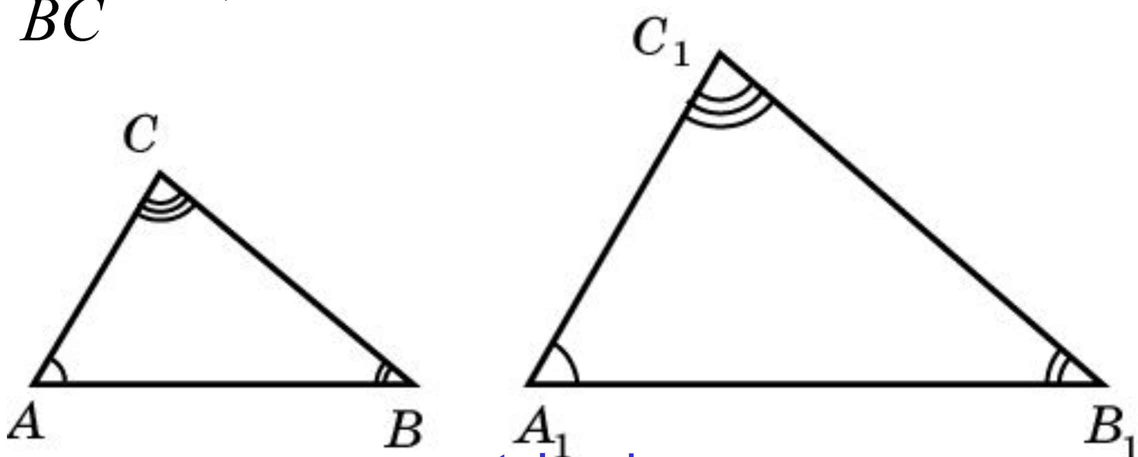
Подобие треугольников

Два треугольника называются подобными, если углы одного соответственно равны углам другого и соответствующие стороны пропорциональны. Коэффициент пропорциональности называется коэффициентом подобия.

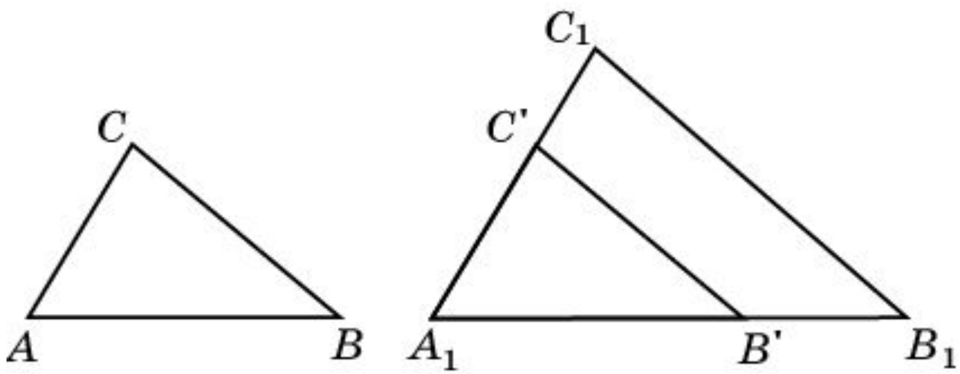
Таким образом, треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} = k,$$ где k – коэффициент подобия.



Первый признак подобия

Теорема. (Первый признак подобия.) Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Тогда и $\angle C = \angle C_1$.

Докажем, что $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$.

Отложим на луче A_1B_1 отрезок A_1B', равный AB, и проведем прямую $B'C'$, параллельную B_1C_1. Треугольники $A_1B'C'$ и ABC равны (по второму признаку равенства треугольников). По теореме о пропорциональных отрезках имеет место равенство $\frac{A_1B_1}{A_1B'} = \frac{A_1C_1}{A_1C'}$. Следовательно, имеем равенство $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$. Аналогичным образом доказывается, что имеет место равенство $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$. Следовательно, треугольники подобны.

Вопрос 1

Какие треугольники называются подобными?

Ответ: Два треугольника называются подобными, если углы одного соответственно равны углам другого и соответствующие стороны пропорциональны.

Вопрос 2

Сформулируйте первый признак подобия треугольников.

Ответ: Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

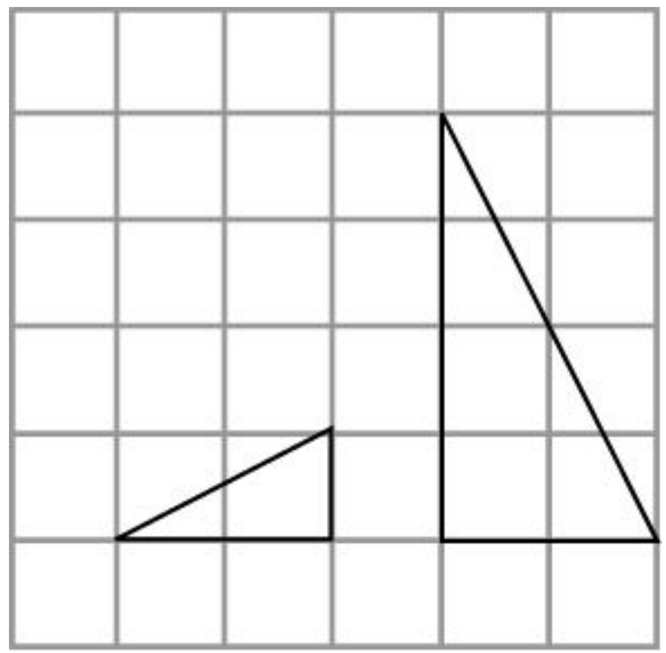
Вопрос 3

Подобны ли любые два: а) равносторонних треугольника; б) равнобедренных треугольника; в) равнобедренных прямоугольных треугольника?

Ответ: а) Да;
б) нет;
в) да.

Упражнение 1

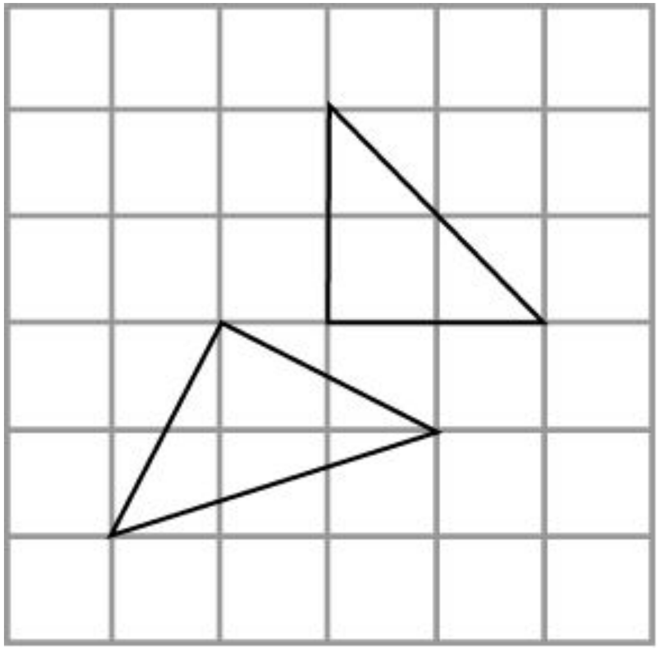
Выясните, подобны ли треугольники, изображенные на рисунке?



Ответ: Да.

Упражнение 2

Выясните, подобны ли треугольники, изображенные на рисунке?

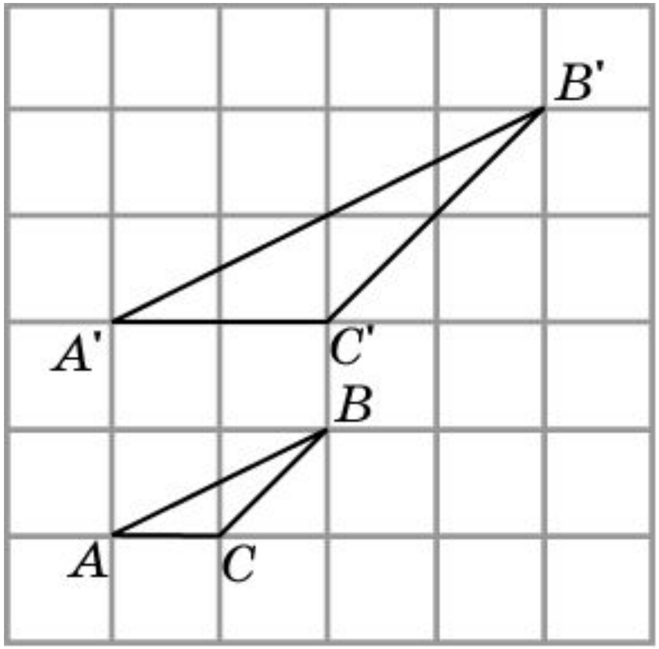


Ответ: Да.

Упражнение 3

Изобразите треугольник $A'B'C'$, подобный данному треугольнику ABC, с коэффициентом подобия 2.

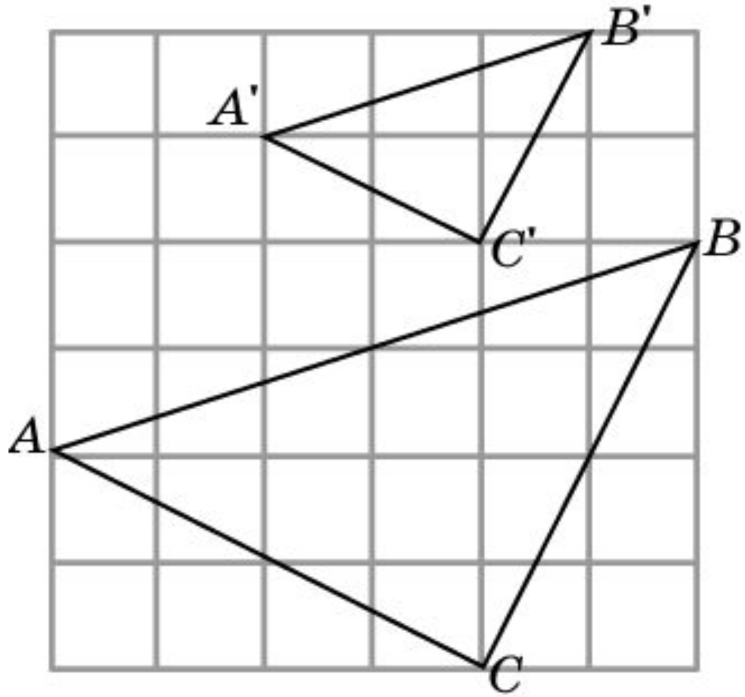
Ответ:



Упражнение 4

Изобразите треугольник $A'B'C'$, подобный данному треугольнику ABC, с коэффициентом подобия 0,5.

Ответ:



Упражнение 5

Стороны треугольника равны 5 см, 8 см и 10 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, если коэффициент подобия равен: а) 0,5; б) 2.

Ответ: а) 2,5 см, 4 см и 5 см;
б) 10 см, 16 см и 20 см.

Упражнение 6

Подобны ли прямоугольные треугольники, если у одного из них есть угол 40^o, а у другого 50^o?

Ответ: Да.

Упражнение 7

Два треугольника подобны. Два угла одного треугольника равны 55^{o} и 80^{o}. Найдите наименьший угол второго треугольника.

Ответ: 45^{o}.

Упражнение 8

В подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $A_1B_1 = 5{,}6$ см, $A_1C_1 = 10{,}5$ см. Найдите AC и B_1C_1.

Ответ: $AC = 15$ см, $B_1C_1 = 7$ см.

Упражнение 9

У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $A_1B_1 = 10$ м, $A_1C_1 = 8$ м. Найдите остальные стороны треугольников.

Ответ: $AC = 4$ м, $B_1C_1 = 14$ м.

Упражнение 10

Стороны треугольника относятся как 5:3:7. Найдите стороны подобного ему треугольника, у которого: а) периметр равен 45 см; б) меньшая сторона равна 5 см; в) большая сторона равна 7 см; г) разность большей и меньшей сторон составляет 2 см.

Ответ: а) 15 см, 9 см, 21 см;

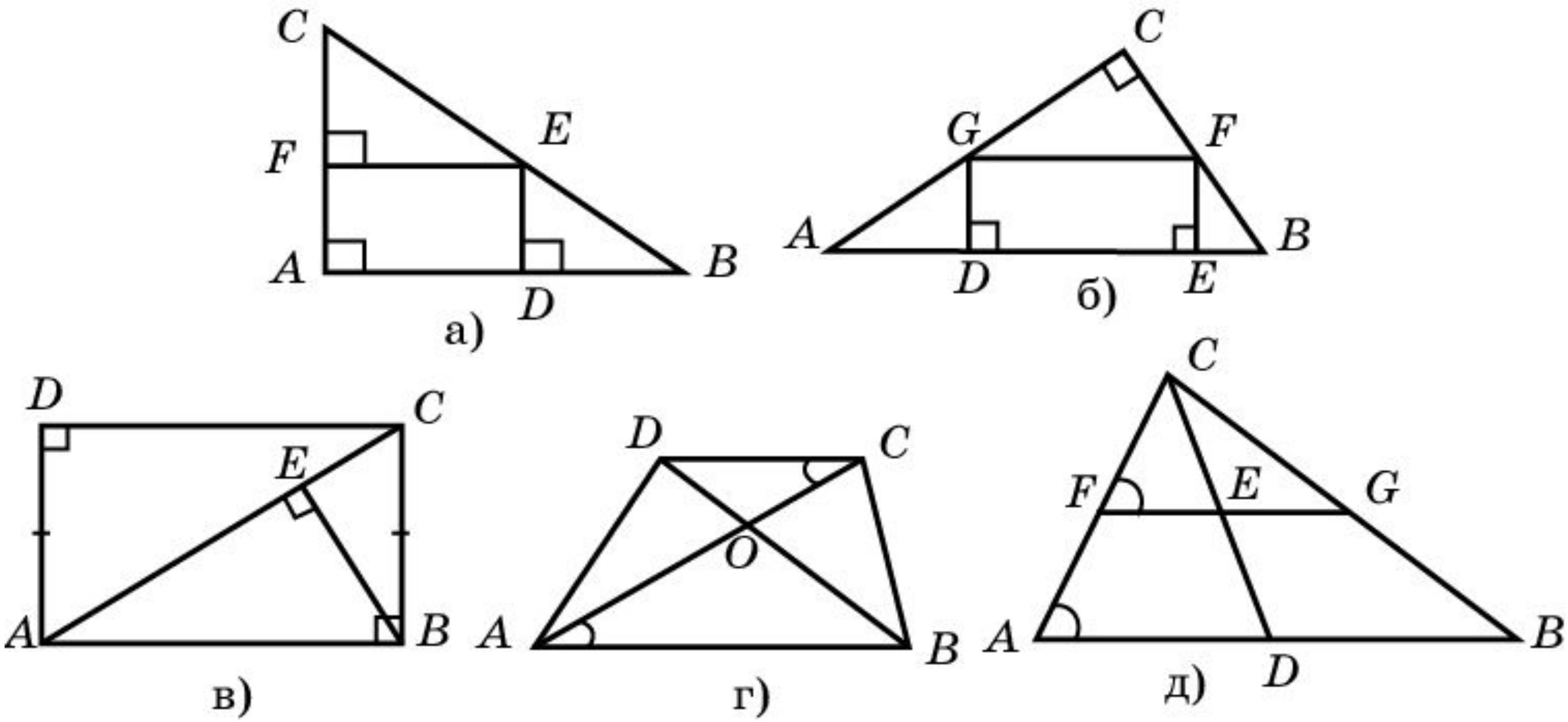
б) $8\frac{1}{3}$ см, 5 см, $11\frac{2}{3}$ см;

в) 5 см, 3 см, 7 см;

г) 2,5 см, 1,5 см, 3,5 см.

Упражнение 11

На рисунке укажите все подобные треугольники.



Ответ: а) ABC, FEC, DBE; б) ABC, GFC, AGD, FBE;

в) ABC, CDA, AEB, BEC; г) AOB, COD;

д) ABC и FGC; ADC и FEC; DBC и EGC.

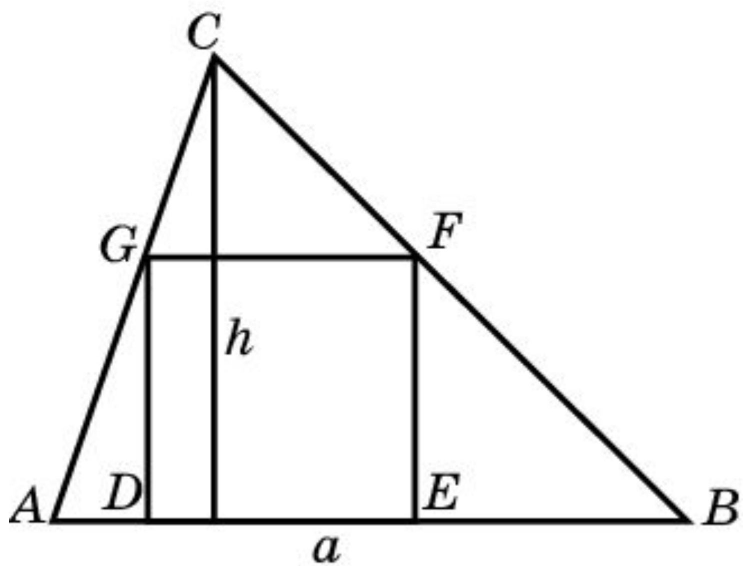
Упражнение 12

У двух равнобедренных треугольников углы между боковыми сторонами равны. Боковая сторона и основание одного треугольника равны соответственно 17 см и 10 см, основание другого равно 8 см. Найдите его боковую сторону.

Ответ: 13,6 см.

Упражнение 13

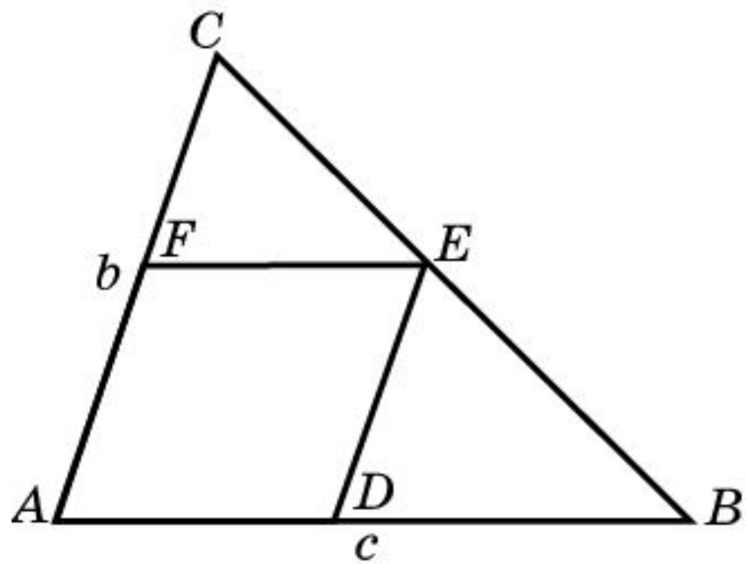
В треугольник со стороной a и высотой h, опущенной на нее, вписан квадрат так, что две его вершины лежат на этой стороне треугольника, а другие две – на двух других сторонах треугольника. Найдите сторону квадрата.



Ответ: $\dfrac{ah}{a+h}$.

Упражнение 14

В треугольник ABC вписан ромб $ADEF$ так, что угол A у них общий, а вершина E находится на стороне BC. Найдите сторону ромба, если $AB = c$ и $AC = b$.



Ответ: $\dfrac{bc}{b+c}$.

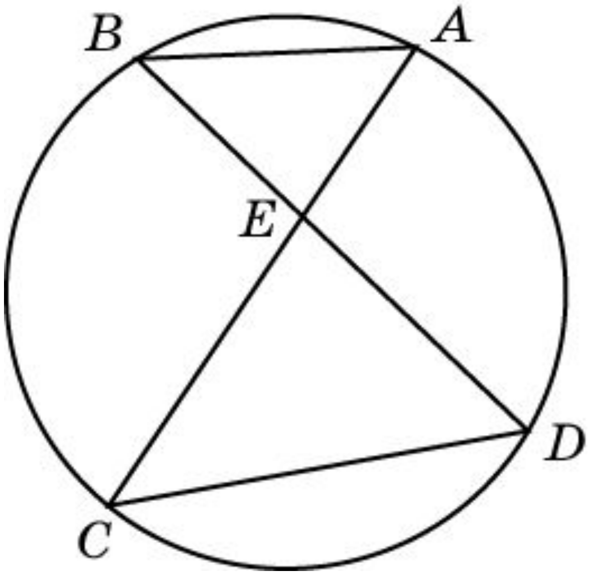
Упражнение 15

Можно ли треугольник пересечь прямой, непараллельной основанию, так, чтобы отсечь от него подобный треугольник? В каком случае это невозможно?

Ответ: Можно, если треугольник неравносторонний.

Упражнение 16

Пусть AC и BD – хорды окружности, пересекающиеся в точке E. Докажите, что треугольники ABE и CDE подобны.



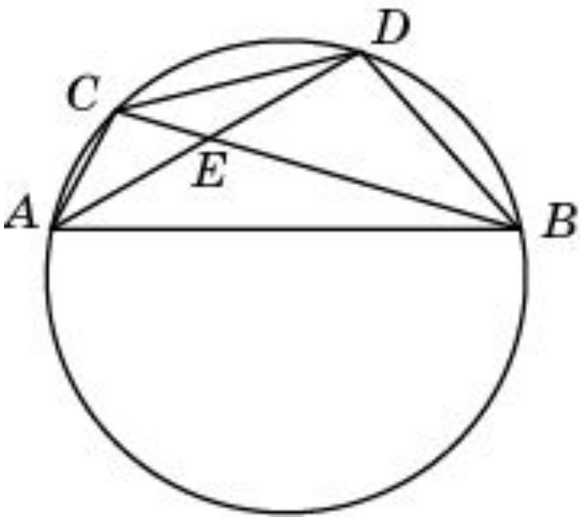
Доказательство: Угол A треугольника ABE равен углу D треугольника CDE, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу окружности.

Аналогично, угол B равен углу C.

Следовательно, треугольники ABE и CDE подобны по первому признаку.

Упражнение 17

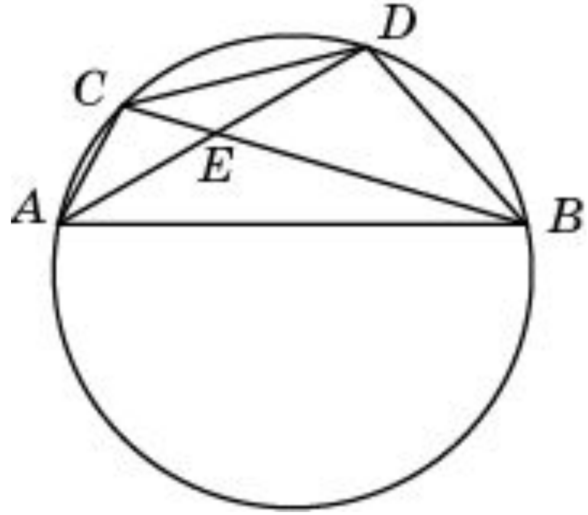
На рисунке $AE = 3$, $BE = 6$, $CE = 2$. Найдите DE.



Ответ: 4.

Упражнение 18

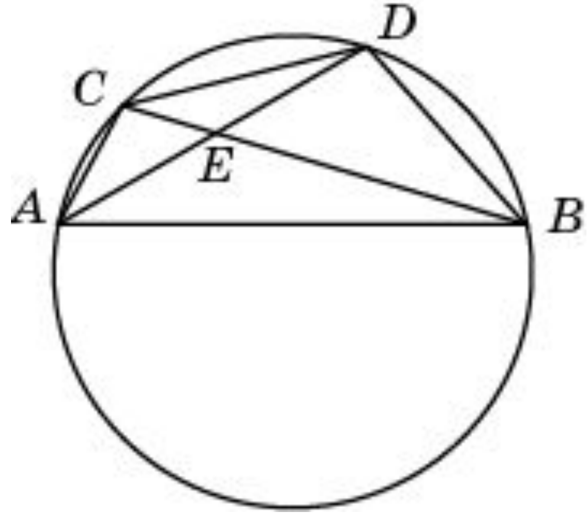
На рисунке $AB = 8$, $BE = 6$, $DE = 4$. Найдите CD.



Ответ: $5\frac{1}{3}$.

Упражнение 19

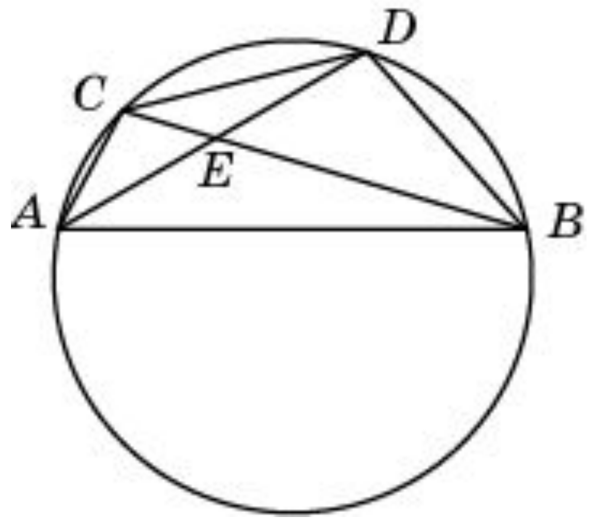
На рисунке $CE = 2$, $DE = 5$, $AE = 4$. Найдите BE.



Ответ: 10.

Упражнение 20

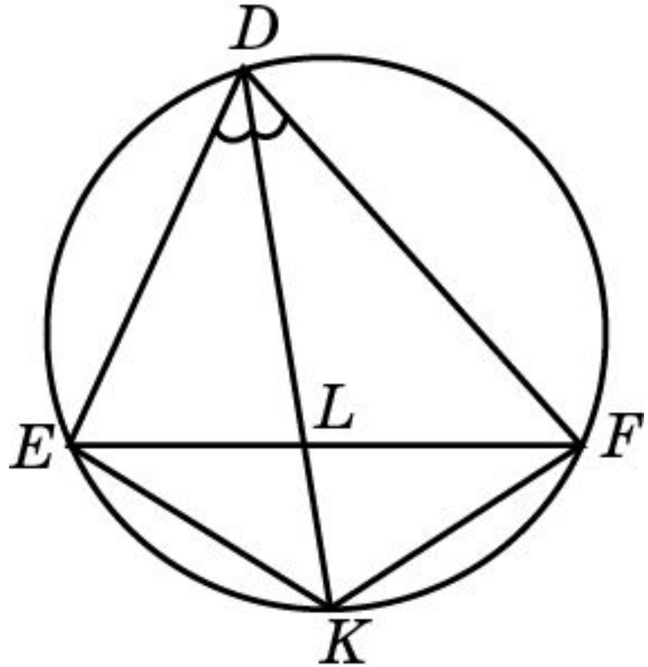
На рисунке $CE = 4$, $CD = 10$, $AE = 6$. Найдите AB.



Ответ: 15.

Упражнение 21

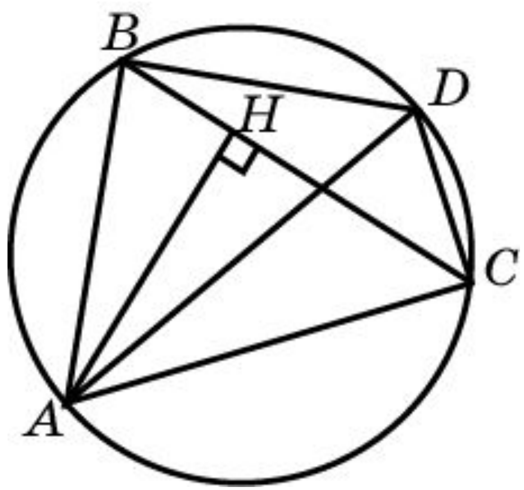
На рисунке DL – биссектриса треугольника DEF, вписанного в окружность. DL пересекает окружность в точке K, которая соединена отрезками с вершинами E и F треугольника. Найдите подобные треугольники.



Ответ: DEK и DLF, DEK и ELK, DLF и ELK, DFK и DLE, DFK и FLK, DLE и FLK.

Упражнение 22

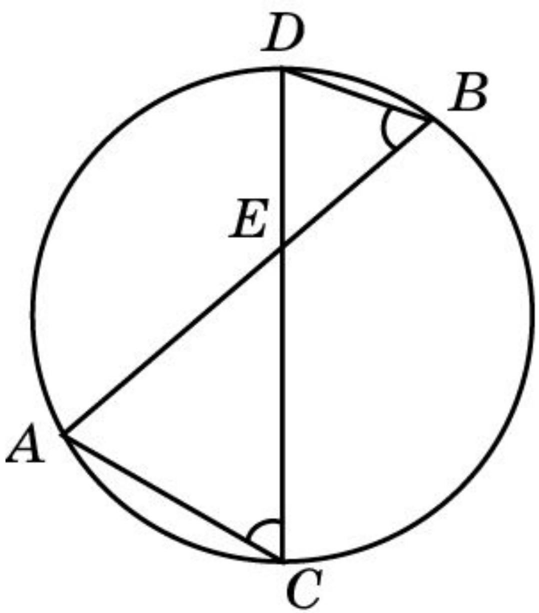
В окружность вписан остроугольный треугольник ABC, AH – его высота, AD – диаметр окружности, который пересекает сторону BC в точке M. Точка D соединена с вершинами B и C треугольника. Найдите подобные треугольники.



Ответ: ABH и ADC, ACH и ADB, ABM и CDM, BMD и AMC.

Упражнение 23

Докажите, что произведение отрезков хорд, проведенных через внутреннюю точку круга, постоянно и равно произведению отрезков диаметра, проведенного через ту же точку.



Решение. Пусть дан круг с центром в точке O, хорда AB и диаметр CD пересекаются в точке E. Докажем, что $AB \cdot AE = CE \cdot DE$. Треугольники ACE и DBE подобны. Следовательно,

$\frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$, значит, $AB \cdot AE = CE \cdot DE$.

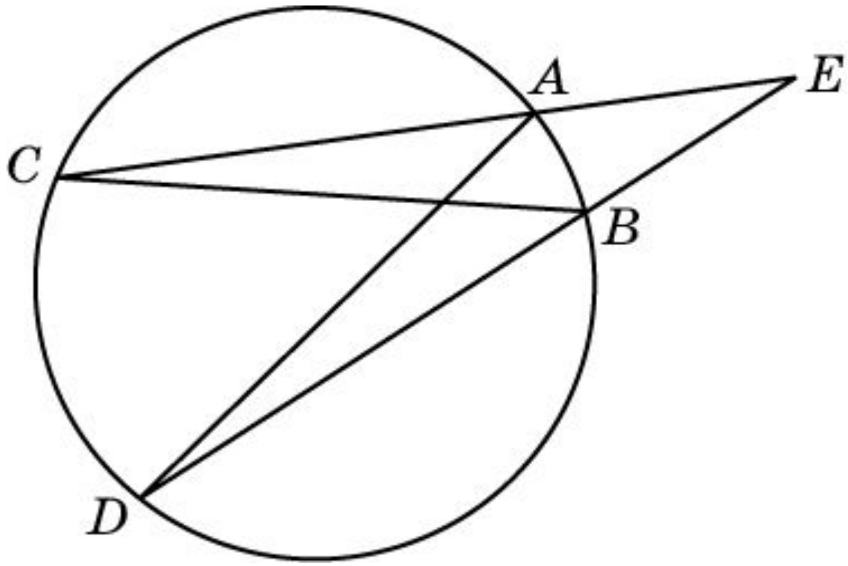
Упражнение 24

Радиус окружности равен 2. Через середину C радиуса под углом 45° к нему проведена хорда AB. Найдите произведение отрезков AC и BC.

Ответ. 3.

Упражнение 25

Через внешнюю точку E окружности проведены две прямые, пересекающая окружность соответственно в точках A, C и B, D. Докажите, что треугольники ADE и BCE подобны.

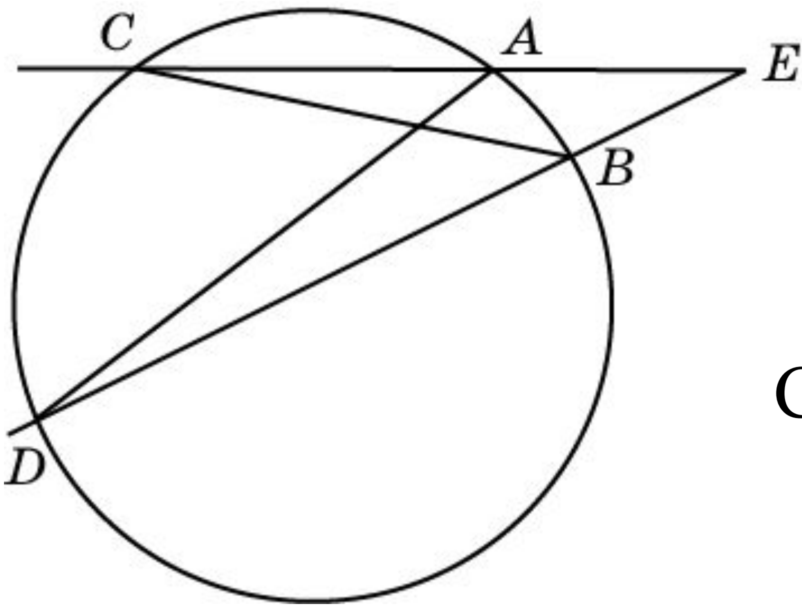


Доказательство: Угол D треугольника ADE равен углу C треугольника BCE, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу окружности. Угол E этих треугольников общий.

Следовательно, треугольники ADE и BCE подобны по первому признаку.

Упражнение 26

Через внешнюю точку E окружности проведены две прямые, пересекающая окружность соответственно в точках A, C и B, D. Докажите, что $AE \cdot CE = BE \cdot DE$.

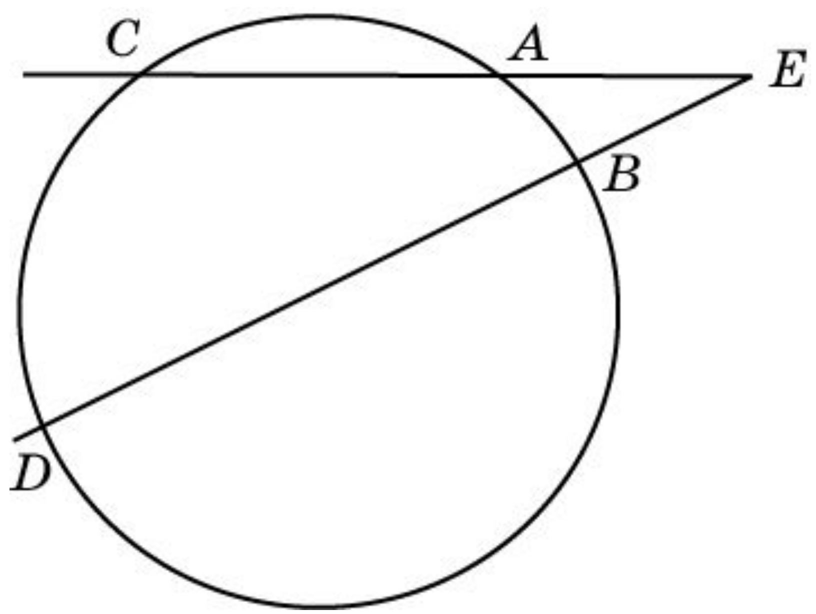


Доказательство: Треугольники ADE и BCE подобны. Значит, $AE : DE = BE : CE$.

Следовательно, $AE \cdot CE = BE \cdot DE$.

Упражнение 27

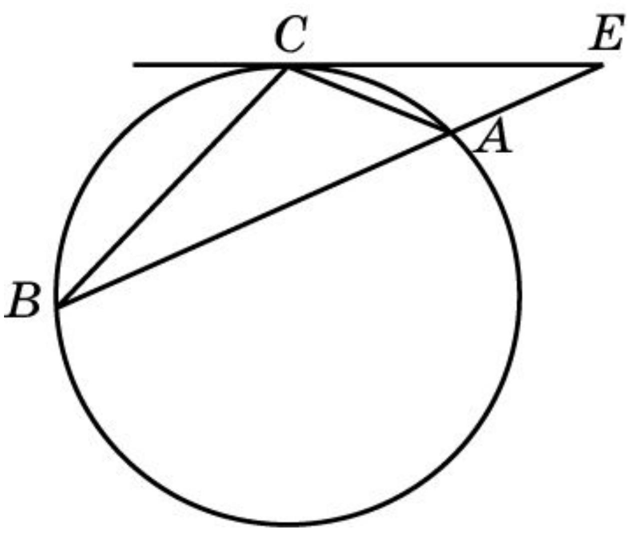
На рисунке $AE = 9$, $BE = 8$, $CE = 24$. Найдите DE.



Ответ: 27.

Упражнение 28

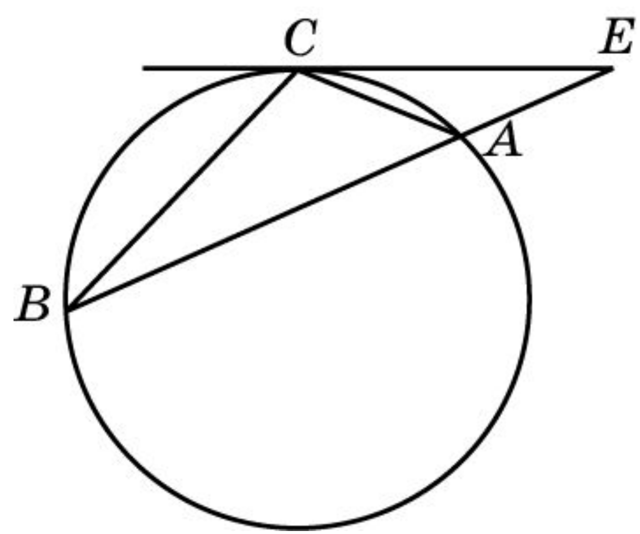
Через внешнюю точку E окружности проведены прямая, пересекающая окружность в точках A и B, и касательная EC (C – точка касания). Докажите, что треугольники EAC и ECB подобны.



Доказательство. У треугольников EAC и ECB угол E общий. Углы ACE и CBE равны, как углы, опирающиеся на одну хорду. Следовательно, треугольники EAC и ECB подобны.

Упражнение 29

Через внешнюю точку E окружности проведены прямая, пересекающая окружность в точках A и B, и касательная EC (C – точка касания). Докажите, что произведение отрезков AE и BE секущей равно квадрату отрезка CE касательной.



Доказательство. Треугольники EAC и ECB подобны. Следовательно, $AE{:}CE = CE{:}BE$, значит, $AE \cdot BE = CE^2$.

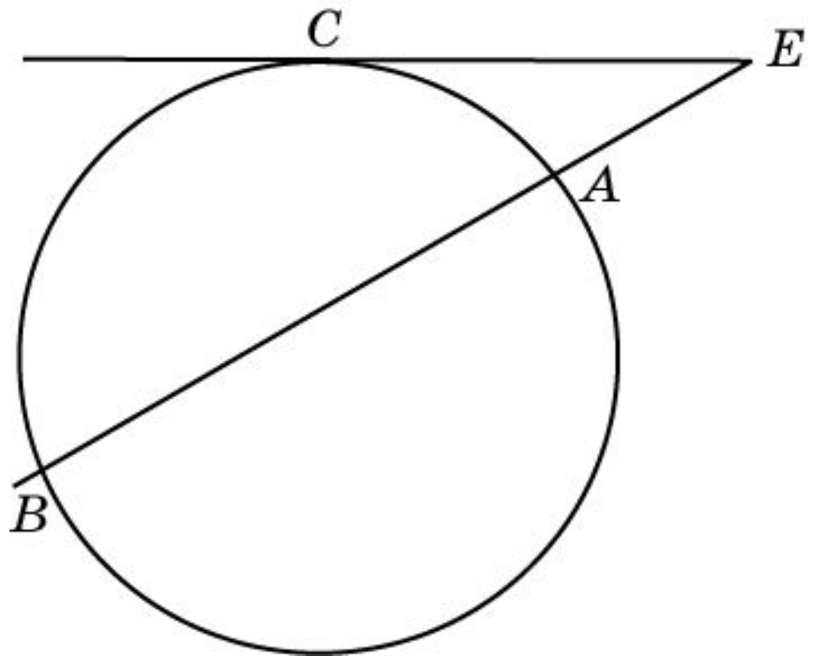
Упражнение 30

Радиус окружности равен 2. На продолжении радиуса взята точка *C*, отстоящая от центра *O* окружности на расстояние 3. Через точку *C* проведена прямая под углом 30^o к *OC*, пересекающая окружность в точках *A* и *B*. Найдите произведение отрезков *AC* и *BC*.

Ответ: 5.

Упражнение 31

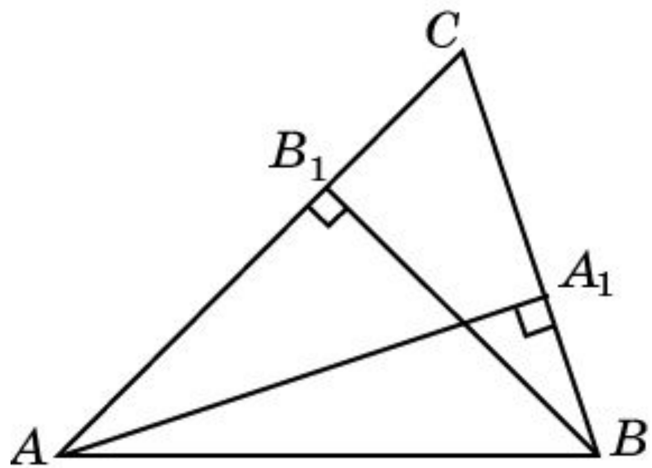
На рисунке $AE = 6$, $BE = 24$. Найдите CE.



Ответ: 12.

Упражнение 32

В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что треугольники A_1AC и B_1BC подобны.

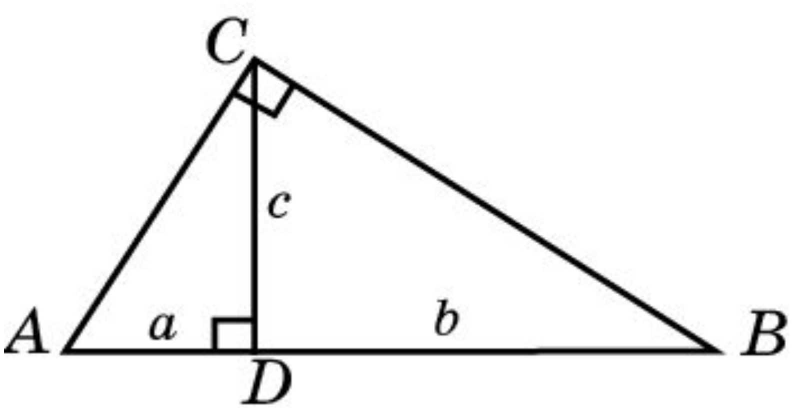


Доказательство. Треугольники A_1AC и B_1BC прямоугольные и имеют общий угол C. Следовательно, они подобны по двум углам.

Упражнение 33

Докажите, что в прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из прямого угла на гипотенузу, есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу.

(Средним геометрическим двух положительных чисел *a* и *b* называется положительное число *c*, квадрат которого равен *ab*, т.е. $c = \sqrt{a \cdot b}$).



Решение: Треугольники *ADC* и *CDB* подобны. Следовательно,

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$$

, или $CD^2 = AD \cdot BD$, т.е. *CD* является средним геометрическим *AD* и *BD*.