.к. 42 раскладывается на 3 простых множителя, значит  $k = 3$

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

- 5) Т.к. левая и правая части состоят из произведения одинакового числа простых множителей, тогда сами множители равны с точностью до порядка.



- 6) Найдем показатели степеней в разложении числа  $A$ :

$$1) \begin{cases} \alpha_1 + 1 = 2, \\ \alpha_2 + 1 = 3 \\ \alpha_3 + 1 = 7 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \alpha_1 + 1 = 3, \\ \alpha_2 + 1 = 7 \\ \alpha_3 + 1 = 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \alpha_1 + 1 = 2, \\ \alpha_2 + 1 = 7 \\ \alpha_3 + 1 = 3 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \alpha_1 + 1 = 7, \\ \alpha_2 + 1 = 2 \\ \alpha_3 + 1 = 3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \alpha_1 + 1 = 3, \\ \alpha_2 + 1 = 2 \\ \alpha_3 + 1 = 7 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \alpha_1 + 1 = 7, \\ \alpha_2 + 1 = 3 \\ \alpha_3 + 1 = 2 \end{cases}$$



□ 7) Решив системы, получим, что

$$A_1 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^6 = 2117682$$

$$A_2 = 2 \cdot 3^6 \cdot 7^2 = 71442$$

$$A_3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^6 = 1411788$$

$$A_4 = 2^2 \cdot 3^6 \cdot 7 = 20412$$

$$A_5 = 2^6 \cdot 3 \cdot 7^2 = 9408$$

$$A_6 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 = 4032$$



## Задача 2.

- **Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящиеся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?**





□ РЕШЕНИЕ

- Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммами его цифр, стоящих на нечётных и на чётных местах, делится на 11.



- 1) Запишем все цифры подряд: 9876543210. В написанном числе указанная разность сумм равна 5.  
 $9+7+3+1=25$  ,  $8+6+4+2+0=20$  ,  $25-20=5$
- 2) Меняя местами, например, 5 и 8, мы одну сумму увеличиваем на 3, а другую уменьшаем на 3. Значит, разность между суммами его цифр, стоящих на нечётных и на чётных местах, становится равной 11. Меняя местами, например, 4 и 1, или 3 и 6, получаем требуемые примеры.

Ответ: Да.



## Задача 3.

- **Натуральные числа удовлетворяют условию  $ab=cd$ . Может ли число  $a+b+c+d$  быть простым?**



- Решение.
- Выразим переменную  $a$  через остальные

переменные из равенства  $ab = cd$   $a = \frac{cd}{b}$

Подставим этот результат в выражение  $a + b + c + d$ :

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= \frac{cd}{b} + b + c + d = \frac{cd + b^2 + bc + bd}{b} = \frac{c(b+d) + b(b+d)}{b} = \\ &= \frac{(b+c)(b+d)}{b}. \end{aligned}$$



- Заметим, что последняя дробь является целым числом (т.к. исходно мы преобразовали целое число  $a+b+c+d$ ). Следовательно, числитель должен нацело делиться на знаменатель, или, иначе говоря, данную дробь можно сократить так, чтобы в знаменателе осталась единица. При сокращении этой дроби, часть делителей числа  $b$  (имеются в виду делители, присутствующие в каноническом представлении числа  $b$ ) сократится с первой скобкой, оставшаяся часть – со второй. Предположим, что после сокращения от первой скобки осталось натуральное число  $m$  от второй натуральное число  $n$ .



В этом случае можно утверждать, что  $m, n > 1$

$$\left( m \geq \frac{b+c}{b} > \frac{b}{b} = 1, \text{ аналогично} - \text{с } n \right).$$

Следовательно, число  $a+b+c+d=mn$ , где  $m, n > 1$ .

Значит, это число не простое.

Ответ: это число не может быть простым.



## Задача 4.

- **Найдите все пары натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно 78, а наибольший общий делитель равен 13.**



- Решение.
- 1. Пусть  $a$  и  $b$  натуральные числа, тогда по свойству  $\text{НОК}(a,b) \cdot \text{НОД}(a,b) = a \cdot b$  имеем  $13 \cdot 78 = a \cdot b$ .
- 2. Разложим левую часть равенства на простые множители  $13 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 3 = a \cdot b$
- 3. Подбором находим искомые пары чисел  $a = 13 \cdot 3 = 39$   $b = 13 \cdot 2 = 26$  или  $a = 13 \cdot 3 \cdot 2 = 78$   $b = 13$
- Ответ: 39 и 26, 78 и 13.





## Задача 5.

- **Найдите все натуральные числа, последняя десятичная цифра которых 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей (включая единицу и само число).**



- Решение
- 1. Пусть  $p$  натуральное число, удовлетворяющие условию задачи. Если натуральное число  $p$  имеет 15 различных делителей и кол-во делителей определяется по формуле  $p=(m+1)(n+1)$ , где  $m, n$  кратности простых делителей.



- 2. По условию задачи должны быть по меньшей мере 2 простых делителя – 2 и 5.
- 3.  $15=(m+1)(n+1)$ ;  $m=2$ ,  $n=4$  (единственное решение без привязки к конкретным множителям).
- Существуют 2 числа

$$N = 2^2 \cdot 5^4 = 2500$$

$$N = 2^4 \cdot 5^2 = 400.$$

Ответ: 2500; 400



## Задача 6.

- **Найдите все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 55.**



## □ Решение

Пусть  $m$  и  $n$  натуральные числа и  $m^2 - n^2 = 55$   
тогда  $(m-n)(m+n) = 5 \cdot 11$  или  $(m-n)(m+n) = 55 \cdot 1$ .

Рассмотрим системы:

$$1) \begin{cases} m - n = 5 \\ m + n = 11 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} m - n = 1 \\ m + n = 55 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} m - n = 11 \\ m + n = 5 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} m - n = 55 \\ m + n = 1 \end{cases}$$

2 из 4 систем не имеют решения в натуральных числах, следовательно  $m=8$ ,  $n=3$  и  $m=28$ ,  $n=27$ .

Ответ:  $m=8$ ,  $n=3$  и  $m=28$ ,  $n=27$ .

