Задачи по теории вероятностей.
Теорема сложения и умножения вероятностей

Теоремы сложения и умножения для двух событий

- 1) P(A + B) = P(A) + P(B) (A,B - несовместны)
- 2) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$
- 3) P(AB) = P(A)· P(B), (A,B- независимы)
- 4) P(AB) = P(A)· P(B | A)

История о находчивом майоре

- В городе объявлен розыск четверых особо опасных преступников, ограбивших банк. Чтобы предотвратить утечку информации при передаче в Центр сообщений о ходе розыска, майор Зимин придумал такой способ. Он зашифровал первыми буквами алфавита следующие события:
- Событие Р- обнаружен преступник Рыков;
- Событие У - обнаружен преступник Угрюмов;
- Событие Ф - обнаружен преступник Фомкин;
- Событие Т - обнаружен преступник Тимошкин.
- Вскоре в центр пришли следующие сообщения:
- 1) У+Ф, 2)УТ, 3) $\overline{\Phi}\ \overline{P}$,4) $\overline{\Phi P}$ 5)УТ(Ф+Р), 6)УТФ $\overline{P}$,7)УТФР

История о находчивом майоре

- Зашифруйте следующие донесения
- а) взят только один из четырех, $P\overline{T}\,\overline{У}\,\overline{Ф} + \overline{P}T\overline{У}\,\overline{Ф} + \overline{P}\,\overline{T}У\overline{Ф} + \overline{P}\,\overline{T}\,\overline{У}Ф$
- б) взят по крайней мере один, $\overline{\overline{P}\,\overline{T}\,\overline{У}\,\overline{Ф}} = P + T + У + Ф$
- в) взяли не менее двух, $PT + PУ + PФ + TУ + TФ + УФ$
- г) взяли только двоих, $PT\overline{У}\,\overline{Ф} + P\overline{T}У\overline{Ф} + P\overline{T}\,\overline{У}Ф + \overline{P}TУ\overline{Ф} + \overline{P}T\overline{У}Ф + \overline{P}\,\overline{T}УФ$
- д) взяли только троих, $PTУ\overline{Ф} + PT\overline{У}Ф + P\overline{T}УФ + \overline{P}TУФ$
- е) ни один не обнаружен. $\overline{P}\,\overline{T}\,\overline{У}\,\overline{Ф}$

История одной сессии

- В сессию студент должен был сдать два экзамена и один зачет. Событие А состоит в том, что студент сдал экзамен по английскому языку, событие В – он сдал экзамен по философии, С – получил зачет по математике. P(A)=0,5; P(B)=0,4; P(C)=0,7.
- Найти вероятность того, что
- 1) студент не получил зачета; $1-P(C)=1-0{,}7=0{,}3$
- 2) сдал два экзамена; $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0{,}5\cdot 0{,}4=0{,}2$
- 3) сдал по крайней мере один экзамен; $1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-0{,}5\cdot 0{,}6=0{,}7$
- 4) получил зачет, но не сдал
- ни одного экзамена; $P(\overline{A}\,\overline{B}C)=0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7=0{,}21$
- 5) сдал только один экзамен
- и не получил зачета; $P((A\overline{B}+\overline{A}B)\overline{C})=(0{,}5\cdot 0{,}6+0{,}5\cdot 0{,}4)\cdot 0{,}3=0{,}15$
- 6) не сдал ничего; $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3=0{,}09$
- 7) сдал все $P(ABC)=0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}7=0{,}14$

Задача

- **1.Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8, а для второго – 0,6. Стрелки независимо друг от друга сделают по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один из стрелков?**
- Решение:
- Авторское решение
- А – попадание первого стрелка,
- В – попадание второго стрелка,
- С – попадание хотя бы одного из стрелков.
- Тогда, очевидно С = А + В, причем события А и В совместны. Следовательно,
- p(С) = p(А) + p(В) – p(АВ).
- Так как события А и В независимы, то
- p(С) = p(А) + p(В) – p(А) p(В)= 0,8 + 0,6 – 0,8 · 0,6 = 0,92.
- Другое решение
- p(C)=1-p($\overline{A}\,\overline{B}$)=1-0,2*0,4=1-0,08=0,92

Задача

- **2. В команде из 12 спортсменов 5 мастеров спорта. По жеребьевке из команды выбирают 3 спортсменов. Какова вероятность того, что все выбранные спортсмены являются мастерами спорта?**

- Решение
- 1) $p(A) = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{22}$
- 2) p(A) = p(A1) p(A2/A1)*
*p(A3/A1A2) =

$$= \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}$$

Задача

- 3. Монета брошена три раза. Найдите вероятность того, что герб выпадет ровно два раза.
- Решение:
- A_i – выпадение герба при i-м бросании монеты (i = 1, 2, 3), A – выпадение 2 гербов при 3 бросаниях монеты.
- $A = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3$.
- $p(A) = p(A_1)\, p(A_2)\, p(\overline{A_3}) + p(A_1)\, p(\overline{A_2})\, p(A_3) +$
- $+\, p(\overline{A_1})\, p(A_2)\, p(A_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

Задача

- **4** В урне n белых и n черных шаров. Все шары из урны извлекаются парами, причем вынутые шары обратно не возвращаются. Какова вероятность того, что все пары будут состоять из разноцветных шаров?
- **Решение:**
- Пусть A_k (k=1,2,...,n) обозначает, что k-я пара состоит из разноцветных шаров. Тогда вероятность события
- $A= A_1A_2... A_n$ равна
- $p(A) = p(A_1)\, p(A_2/A_1) \ldots p(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}) =$
- $= \dfrac{n^2}{C_{2n}^2} \cdot \dfrac{(n-1)^2}{C_{2n-2}^2} \cdot \dfrac{(n-2)^2}{C_{2n-4}^2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{4}{C_4^2} \cdot \dfrac{1}{C_2^2} = \dfrac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$