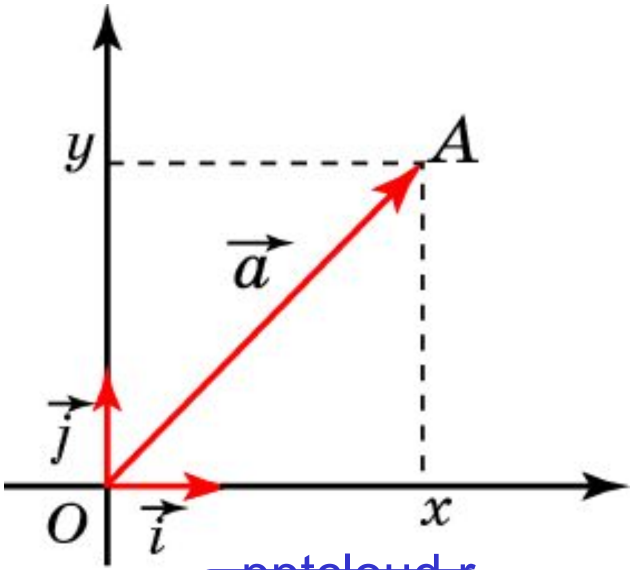
Координаты вектора

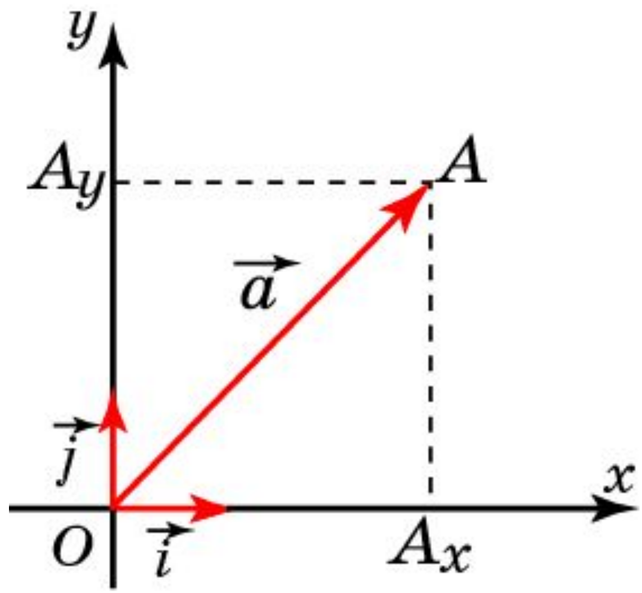
Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Определим понятие координат вектора. Для этого отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются координатами вектора.

Обозначим $\vec{i}$, $\vec{j}$ векторы с координатами (1, 0), (0, 1) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем рисовать эти векторы, отложенными от начала координат и называть их координатными векторами.



Теорема

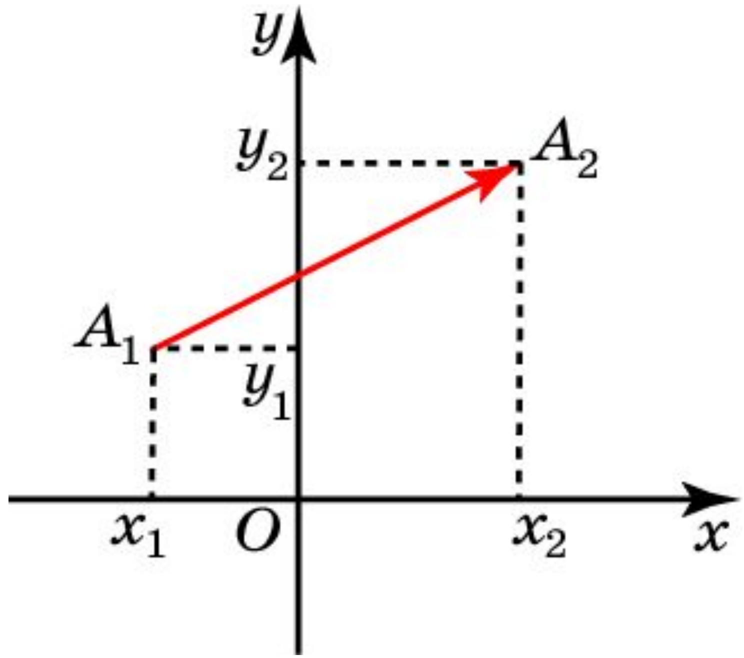
Теорема. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x, y) тогда и только тогда, когда он представим в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от начала координат, и его конец обозначим через A. Имеет место равенство $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y}$. Точка A имеет координаты (x, y) тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\overrightarrow{OA_x} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_y} = y\vec{j}$ и, значит, $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Пример

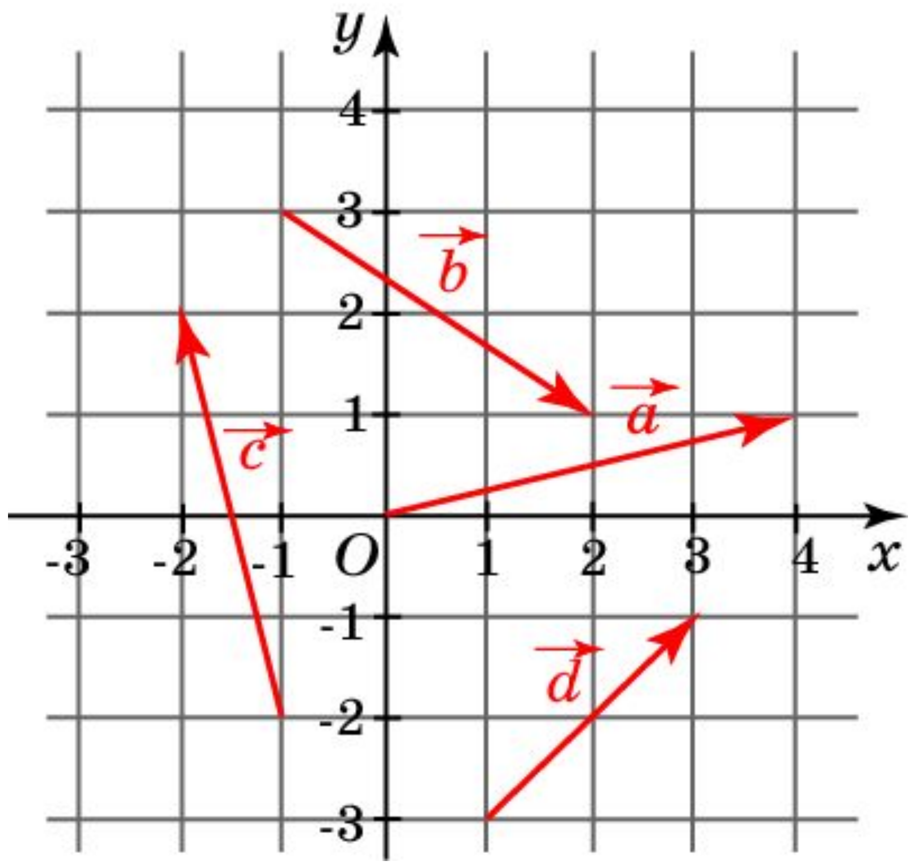
Найдите координаты и длину вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, если точки A_1, A_2 имеют координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2).



Решение: Вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ имеет координаты $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Его длина равна длине отрезка A_1A_2. Используя формулу длины отрезка, получаем $|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Упражнение 1

Найдите координаты векторов, изображенных на рисунке.



Ответ: (4, 1); (3, -2); (-1, 4); (2, 2).

Упражнение 2

Назовите координаты векторов:

а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j}$;

б) $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$;

в) $\vec{c} = -3\vec{j}$;

г) $\vec{d} = -5\vec{i}$.

Ответ: а) (–2, 6); б) (1, 3); в) (0, -3); г) (-5, 0).

Упражнение 3

Найдите координаты вектора $\overline{A_1A_2}$, если точки A_1, A_2 имеют координаты (-3, 5), (2, 3) соответственно.

Ответ: (5, -2).

Упражнение 4

Выразите длину вектора a через его координаты (x, y).

Ответ: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Упражнение 5

Найдите координаты точки N, если вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты (4, -3) и точка M – (1, -3).

Ответ: (5, -6).

Упражнение 6

Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) A (2, -6), B (-5, 3); б) A (1, 3), B (6, -5); в) A (-3, 1), B (5, 1).

Ответ: а) (-7, 9); б) (5, -8); в) (8, 0).

Упражнение 7

Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты (a, b). Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BA}$.

Ответ: (-a, -b).

Упражнение 8

Даны три точки $A(1, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(0, 1)$. Найдите такую точку $D(x, y)$, чтобы векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ были равны.

Ответ: (-2, 0).

Упражнение 9

Найдите координаты векторов $\vec{a}+b$ и $\vec{a}-b$, если a(1, 0), b(0, 3).

Ответ: (1, 3) и (1, -3).

Упражнение 10

Даны векторы a(-1, 2) и b(2, -4). Найдите координаты вектора:

а) $3\vec{a}+2\vec{b};$

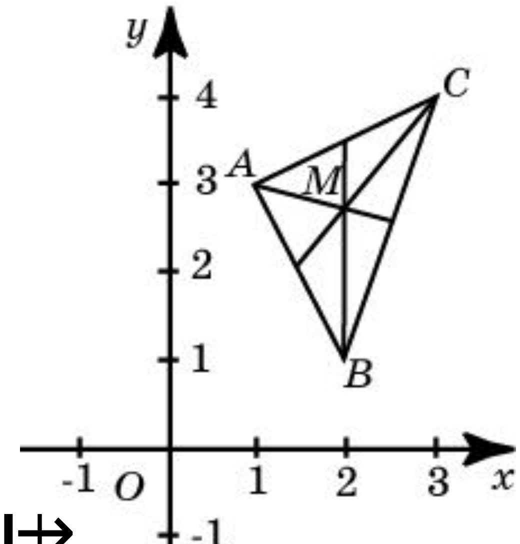
б) $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b};$

в) $-\vec{a}+5\vec{b}.$

Ответ: а) (1, -2); б) (-1, 2); в) (11, -22).

Упражнение 11

Вершины треугольника имеют координаты $A(1, 3)$, $B(2, 1)$ и $C(3, 4)$. Найдите координаты точки M пересечения медиан.



Решение: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. $\overrightarrow{AB}(1,-1)$, $\overrightarrow{AC}(2,2)$.

Следовательно, $\overrightarrow{AM}$ имеет координаты $(1, \frac{1}{3})$.

Точка M имеет координаты $(2, 2\frac{2}{3})$.