

%%%%%%%%%

%%**ЗАДАЧИ НА**%%

%%**ПРОЦЕНТЫ**%%

%%%%%%%%%

Грязева Г.С., учитель математики
МБОУ г.Мурманска гимназии №5

Задачи на смеси, сплавы, растворы

1. Имеются два сплава серебра с медью. Первый содержит 67% меди, а второй - 87% меди. В каком соотношении нужно взять эти два сплава, чтобы получить сплав, содержащий 79% меди?

Решение

сплавы	Масса сплава	Процентное содержание меди	Содержание меди
1 сплав	x	67%	$0,67x$
2 сплав	y	87%	$0,87y$
Новый сплав	$x+y$	79%	$0,67x+0,87y$ или $0,79(x+y)$

$$0,67x + 0,87y = 0,79(x + y)$$

$$0,08y = 0,12x$$

$$x:y = 0,08 : 0,12$$

$$x : y = 2 : 3.$$

Ответ: 2:3.

2. К 15 л 10%-ного раствора соли добавили 5%-ный раствор соли и получили 8%-ный раствор. Какое количество литров 5%-ного раствора добавили?

Решение

Растворы	Количество раствора	Процентное содержание соли	Содержание соли в растворе
10% раствор	15	15%	$15 \cdot 0,1 = 1,5$
5% раствор	x	5%	$0,05x$
Новый 8% раствор	$15+x$	8%	$(15+x) \cdot 0,08$ или $1,5+0,05x$

$$1,5 + 0,05x = 0,08(15 + x)$$

$$0,05x - 0,08x = 1,2 - 1,5$$

$$0,03x = 0,3$$

$$x = 10$$

Ответ: 10 литров 5% раствора добавили.

3. Имеются три слитка. Первый слиток имеет массу 5 кг, второй - 3 кг, и каждый из этих двух слитков содержит 30% меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56% меди, а если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 60% меди. Найдите массу третьего слитка и процент содержания меди в нем

Решение	Слитки	Масса слитка	Процентное содержание меди	Содержание меди
	1 слиток	5	30%	$5 \cdot 0,3 = 1,5$
	2 слиток	3	30%	$3 \cdot 0,3 = 0,9$
	3 слиток	x		y
	Сплавленный 1 и 3	$x+5$	56%	$0,56(x+5)$ или $1,5+y$
	Сплавленный 2 и 3	$x+3$	60%	$0,6(x+3)$ или $0,9+y$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1,5 + y = 0,56(x + 5) \\ 0,9 + y = 0,6(x + 3) \end{cases} \begin{cases} x = 10 \\ y = 6,9 \end{cases}$$

Процентное содержание меди в 3 слитке: $\frac{6,9}{10} \cdot 100 = 69\%$

Ответ: масса 3 слитка 10кг, процент содержания меди составляет 69%

4. Имеются два раствора кислоты разной концентрации. Объем одного раствора 4 л, другого - 6 л. Если их слить вместе, то получится 35%-й раствор кислоты. Если же слить равные объемы этих растворов, то получится 36%-й раствор кислоты. Сколько литров кислоты содержится в каждом из первоначальных растворов?

Растворы	Объем раствора	Процентное содержание кислоты	Объем кислоты
1 раствор	4		x
2 раствор	6		y
3 раствор	$4+6=10$	35%	$10 \cdot 0,35 = 3,5$ или $x+y$
4 раствор	$4+4=8$	36%	$8 \cdot 0,36 = 2,88$ или $x + \frac{4}{6}y = x + \frac{2}{3}y$

$$\begin{cases} x + y = 3,5 \\ x + \frac{2}{3}y = 2,88 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}y &= 0,62 \\ y &= 1,86 \end{aligned}$$

$$x = 3,5 - 1,86$$

$$x = 1,64$$

Ответ: 1,86л кислоты содержится во 2 растворе и 1,64л кислоты содержится в 1 растворе

Сложные проценты

The background features abstract, overlapping geometric shapes in various shades of green, ranging from light lime to dark forest green. These shapes are primarily located on the right side of the frame, creating a modern, layered effect. The text 'Сложные проценты' is centered in the white space on the left.

Сложные проценты – эффект часто встречающийся в экономике и финансах, когда проценты прибыли в конце каждого периода прибавляются к основной сумме и полученная величина в дальнейшем становится исходной для начисления новых процентов.

Вывод формулы вычисления сложных процентов:

B - будущая стоимость;

A - текущая стоимость;

P - процентная ставка за расчетный период

n - количество расчетных периодов.

$$\text{Для 1 периода: } B_1 = A + \frac{P}{100} \cdot A = A \left(1 + \frac{P}{100} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Для 2 периода: } B_2 &= A \left(1 + \frac{P}{100} \right) + A \left(1 + \frac{P}{100} \right) \cdot \frac{P}{100} = \\ &= A \left(1 + \frac{P}{100} \right) \left(1 + \frac{P}{100} \right) = A \left(1 + \frac{P}{100} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Для 3 периода: } B_3 = A \left(1 + \frac{P}{100} \right)^3$$

B - будущая стоимость;

A - текущая стоимость;

P - процентная ставка за расчетный период (день, месяц, год, ...);

n - количество расчетных периодов.

При увеличении:

$$\text{для } n\text{-ого периода: } B_n = A \left(1 + \frac{P}{100} \right)^n$$

При уменьшении:

$$\text{для } n\text{-ого периода: } B_n = A \left(1 - \frac{P}{100} \right)^n$$

Если величина **A** изменяется на первом этапе на $P_1\%$, на втором на $P_2\%$ и далее до $P_n\%$, то окончательное значение этой величины найдем по формуле

$$B_n = A \left(1 + \frac{P_1}{100} \right) \left(1 + \frac{P_2}{100} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{P_n}{100} \right)$$

1. Найти прибыль от 30000 рублей положенных на депозит на 3 года под 10% годовых, если в конце каждого года проценты добавлялись к депозитному вкладу.

$$B_3 = A \left(1 + \frac{P}{100} \right)^3$$

$$B_3 = 30000 \left(1 + \frac{10}{100} \right)^3 = 30000 \cdot 1,1^3 = 39930$$

$$39930 - 30000 = 9930 \text{ руб}$$

Ответ: 9930 руб. составляет прибыль

2. Численность населения в городе Т. В течение двух лет возрастала на 2% ежегодно. В результате число жителей возросло на 11312 человек. Сколько жителей было в городе Т. Первоначально?

$$B_2 = A \left(1 + \frac{P}{100} \right)^2$$

x - первоначальная численность населения

Численность населения стала: $x + 11312$ или $x \left(1 + \frac{2}{100} \right)^2$

$$x \left(1 + \frac{2}{100} \right)^2 = x + 11312$$

$$1,0404x = x + 11312$$

$$0,0404x = 11312$$

$$x = 280000$$

Ответ: численность населения была 280000 человек

3. В соответствии с договором фирма с целью компенсации потерь от инфляции была обязана в начале каждого квартала (3 месяца) повышать сотруднику зарплату на 2%. Однако в связи с финансовыми затруднениями она смогла повышать ему зарплату только раз в полгода (в начале следующего полугодия). На сколько % фирма должна повышать зарплату каждые полгода, чтобы первого января следующего года зарплата сотрудника была равна той, которую он получил бы в режиме повышения, предусмотренной договором?

Обозначим первоначальную зарплату за a

Через какое время повышается зарплата	Процент повышения	Новая зарплата через год
Через каждые 3 месяца (4 раза в год)	2%	$a(1 + 0,02)^4$
Через каждые полгода (2 раза в год)	$x\%$	$a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2$

$$B_4 = A\left(1 + \frac{P}{100}\right)^4$$

$$B_2 = A\left(1 + \frac{P}{100}\right)^2$$

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 = a(1 + 0,02)^4$$

$$(1 + 0,01x)^2 = 1,02^4$$

$$1 + 0,01x = 1,02^2$$

$$0,01x = 1,0404 - 1$$

$$0,01x = 0,0404$$

$$x = 4,04$$

Ответ: на 4,04% фирма должна повышать зарплату каждые полгода

4. На бирже ценных бумаг акции одной фирмы продавались по цене 400000 рублей. После непредвиденных осложнений фирма вынуждена была дважды понизить цену на свои акции на один и тот же процент. В результате акции начали продавать по цене 282240 рублей. Найдите процент уценки.

На $x\%$ дважды снижалась цена на акции

$$282240 = 400000 \left(1 - \frac{x}{100} \right)^2$$

$$0,7056 = (1 - 0,01x)^2$$

$$\sqrt{0,7056} = 1 - 0,01x, \text{ т.к. } 1 - 0,01x > 0$$

$$0,84 = 1 - 0,01x$$

$$x = 16$$

Ответ: на 16% дважды снижалась цена на акции

$$B_n = A \left(1 - \frac{P}{100} \right)^n$$

5. Первоначальная цена на некоторый товар была повышена на 44%, затем 2 раза понижалась на одинаковое число процентов. В результате окончательная цена товара оказалась на 19 % меньше первоначальной. На сколько процентов производилось 2-кратное снижение цены?

a - первоначальная цена товара

$a + 0,44a = 1,44a$ - цена товара после повышения на 44%

На $x\%$ дважды снижалась цена на товар $B_2 = A \left(1 - \frac{P}{100} \right)^2$

Цена товара после 2-кратного снижения цены на $x\%$ стала

$$1,44a \left(1 - \frac{x}{100} \right)^2 \quad \text{или} \quad a \cdot \frac{100 - 19}{100} = 0,81a$$

$$1,44a(1 - 0,01x)^2 = 0,81a \quad 1 - 0,01x = \frac{9}{12}$$

$$(1 - 0,01x)^2 = \frac{81}{144} \quad x = 25\%$$

Ответ: на 25% производилось 2-кратное снижение цены на товар

6. Магазин выставил на продажу шубу, назначив цену на 150% выше оптовой. В конце сезона цена была снижена на 20%, а на распродаже весной новая цена была снижена еще на 40% шуба была продана за 36000 рублей. Какую прибыль получил магазин?

x - оптовая цена на шубу

$x + 1,5x = 2,5x$ - цена на шубу в магазине в начале сезона

$$B_n = A \left(1 + \frac{P_1}{100} \right) \left(1 + \frac{P_2}{100} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{P_n}{100} \right)$$

Цена на шубу после 2-кратного снижения цены стала :

$$2,5x \left(1 - \frac{20}{100} \right) \left(1 - \frac{40}{100} \right) \quad \text{или} \quad 36000$$

$$2,5x(1 - 0,2)(1 - 0,4) = 36000$$

$$2,5x \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 36000$$

$$x = 30000$$

Ответ: прибыль составила $36000 - 30000 = 6000$ рублей

7. Первый банк дает 60% годовых, а второй- 40%. Вкладчик часть своих денег положил в первый банк, а остальные - во второй. Через 2 года суммарное число вложенных денег удвоилось. Какую долю своих денег положил вкладчик в первый банк?

х руб.- вкладчик положил в 1 банк под 60% годовых

у руб.- вкладчик положил во 2 банк под 40% годовых

в 1 банке стало $B_2 = x \left(1 + \frac{60}{100}\right)^2$ во 2 банке стало $B_2 = x \left(1 + \frac{40}{100}\right)^2$

Через 2 года у вкладчика денег стало: $x(1 + 0,4)^2 + y(1 + 0,6)^2$ или $2(x + y)$

$$x \cdot 1,4^2 + y \cdot 1,6^2 = 2x + 2y$$

$$2,56x + 1,96y = 2x + 2y$$

$$0,56x = 0,04y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{14}$$

Все деньги составляют 15 частей, значит в 1 банк было положено 1/15

8.31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Сергей переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами?

Обозначим 9 930 000 за a

x руб. - сумма ежегодного платежа.

В конце 1 года долг составил: $a(1 + 0,1) - x = 1,1a$

В конце 2 года долг составил: $1,1a - x + (1,1a - x) \cdot 0,1 - x =$

$$1,1a - x + (1,1a - x) \cdot 0,1 - x = 1,1a - x + 1,1a \cdot 0,1 - 0,1x - x = \\ = 1,1a(1 + 0,1) - 2,1x = 1,1^2 a - 2,1x$$

В конце 3 года долг составил: $1,1^2 a - 2,1x + (1,1^2 a - 2,1x) \cdot 0,1 - x =$

$$= 1,1^2 a - 2,1x + 1,1^2 a \cdot 0,1 - 0,21x - x = 1,1^3 a - 3,31x \text{ или } 0 \text{ рублей}$$

$$1,1^3 \cdot 9930000 - 3,31x = 0$$

$$13216830 - 3,31x = 0$$

$$3,31x = 13216830$$

$$x = 3993000$$

Ответ: ежегодная выплата составляет 3 993 000 рублей: