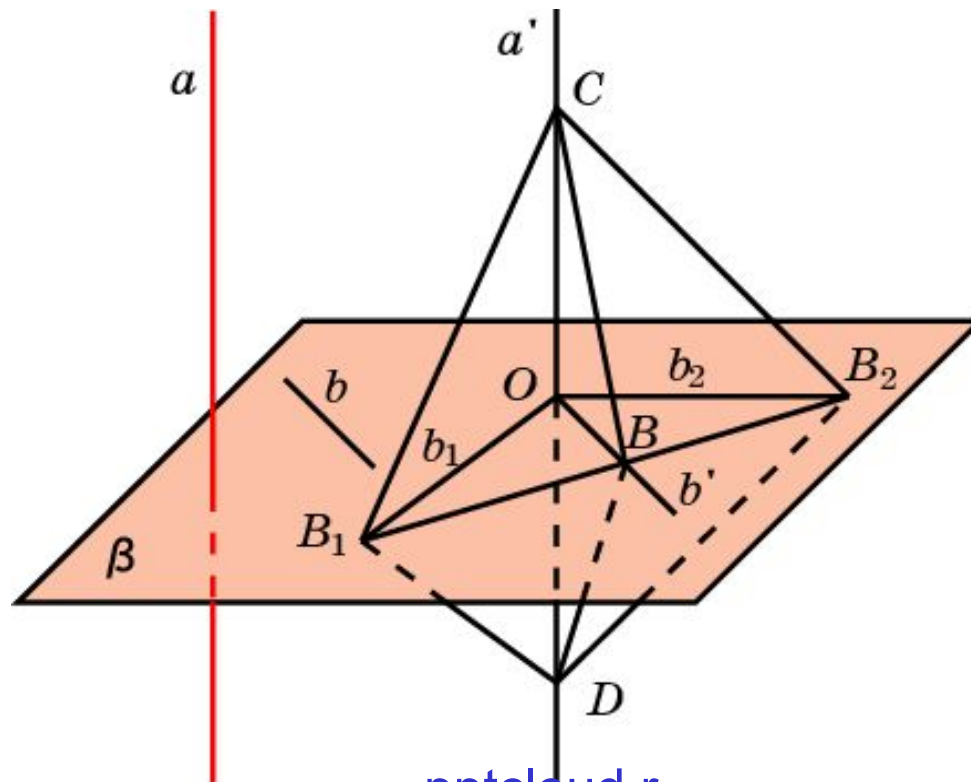


ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Прямая называется **перпендикулярной** плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Теорема. (Признак перпендикулярности прямой и плоскости.)
Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна и самой плоскости.



Упражнение 1

Верно ли, что если прямая перпендикулярна каким-нибудь двум прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости?

Ответ: Нет.

Упражнение 2

Прямая параллельна плоскости. Может ли она быть перпендикулярной какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости?

Ответ: Да.

Упражнение 3

Что представляет собой геометрическое место точек, расположенных на прямых, проходящих через данную точку на прямой и перпендикулярных этой прямой?

Ответ: Плоскость, перпендикулярная данной прямой.

Упражнение 4

Как расположена относительно плоскости треугольника прямая, перпендикулярная двум его сторонам?

Ответ: Перпендикулярна.

Упражнение 5

Найдите ГМТ в пространстве, равноудалённых от двух данных точек.

Ответ: Плоскость, проходящая через середину отрезка, концами которого являются данные точки, и перпендикулярная этому отрезку.

Упражнение 6

При каком взаимном расположении двух прямых через одну из них можно провести плоскость, перпендикулярную другой?

Ответ: Прямые перпендикулярны.

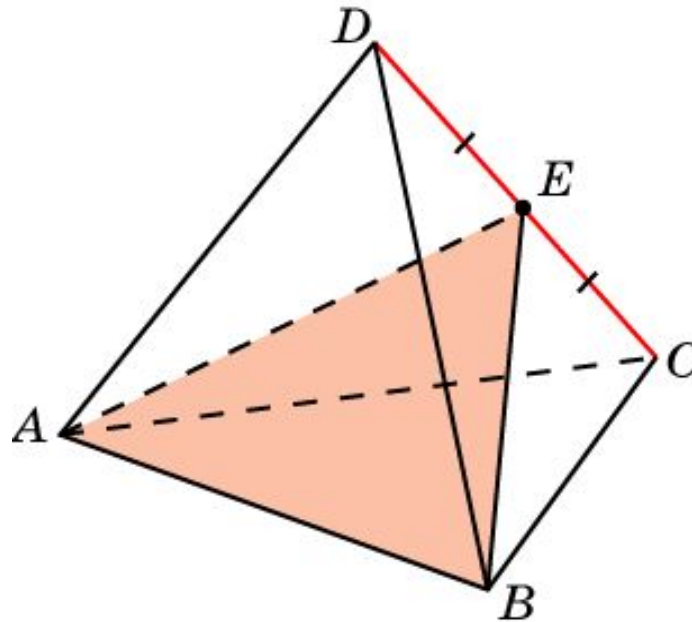
Упражнение 7

Определите вид треугольника, если через одну из его сторон можно провести плоскость, перпендикулярную другой стороне.

Ответ: Прямоугольный.

Упражнение 8

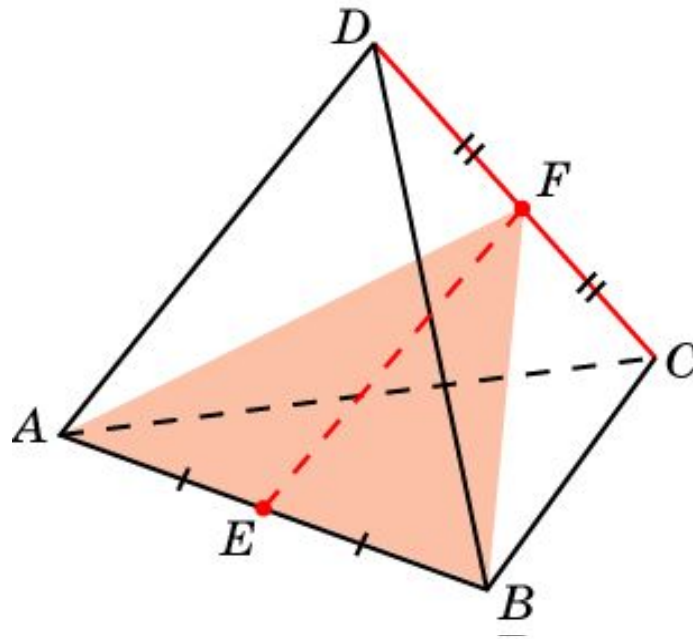
Докажите, что плоскость, проходящая через ребро AB правильного тетраэдра $ABCD$ и точку H – середину ребра CD , перпендикулярна ребру CD .



Доказательство: Прямая CD перпендикулярна прямым AE и BE . Следовательно, она перпендикулярна плоскости ABE .

Упражнение 9

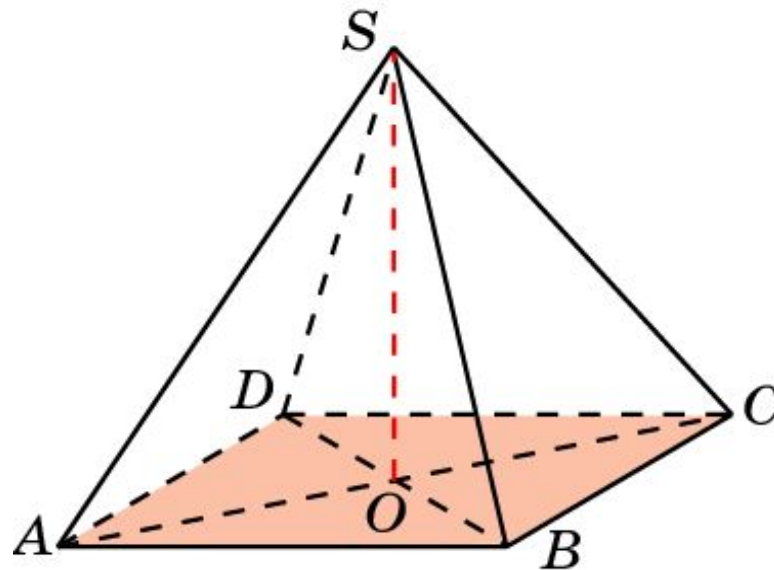
Докажите, что отрезок EF , соединяющий середины противоположных ребер AB и CD правильного тетраэдра $ABCD$, перпендикулярен ребру CD .



Доказательство: В силу предыдущей задачи, прямая CD перпендикулярна плоскости ABF . Следовательно, она перпендикулярна прямой EF , лежащей в этой плоскости.

Упражнение 10

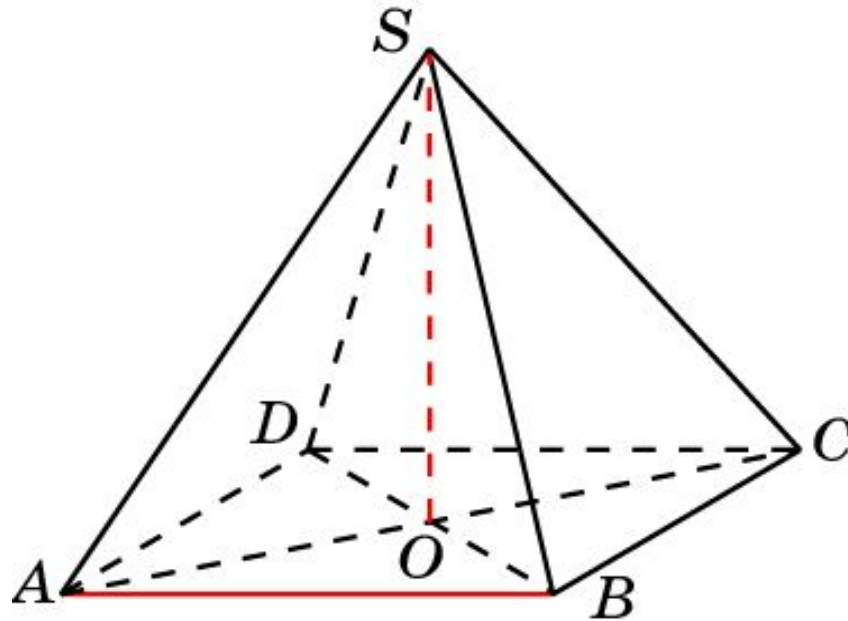
Докажите, что прямая SO , проходящая через вершину S правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ и точку O пересечения диагоналей основания, перпендикулярна плоскости основания $ABCD$.



Доказательство: Треугольник ACS равнобедренный, SO – медиана. Следовательно, прямая SO перпендикулярна AC . Аналогично, прямая SO перпендикулярна BD . В силу признака перпендикулярности прямой и плоскости, прямая SO перпендикулярна плоскости $ABCD$.

Упражнение 11

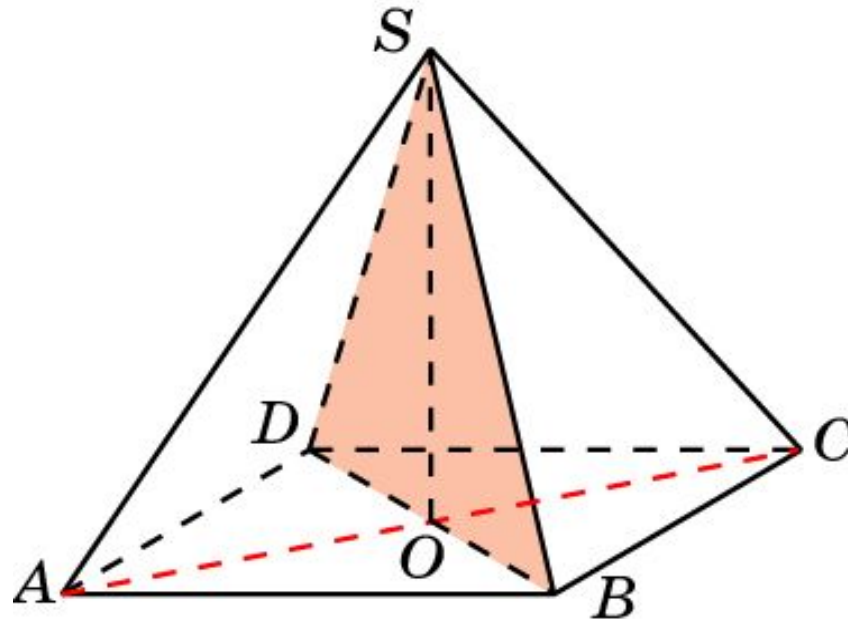
Докажите, что прямая SO , проходящая через вершину S правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ и точку O пересечения диагоналей основания, перпендикулярна прямой AB .



Доказательство: В силу предыдущей задачи, прямая SO перпендикулярна плоскости ABC . Следовательно, она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. В частности, она перпендикулярна прямой AB .

Упражнение 12

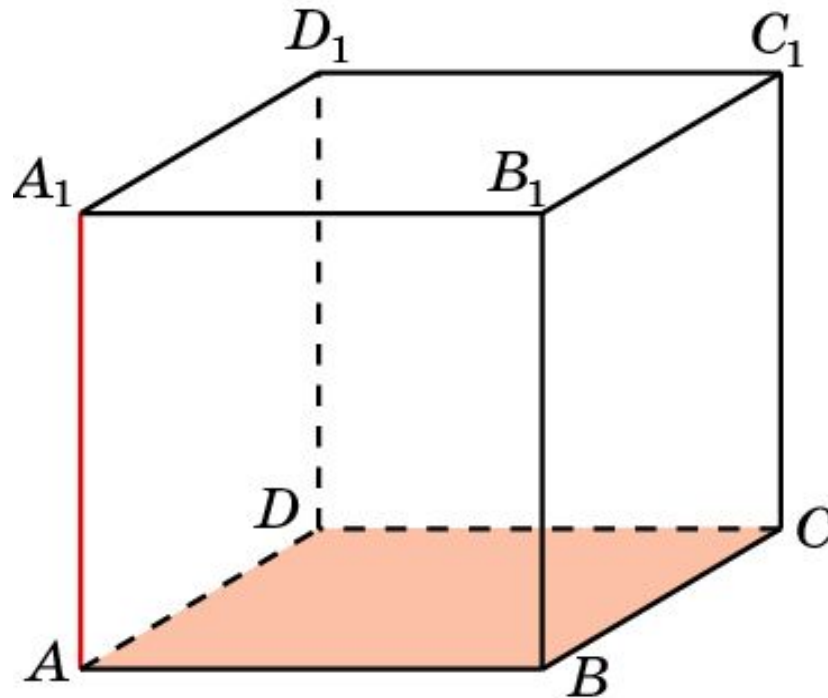
Докажите, что прямая AC , проходящая через вершины правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, перпендикулярна плоскости SBD .



Доказательство: Прямая AC перпендикулярна прямым BD и SO . Следовательно, она перпендикулярна плоскости SBD .

Упражнение 13

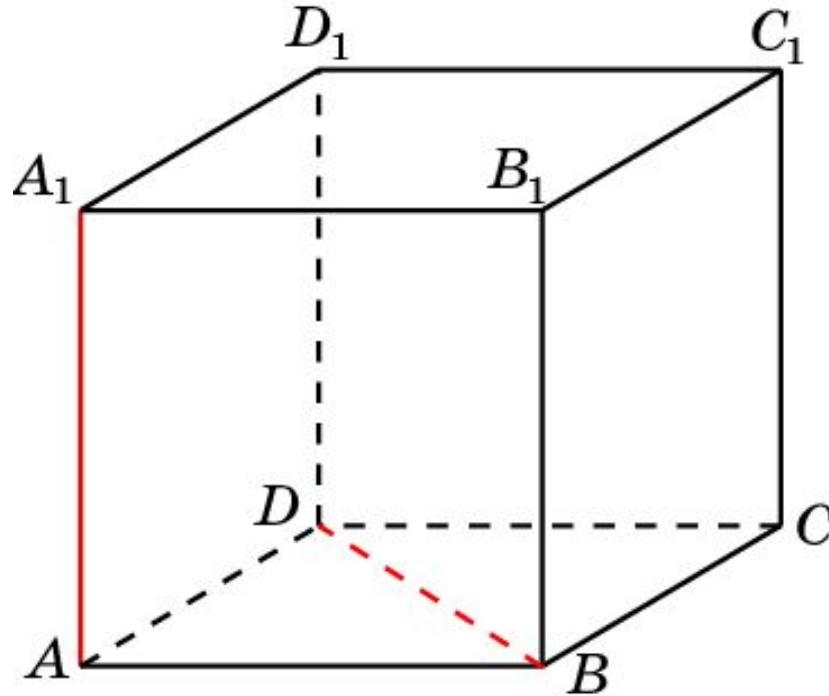
Докажите, что прямая AA_1 , проходящая через вершины куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикулярна плоскости ABC .



Доказательство. Прямая AA_1 перпендикулярна прямым AB и AD . Следовательно, она перпендикулярна плоскости ABC .

Упражнение 14

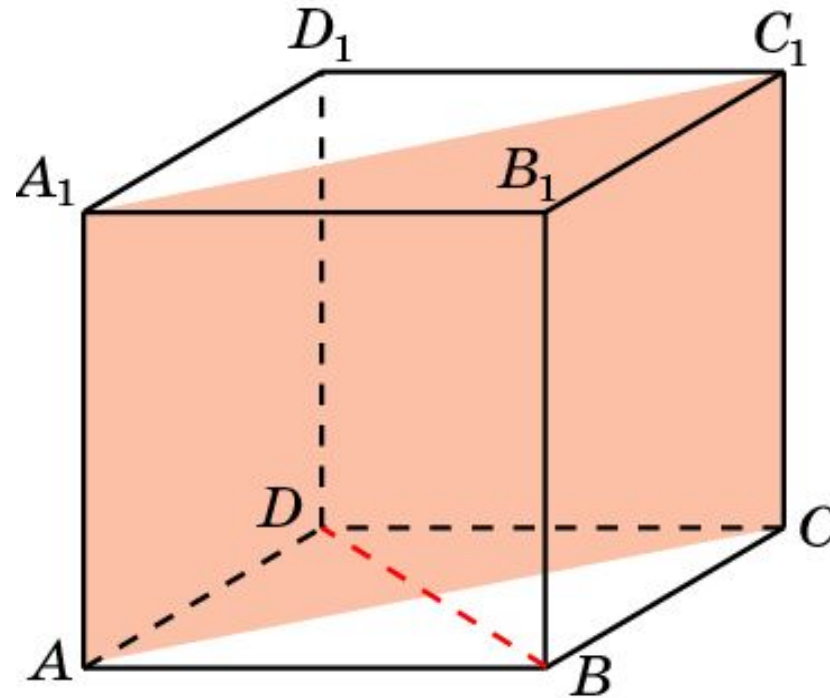
Докажите, что прямые AA_1 и BD , проходящие через вершины куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, перпендикулярны.



Доказательство. В силу предыдущей задачи, прямая AA_1 перпендикулярна плоскости ABC . Следовательно, она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. В частности, она перпендикулярна прямой BD .

Упражнение 15

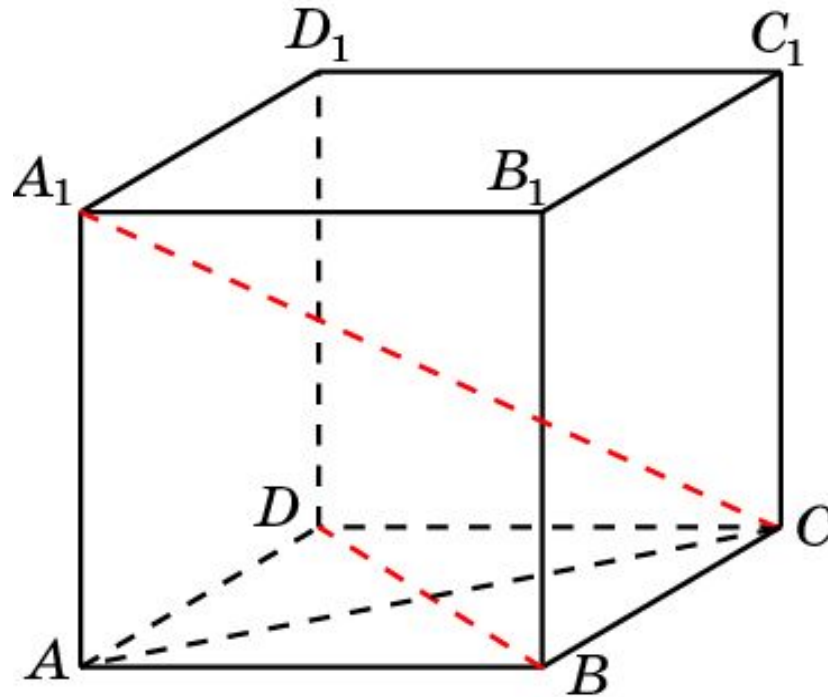
Докажите, что прямая BD , проходящая через вершины куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикулярна плоскости ACC_1 .



Доказательство. Прямая BD перпендикулярна прямым AA_1 и AC . Следовательно, она перпендикулярна плоскости ACC_1 .

Упражнение 16

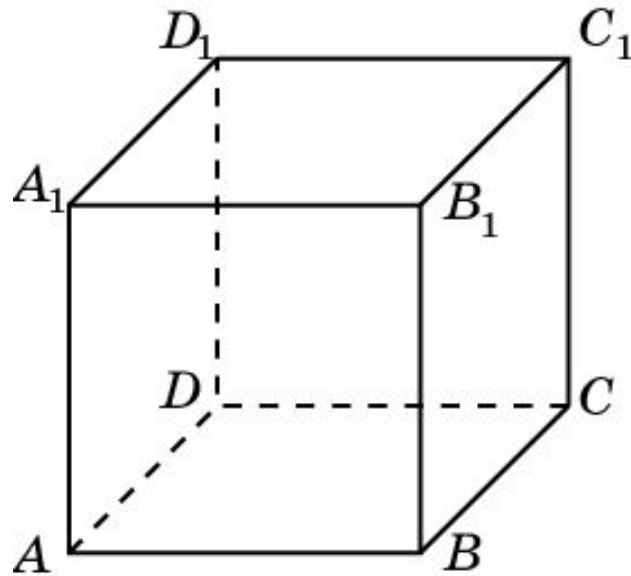
Докажите, что прямые CA_1 и BD , проходящие через вершины куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, перпендикулярны.



Доказательство. В силу предыдущей задачи, прямая BD перпендикулярна плоскости AA_1C . Следовательно, она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. В частности, она перпендикулярна прямой CA_1 .

Упражнение 17

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ укажите прямые, проходящие через вершины куба, перпендикулярные плоскости: а) ABC ; б) BCC_1 ; в) $BCC_1 D_1$.



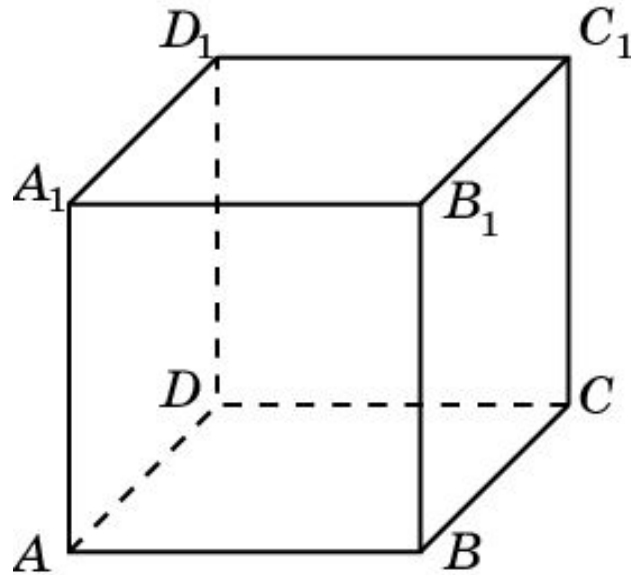
Ответ: а) AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 ;

б) AB, CD, A_1B_1, C_1D_1 ;

в) AB_1, DC_1 .

Упражнение 18

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ укажите плоскости, проходящие через вершины куба, перпендикулярные прямой: а) AA_1 ; б) AB_1 ; в) AC_1 .



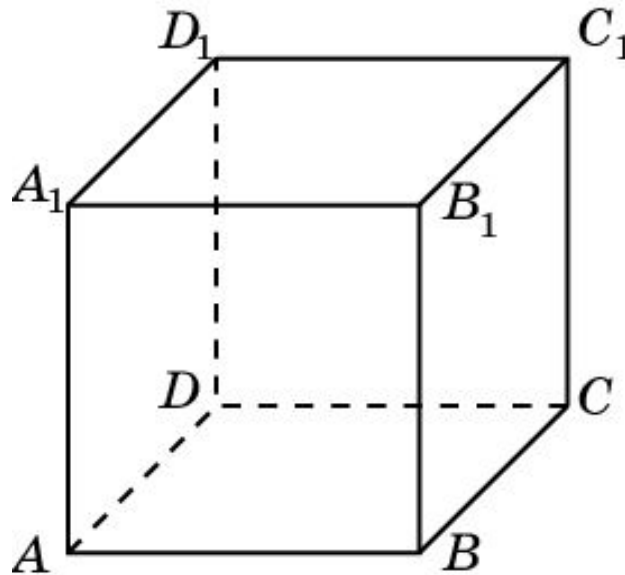
Ответ: а) $ABC, A_1 B_1 C_1$;

б) BCD_1 .

в) $BDA_1, CB_1 D_1$.

Упражнение 19

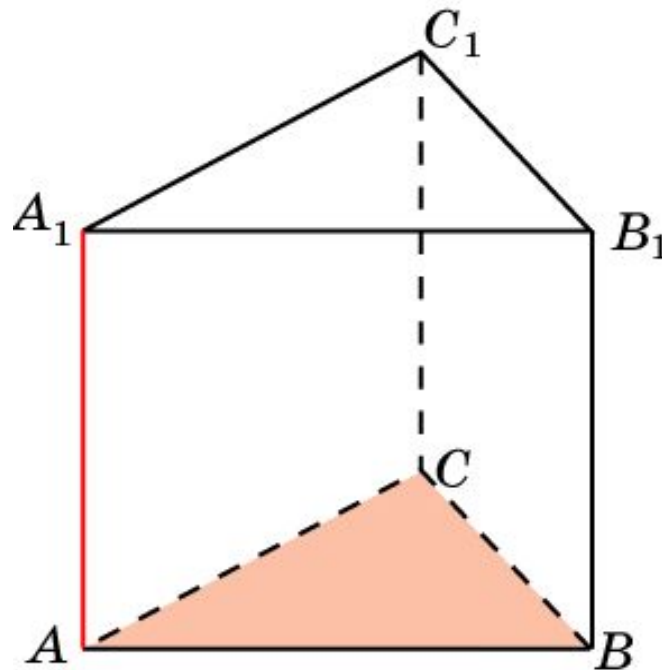
Сколько имеется пар перпендикулярных прямых и плоскостей, содержащих ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$?



Решение: Для каждого ребра имеется две грани, ей перпендикулярные. У куба имеется 12 ребер. Следовательно, искомое число пар перпендикулярных прямых и плоскостей равно 24.

Упражнение 20

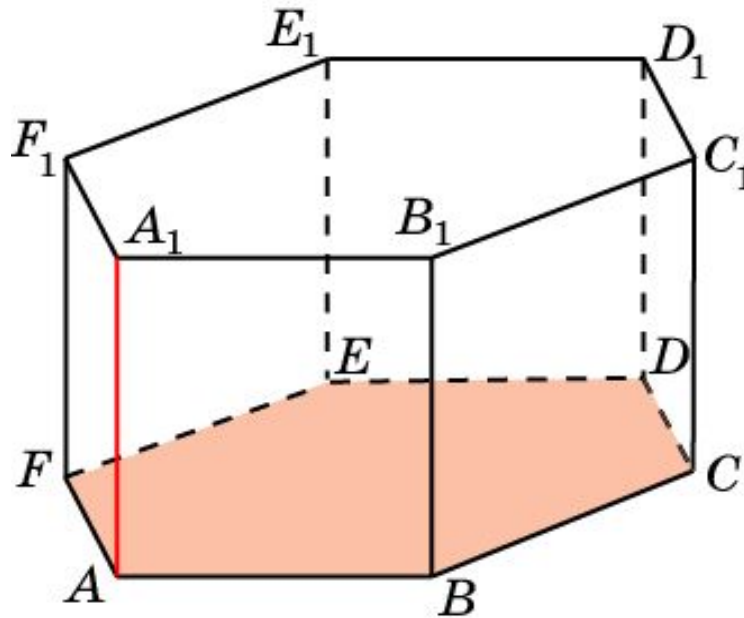
Докажите, что прямая AA_1 , проходящая через вершины правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, перпендикулярна плоскости ABC .



Доказательство. Прямая AA_1 перпендикулярна прямым AB и AC . Следовательно, она перпендикулярна плоскости ABC .

Упражнение 21

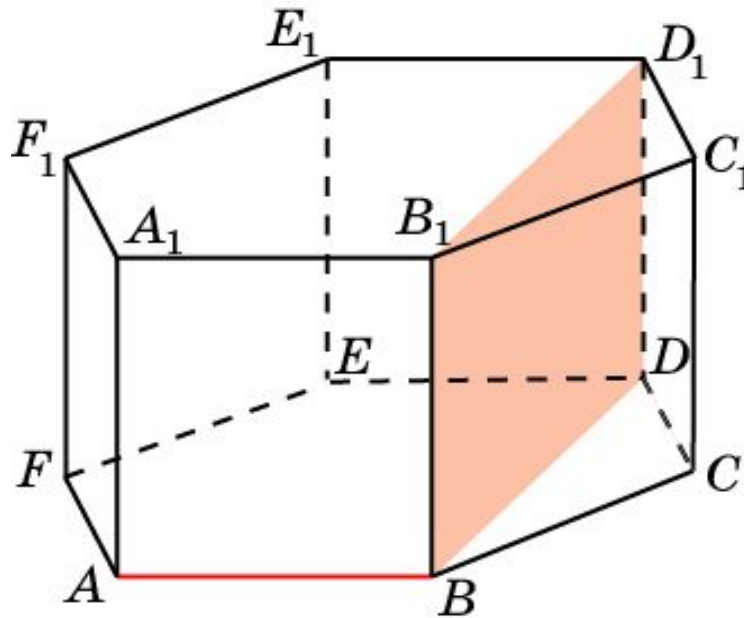
Докажите, что прямая AA_1 , проходящая через вершины правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, перпендикулярна плоскости ABC .



Доказательство. Прямая AA_1 перпендикулярна прямым AB и AC . Следовательно, она перпендикулярна плоскости ABC .

Упражнение 22

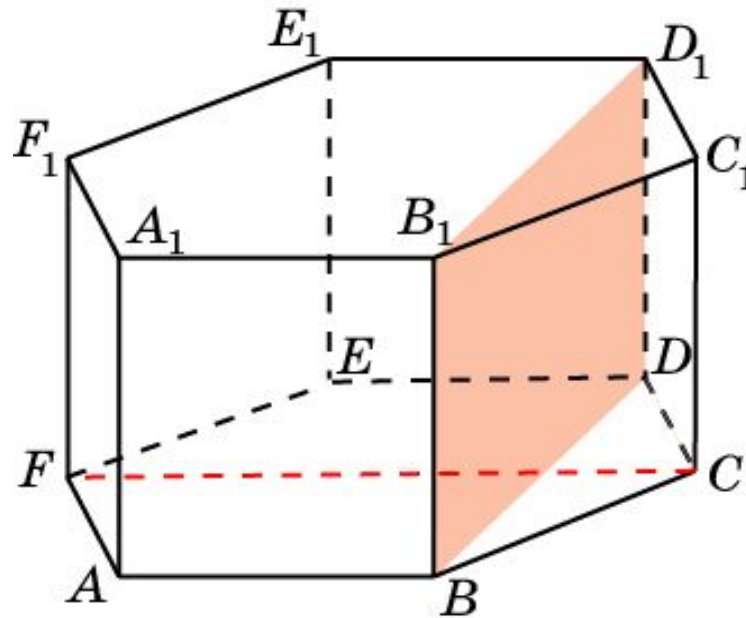
Докажите, что прямая AB , проходящая через вершины правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, перпендикулярна плоскости BDD_1 .



Доказательство. Прямая AB перпендикулярна прямым BB_1 и BD . Следовательно, она перпендикулярна плоскости BDD_1 .

Упражнение 24

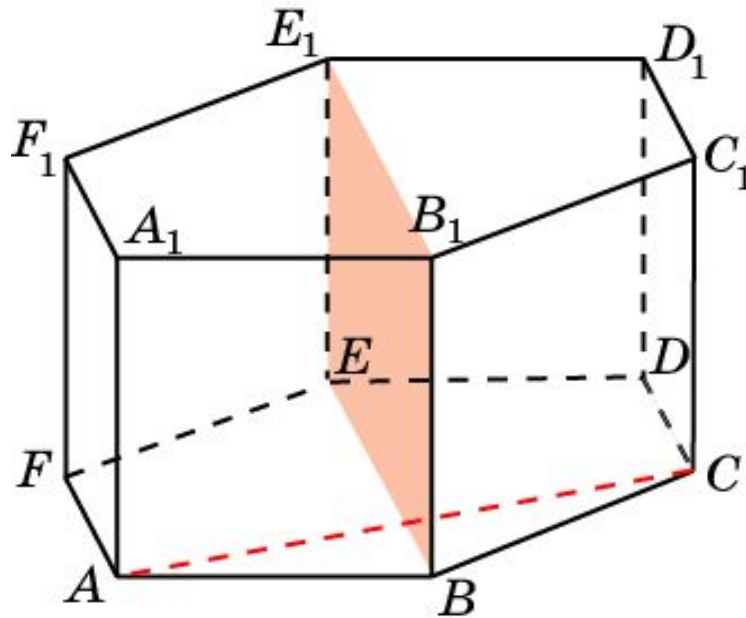
Докажите, что прямая CF , проходящая через вершины правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, перпендикулярна плоскости BDD_1 .



Доказательство. Прямая CF параллельна прямой AB , которая перпендикулярна плоскости BDD_1 . Следовательно, прямая CF также перпендикулярна плоскости BDD_1 .

Упражнение 25

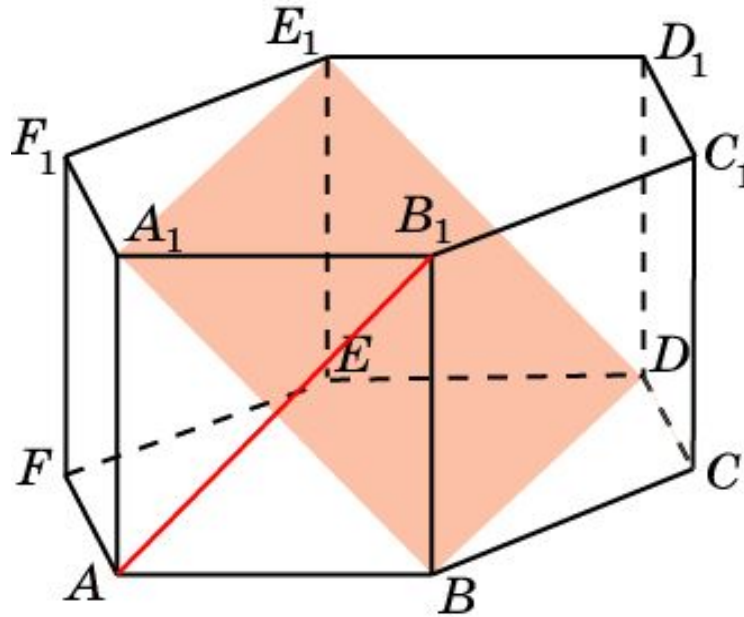
Докажите, что прямая AC , проходящая через вершины правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, перпендикулярна плоскости BEE_1 .



Доказательство. Прямая AC перпендикулярна прямым BE и BB_1 . Следовательно, она перпендикулярна плоскости BEE_1 .

Упражнение 26

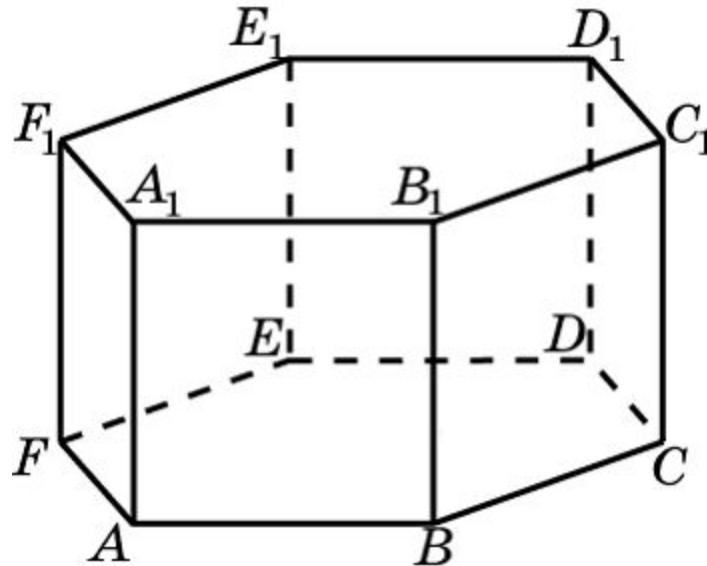
Докажите, что прямая AB_1 , проходящая через вершины правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, перпендикулярна плоскости BDE_1 .



Доказательство. Прямая AB_1 перпендикулярна прямым BA_1 и BD . Следовательно, прямая AB_1 перпендикулярна плоскости BDE_1 .

Упражнение 27

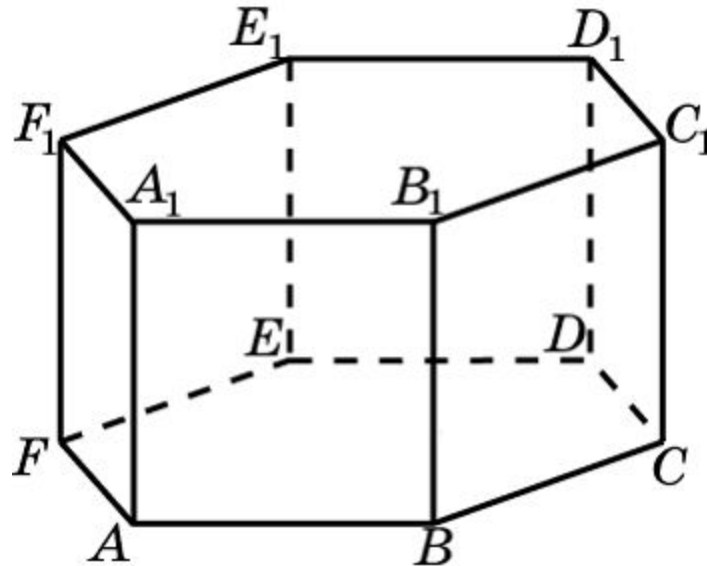
В правильной шестиугольной призме назовите плоскости, проходящие через ребра призмы и перпендикулярные прямой: а) AA_1 ; б) AB ; в) AB_1 .



- Ответ:** а) $ABC, A_1B_1C_1$;
б) $AEE_1; BDD_1$;
в) BDE_1 .

Упражнение 28

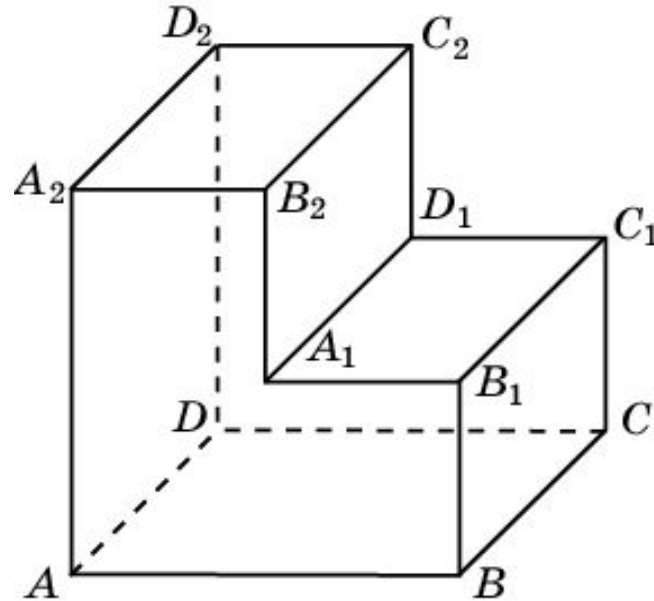
В правильной шестиугольной призме назовите прямые, проходящие через вершины призмы и перпендикулярные плоскости: а) ABB_1 ; б) ACC_1 ; в) ADD_1 .



- Ответ:** а) AE, BD, A_1E_1, B_1D_1 ;
б) $AF, CD, BE, A_1F_1, C_1D_1, B_1E_1$;
в) BF, CE, B_1F_1, C_1E_1 .

Упражнение 29

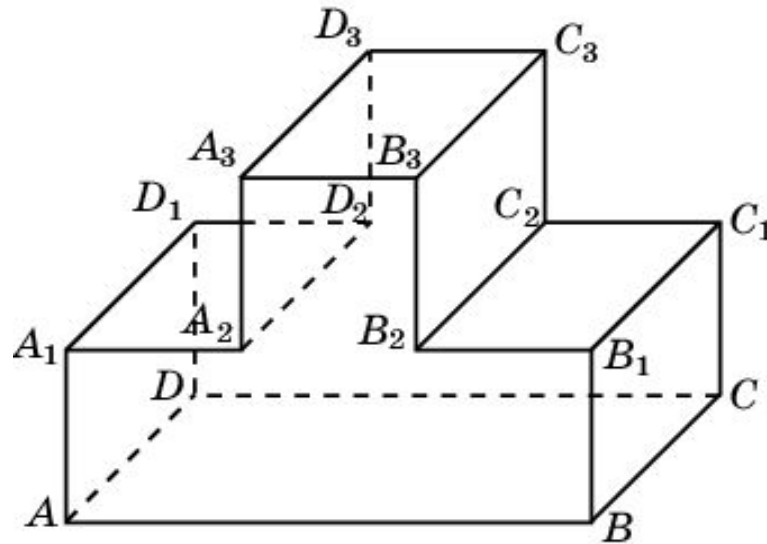
Назовите прямые, проходящие через вершины многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, перпендикулярные плоскости ABC .



Ответ. $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, A_1B_2; D_1C_2$.

Упражнение 30

Назовите прямые, проходящие через вершины многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, перпендикулярные плоскости ADD_1 .



Ответ. $AB, DC, A_1A_2, D_1D_2, A_3B_3, D_3C_3$.