


**Задачи по теории
вероятностей.**

**Теорема сложения и
умножения вероятностей**



Теоремы сложения и умножения для двух событий

- 1) $P(A + B) = P(A) + P(B)$ (A, B - несовместны)
- 2) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$
- 3) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, (A, B - независимы)
- 4) $P(AB) = P(A) \cdot P(B | A)$

История о находчивом майоре

- В городе объявлен розыск четверых особо опасных преступников, ограбивших банк. Чтобы предотвратить утечку информации при передаче в Центр сообщений о ходе розыска, майор Зимин придумал такой способ. Он зашифровал первыми буквами алфавита следующие события:
- Событие Р- обнаружен преступник Рыков;
- Событие У - обнаружен преступник Угрюмов;
- Событие Ф - обнаружен преступник Фомкин;
- Событие Т - обнаружен преступник Тимошкин.
- Вскоре в центр пришли следующие сообщения:
- 1) У+Ф, 2) УТ, 3) $\overline{\Phi} \overline{P}$,4) $\overline{\Phi P}$ 5) УТ(Ф+Р), 6) УТФ \overline{P} ,7) УТФР

История о находчивом майоре

□ Зашифруйте следующие донесения

□ а) взят только один из четырех,

$$P\bar{T}\bar{Y}\bar{\Phi} + \bar{P}T\bar{Y}\bar{\Phi} + \bar{P}\bar{T}Y\bar{\Phi} + \bar{P}\bar{T}\bar{Y}\Phi$$

□ б) взят по крайней мере один,

$$\overline{P\bar{T}\bar{Y}\bar{\Phi}} = P + T + Y + \Phi$$

□ в) взяли не менее двух,

$$PT + PY + P\Phi + TY + T\Phi + Y\Phi$$

□ г) взяли только двоих, $P\bar{T}\bar{Y}\bar{\Phi} + \bar{P}T\bar{Y}\bar{\Phi} + \bar{P}\bar{T}Y\bar{\Phi} + \bar{P}\bar{T}\bar{Y}\Phi + \bar{P}\bar{T}\bar{Y}\Phi + \bar{P}\bar{T}\bar{Y}\Phi$

□ д) взяли только троих,

$$P\bar{T}\bar{Y}\bar{\Phi} + \bar{P}T\bar{Y}\bar{\Phi} + \bar{P}\bar{T}Y\bar{\Phi} + \bar{P}\bar{T}\bar{Y}\Phi$$

□ е) ни один не обнаружен.

$$P\bar{T}\bar{Y}\bar{\Phi}$$

История одной сессии



- В сессию студент должен был сдать два экзамена и один зачет. Событие A состоит в том, что студент сдал экзамен по английскому языку, событие B - он сдал экзамен по философии, C - получил зачет по математике. $P(A)=0,5$; $P(B)=0,4$; $P(C)=0,7$.

- Найти вероятность того, что

- 1) студент не получил зачета;

$$1 - P(C) = 1 - 0,7 = 0,3$$

- 2) сдал два экзамена;

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$$

- 3) сдал по крайней мере один экзамен;

$$1 - P(\overline{AB}) = 1 - 0,5 \cdot 0,6 = 0,7$$

- 4) получил зачет, но не сдал

$$P(\overline{ABC}) = 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,7 = 0,21$$

- ни одного экзамена;

- 5) сдал только один экзамен

- и не получил зачета;

$$P((\overline{AB} + \overline{AB})\overline{C}) = (0,5 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,4) \cdot 0,3 = 0,15$$

- 6) не сдал ничего;

$$P(\overline{ABC}) = 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,3 = 0,09$$

- 7) сдал все

$$P(ABC) = 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,7 = 0,14$$



Задача

- 1. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8, а для второго – 0,6. Стрелки независимо друг от друга сделают по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один из стрелков?

Решение:

Авторское решение

A – попадание первого стрелка,

B – попадание второго стрелка,

C – попадание хотя бы одного из стрелков.

Тогда, очевидно $C = A + B$, причем события A и B совместны.

Следовательно,

$p(C) = p(A) + p(B) - p(AB)$.

Так как события A и B независимы, то

$p(C) = p(A) + p(B) - p(A) p(B) = 0,8 + 0,6 - 0,8 \cdot 0,6 = 0,92$.

Другое решение

$p(C) = 1 - p(\overline{AB}) = 1 - 0,2 \cdot 0,4 = 1 - 0,08 = 0,92$

Задача

- **2. В команде из 12 спортсменов 5 мастеров спорта. По жеребьевке из команды выбирают 3 спортсменов. Какова вероятность того, что все выбранные спортсмены являются мастерами спорта?**

- Решение

- 1)
$$p(A) = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{22}$$

- 2)
$$p(A) = p(A_1) p(A_2/A_1) * p(A_3/A_1A_2) =$$

$$= \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}$$

Задача

- 3. Монета брошена три раза. Найдите вероятность того, что герб выпадет ровно два раза.
- Решение:
- A_i – выпадение герба при i -м бросании монеты ($i = 1, 2, 3$), A – выпадение 2 гербов при 3 бросаниях монеты.
- $A = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3.$
- $p(A) = p(A_1) p(A_2) p(\overline{A_3}) + p(A_1) p(\overline{A_2}) p(A_3) +$
- $+ p(\overline{A_1}) p(A_2) p(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

Задача

- **4** В урне n белых и n черных шаров. Все шары из урны извлекаются парами, причем вынутые шары обратно не возвращаются. Какова вероятность того, что все пары будут состоять из разноцветных шаров?

- **Решение:**

- Пусть A_k ($k=1,2,\dots,n$) обозначает, что k -я пара состоит из разноцветных шаров. Тогда вероятность события

- $A = A_1 A_2 \dots A_n$ равна

- $p(A) = p(A_1) p(A_2/A_1) \dots p(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1}) =$

- $$= \frac{n^2}{C_{2n}^2} \cdot \frac{(n-1)^2}{C_{2n-2}^2} \cdot \frac{(n-2)^2}{C_{2n-4}^2} \dots \frac{4}{C_4^2} \cdot \frac{1}{C_2^2} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$$