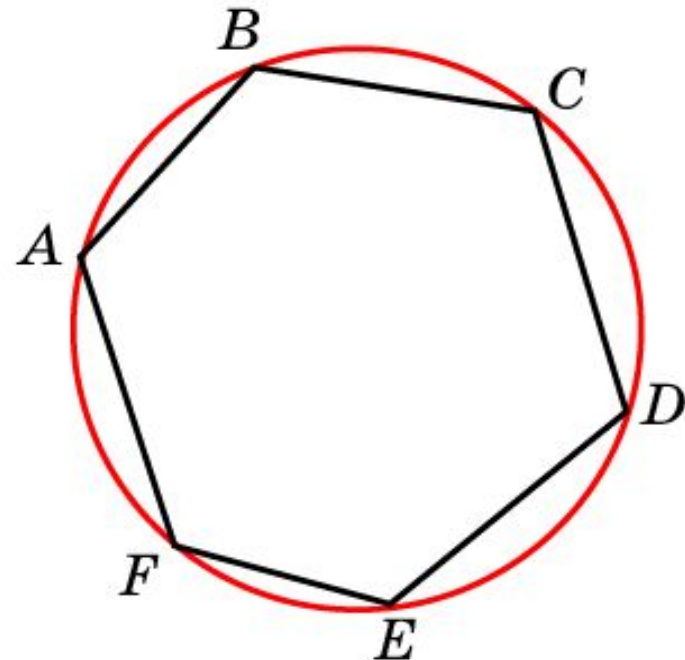
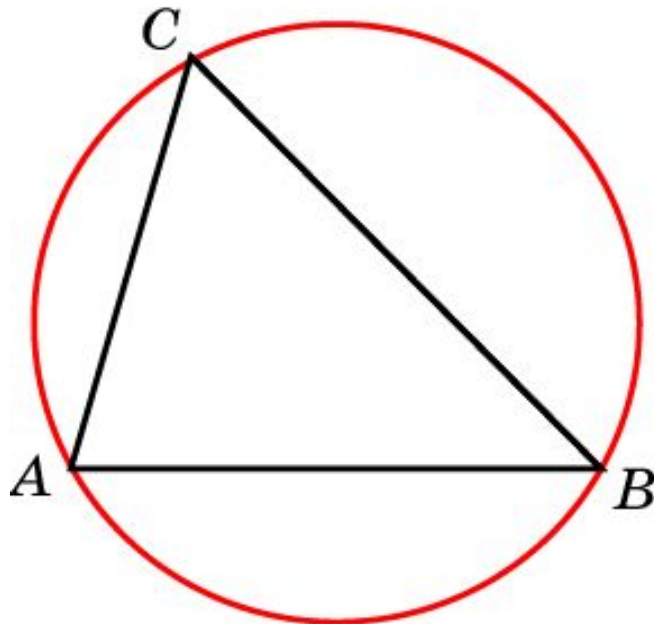


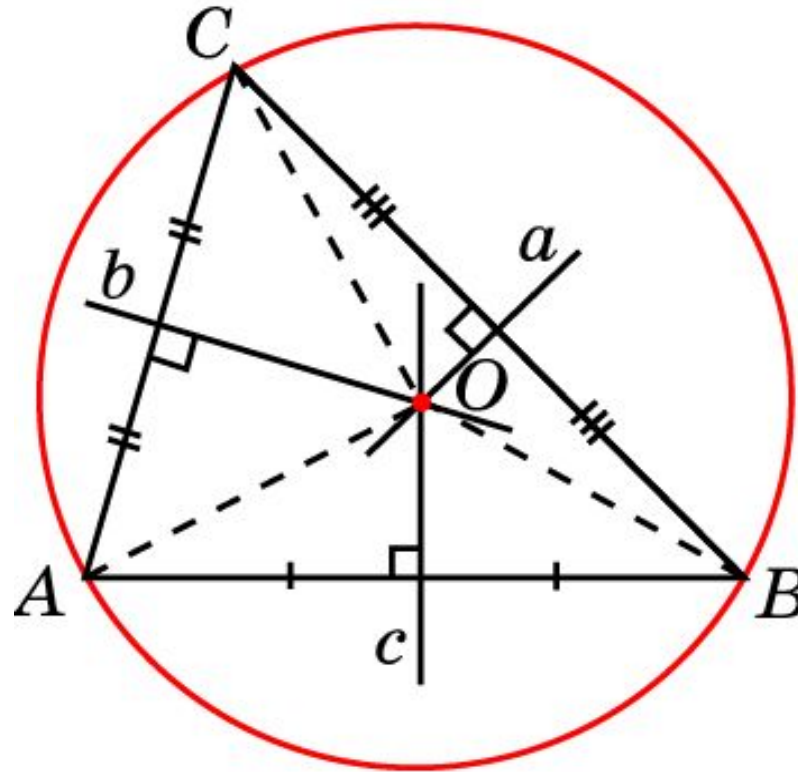
Многоугольники, вписанные в окружность

Многоугольник называется **вписанным** в окружность, если все его вершины принадлежат окружности. Окружность при этом называется **описанной** около многоугольника.



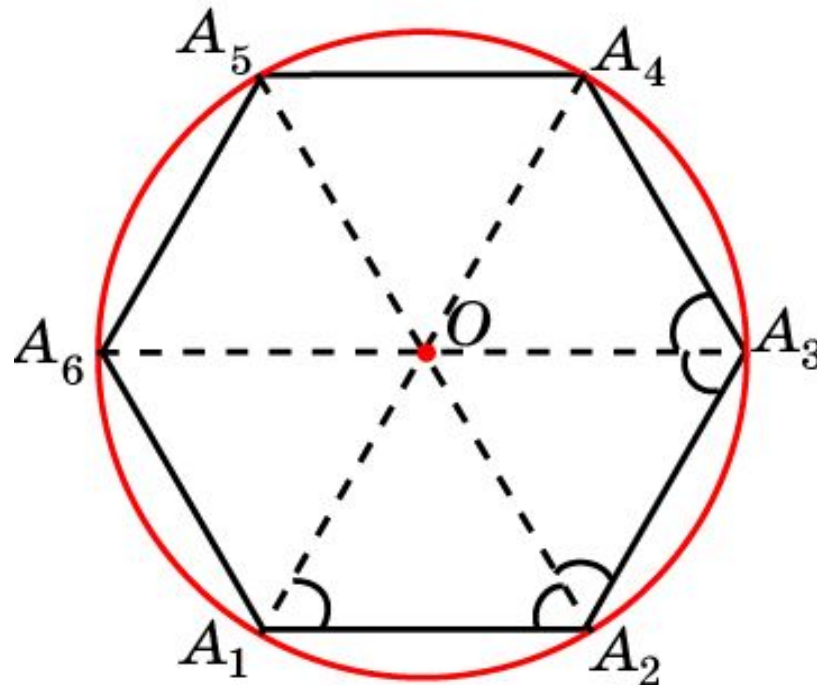
Теорема 1

Около всякого треугольника можно описать окружность. Ее центр является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.



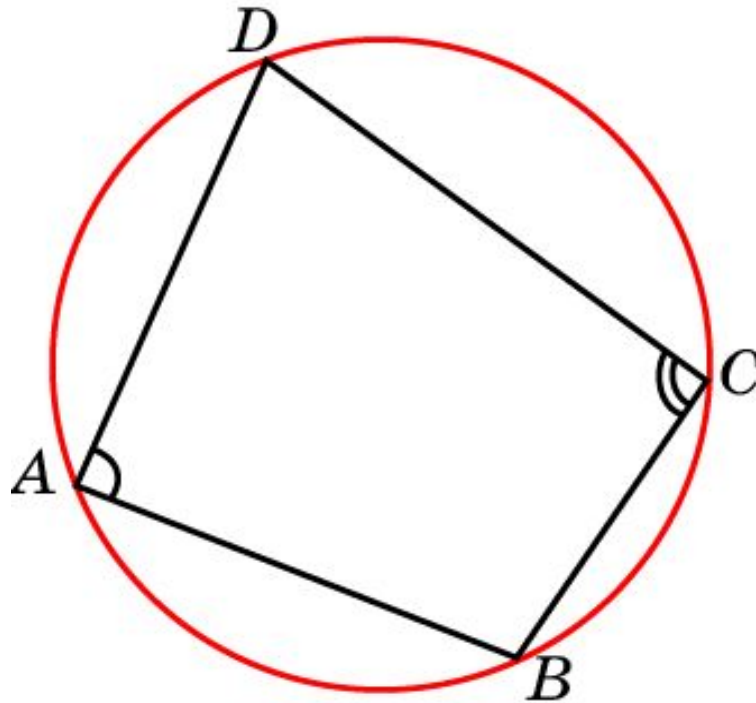
Теорема 2

Около любого правильного многоугольника можно описать окружность.



Теорема 3

Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180° .



Вопрос 1

Какой многоугольник называется вписанным в окружность?

Ответ: Многоугольник называется вписанным в окружность, если все его вершины принадлежат окружности.

Вопрос 2

Какая окружность называется описанной около многоугольника?

Ответ: Окружность называется описанной около многоугольника, если ей принадлежат все вершины этого многоугольника.

Вопрос 3

Около всякого ли треугольника можно описать окружность?

Ответ: Да.

Вопрос 4

Где находится центр описанной около треугольника окружности?

Ответ: Центром описанной окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

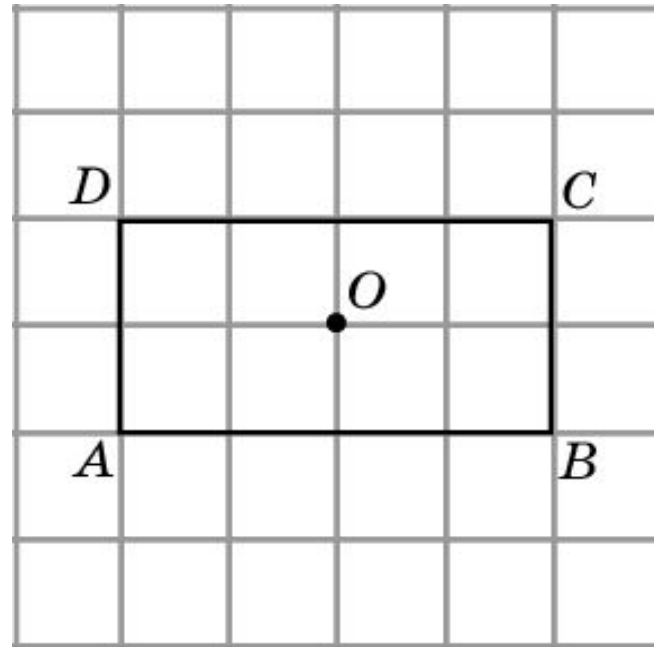
Вопрос 5

Можно ли описать окружность около правильного многоугольника?

Ответ: Да.

Упражнение 1

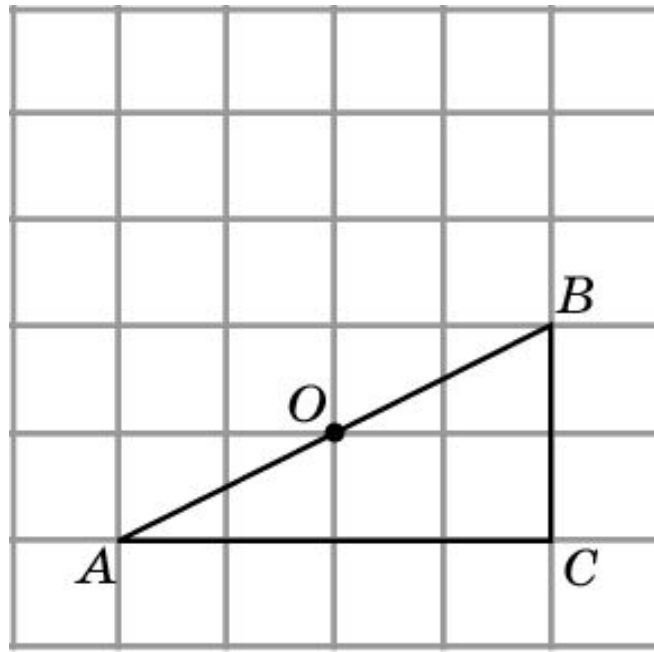
Укажите центр окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$.



Ответ:

Упражнение 2

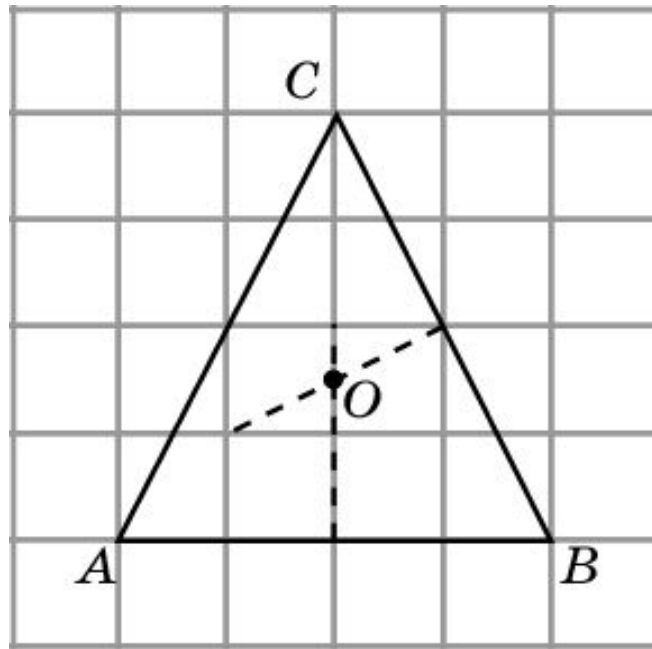
Укажите центр окружности, описанной около треугольника ABC .



Ответ:

Упражнение 3

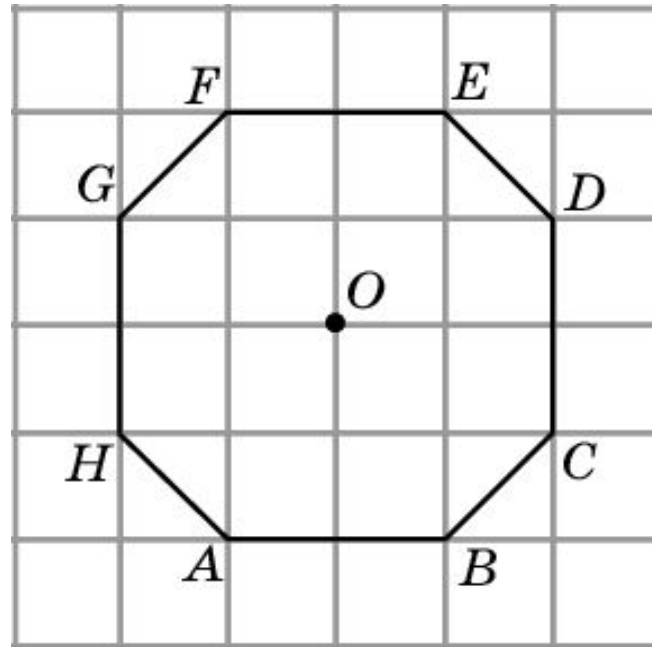
Укажите центр окружности, описанной около треугольника ABC .



Ответ:

Упражнение 4

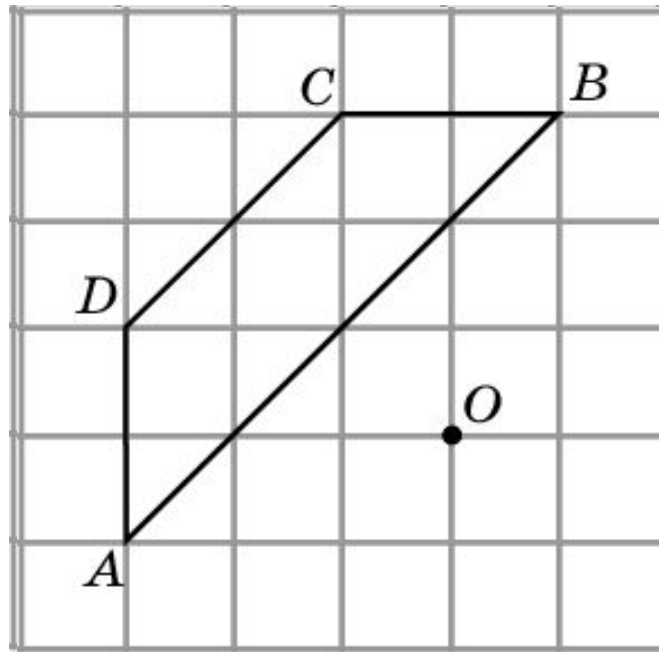
Укажите центр окружности, описанной около многоугольника $ABCDEFGH$.



Ответ:

Упражнение 5

Укажите центр окружности, описанной около трапеции $ABCD$.



Ответ:

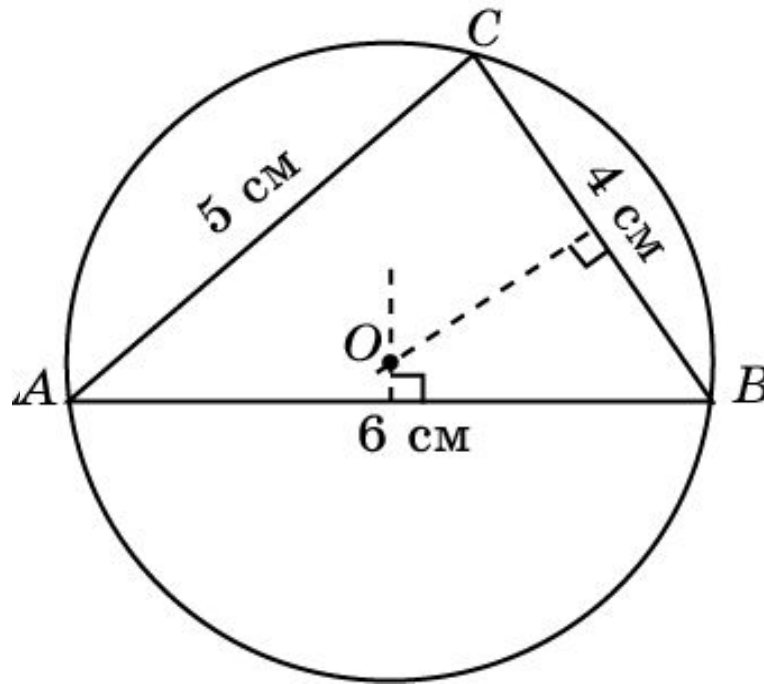
Упражнение 6

Может ли центр описанной около треугольника окружности находиться: а) внутри треугольника; б) на стороне треугольника; в) вне этого треугольника?

Ответ: а) Да;
б) да;
в) да.

Упражнение 7

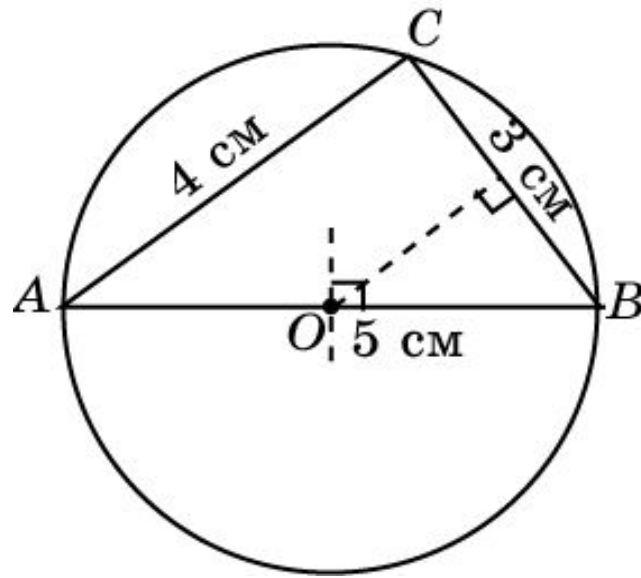
С помощью циркуля и линейки постройте окружность, описанную около треугольника со сторонами 4 см, 5 см, 6 см.



Решение. Центром описанной окружности будет точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Упражнение 8

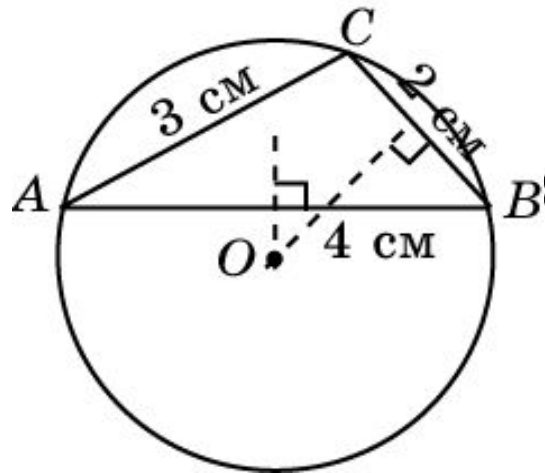
С помощью циркуля и линейки постройте окружность, описанную около треугольника со сторонами 3 см, 4 см, 5 см.



Решение. Центром описанной окружности будет точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Упражнение 9

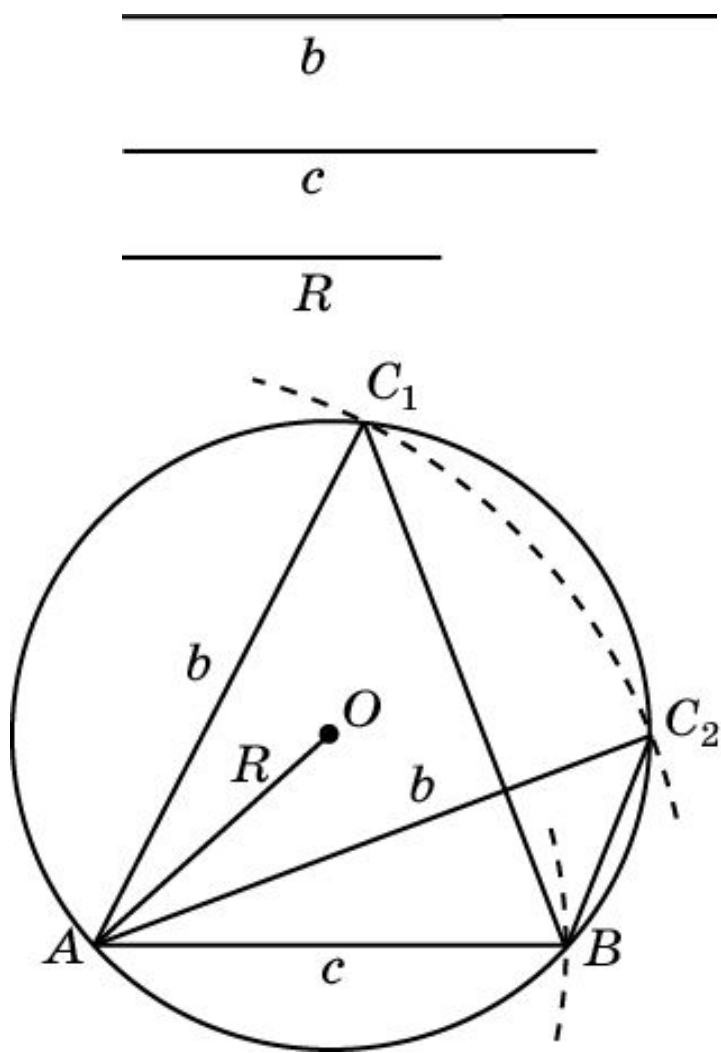
С помощью циркуля и линейки постройте окружность, описанную около треугольника со сторонами 2 см, 3 см, 4 см.



Решение. Центром описанной окружности будет точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Упражнение 10

Постройте треугольник ABC по двум данным сторонам $AB = c$, $AC = b$ и радиусу R описанной окружности.

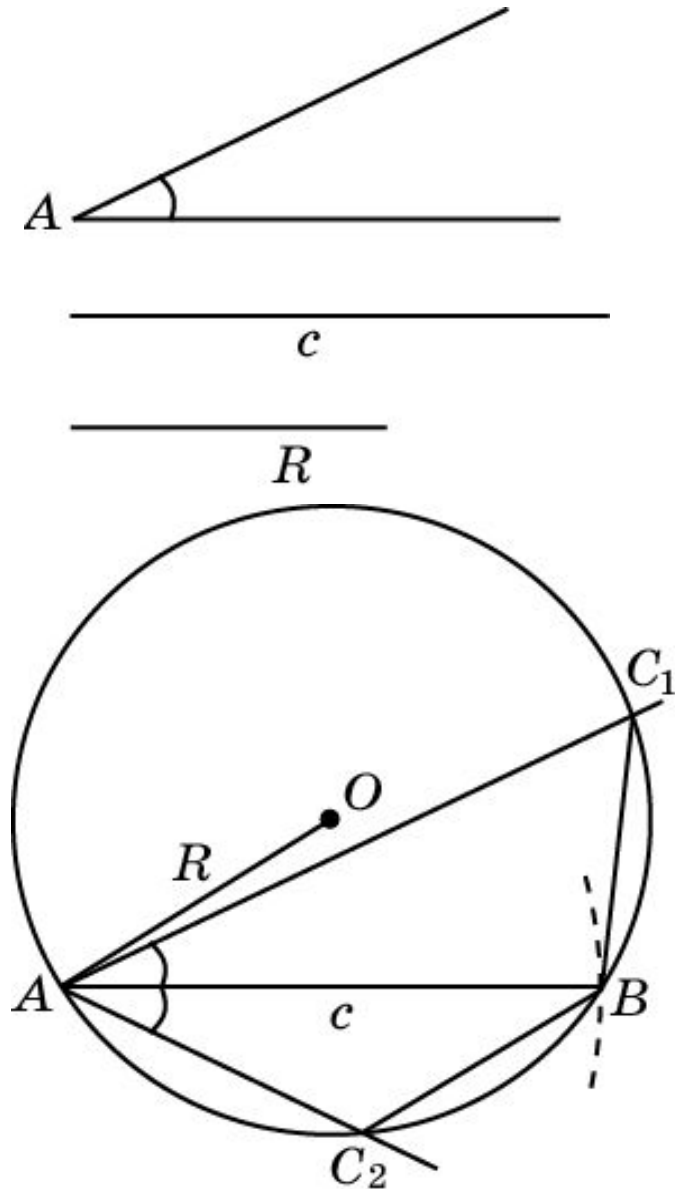


Решение: Проведем окружность радиуса R . С центром в точке A этой окружности и радиусом c проведем дугу окружности. Обозначим B ее точку пересечения с проведенной окружностью. Проведем отрезок AB . С центром в точке A проведем дугу окружности радиуса b . Обозначим C_1 , C_2 ее точки пересечения с проведенной окружностью. Соединим их отрезками с точками A и B . Треугольники ABC_1 и ABC_2 будут искомыми.

Упражнение 11

Постройте треугольник ABC по данным стороне $AB = c$, углу A и радиусу R описанной окружности.

Решение: Проведем окружность радиуса R . С центром в точке A этой окружности и радиусом c проведем дугу окружности. Обозначим B ее точку пересечения с проведенной окружностью. Проведем отрезок AB . От луча AB отложим углы, равные углу A . Обозначим C_1, C_2 точки пересечения их лучей с проведенной окружностью. Соединим их отрезками с точками A и B . Треугольники ABC_1 и ABC_2 будут искомыми.



Упражнение 12

Всегда ли можно ли описать окружность около:

- а) прямоугольника; б) параллелограмма; в) ромба;
г) квадрата; д) равнобедренной трапеции; е)
прямоугольной трапеции?

Ответ: а) Да;
б) нет;
в) нет;
г) да;
д) да;
е) нет.

Упражнение 13

Можно ли описать окружность около четырехугольника, углы которого последовательно равны: а) 70° , 130° , 110° , 50° ; б) 90° , 90° , 60° , 120° ; в) 45° , 75° , 135° , 105° ; г) 40° , 125° , 55° , 140° ?

Ответ: а) Да;
б) нет;
в) да;
г) нет.

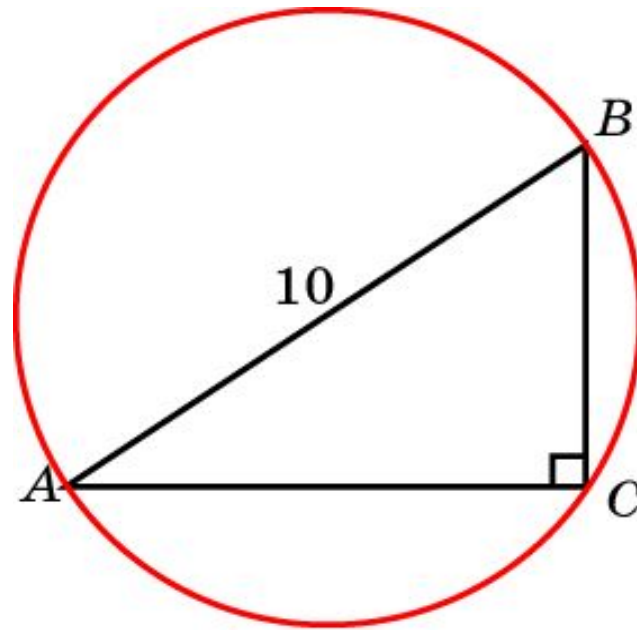
Упражнение 14

Где находится центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника?

Ответ: В середине гипотенузы.

Упражнение 15

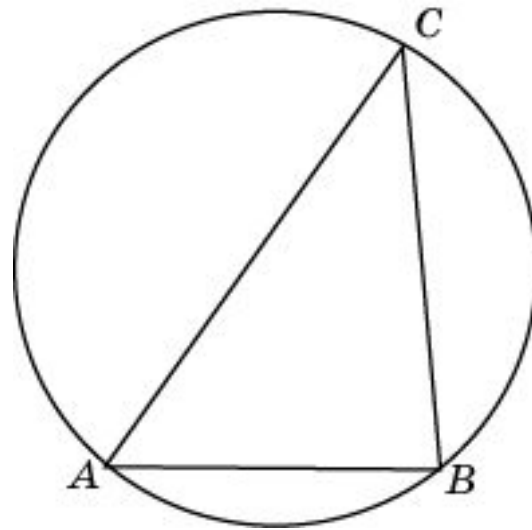
Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см. Найдите радиус описанной окружности.



Ответ: 5 см.

Упражнение 16

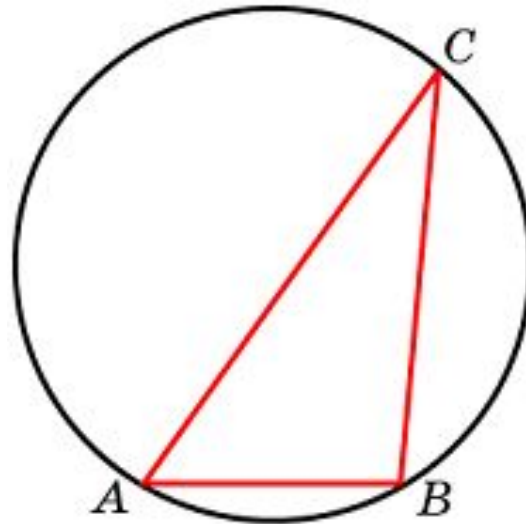
Сторона AB треугольника ABC равна 1. Противлежащий ей угол C равен 30° . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



Ответ: 1.

Упражнение 17

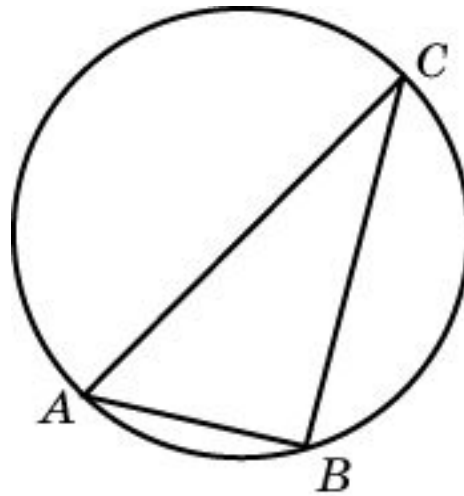
Одна сторона треугольника равна радиусу описанной окружности. Найдите угол треугольника, противолежащий этой стороне.



Ответ: 30° .

Упражнение 18

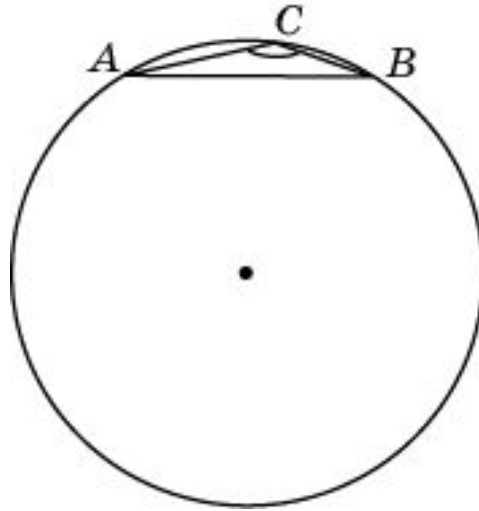
Угол C треугольника ABC , вписанного в окружность радиуса 3, равен 30° . Найдите сторону AB этого треугольника, противолежащую данному углу.



Ответ: 3.

Упражнение 19

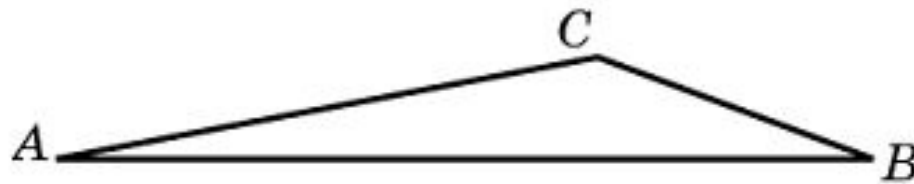
Сторона AB треугольника ABC равна 1. Противлежащий ей угол C равен 120° . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



Ответ: 1.

Упражнение 20

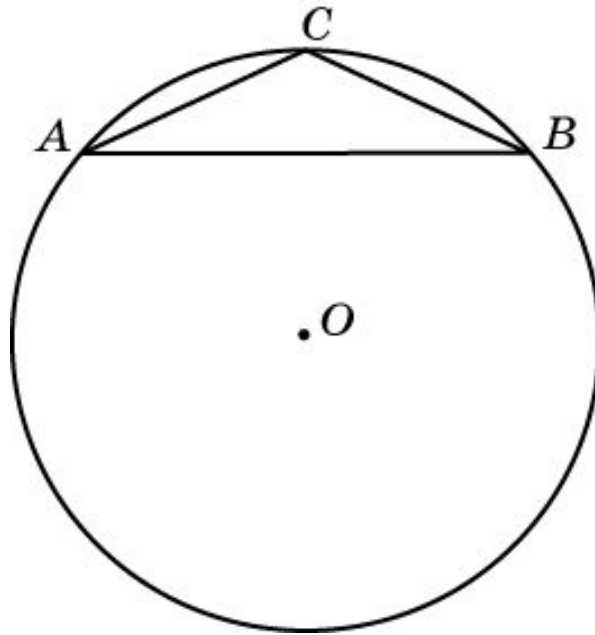
Сторона AB тупоугольного треугольника ABC равна радиусу описанной около него окружности. Найдите угол C .



Ответ: 150° .

Упражнение 21

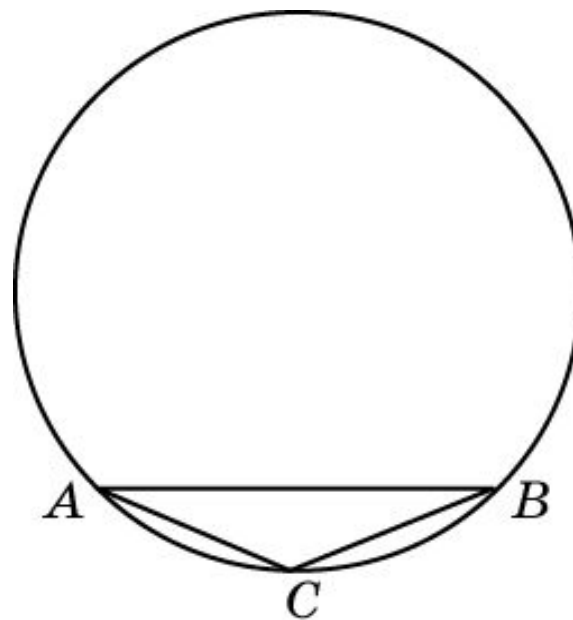
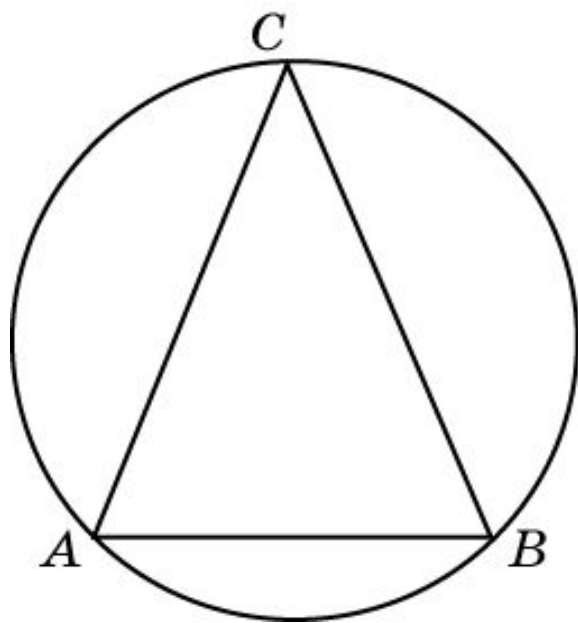
Найдите углы вписанного в окружность равнобедренного треугольника, боковая сторона которого стягивает дугу в $24^{\circ}51'$.



Ответ: $12^{\circ}25'30''$, $12^{\circ}25'30''$, $155^{\circ}9'$.

Упражнение 22

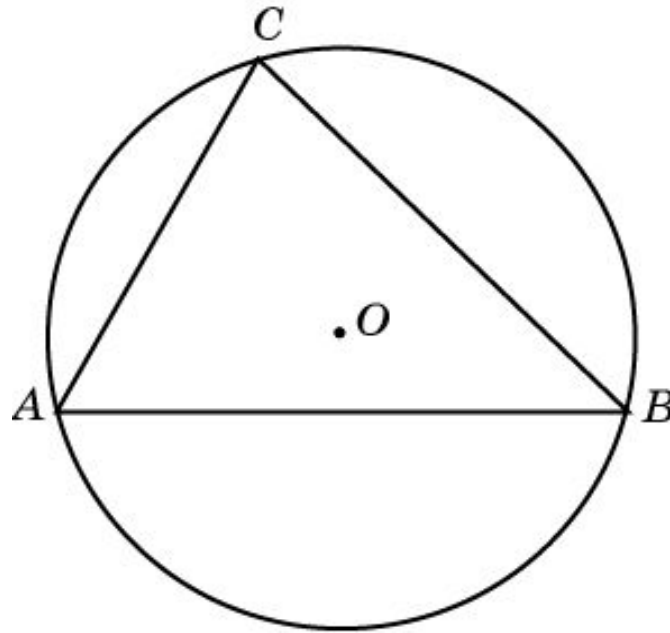
Найдите углы вписанного в окружность равнобедренного треугольника, если его основание стягивает дугу в 100° .



Ответ: $50^\circ, 65^\circ, 65^\circ$ или $25^\circ 30', 25^\circ 30', 130^\circ$.

Упражнение 23

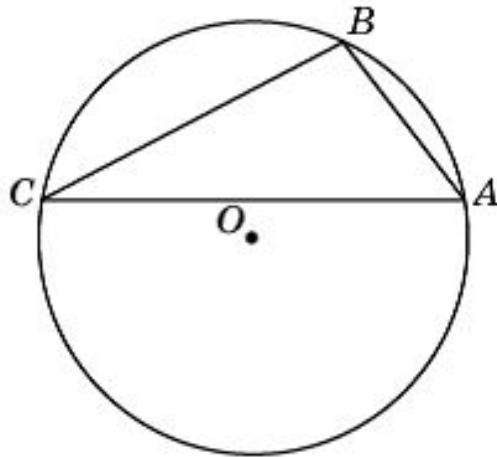
Два угла треугольника равны 60° и 40° . Под какими углами видны его стороны из центра описанной около него окружности?



Ответ: 120° , 80° и 160° .

Упражнение 24

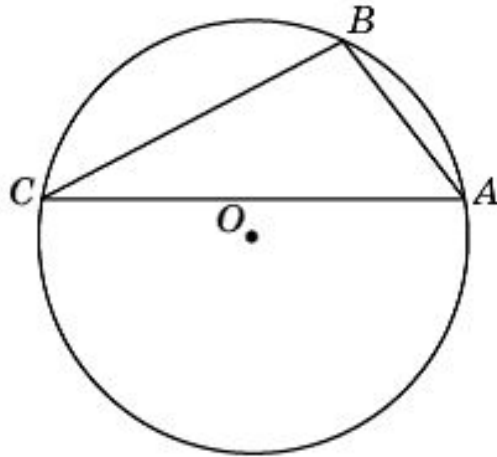
Точки A , B , C , расположенные на окружности, делят ее на три дуги, градусные величины которых относятся как $1 : 3 : 5$. Найдите больший угол треугольника ABC .



Ответ: 100° .

Упражнение 25

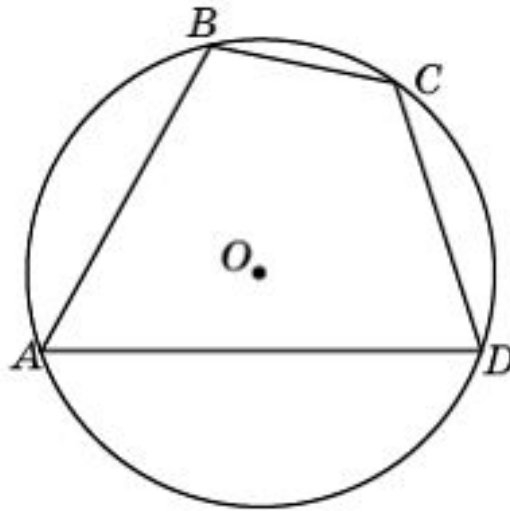
Точки A , B , C , расположенные на окружности, делят эту окружность на три дуги, градусные величины которых относятся как $2 : 3 : 7$.
Найдите углы треугольника ABC .



Ответ: 30° , 45° и 105° .

Упражнение 26

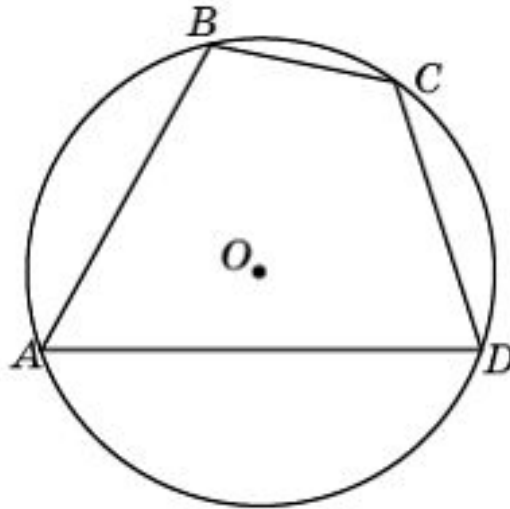
Угол A четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 58° . Найдите угол C этого четырехугольника.



Ответ: 122° .

Упражнение 27

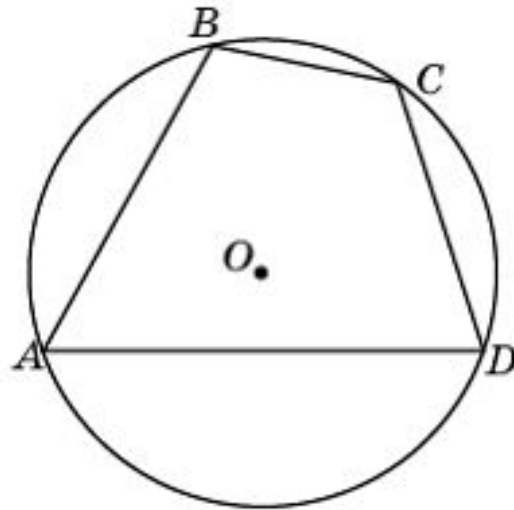
Стороны четырехугольника $ABCD$ стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно 95° , 49° , 71° , 145° . Найдите угол B этого четырехугольника.



Ответ: 108° .

Упражнение 28

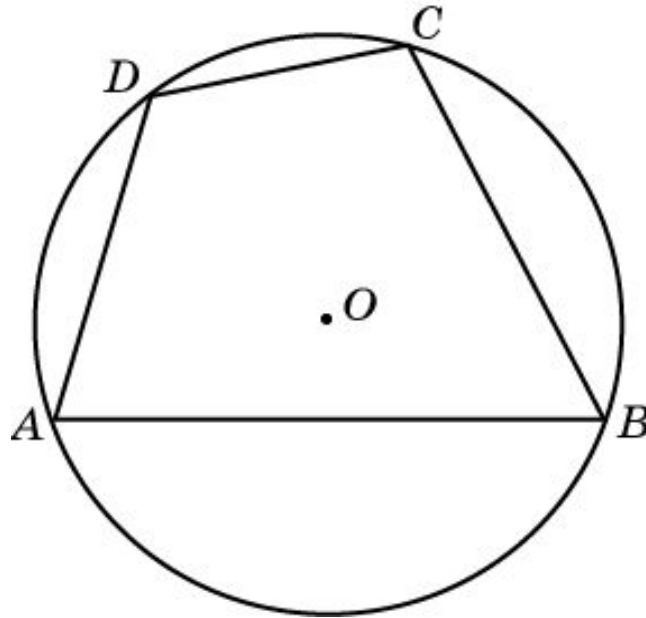
Точки A, B, C, D , расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги, градусные величины которых относятся как $4:2:3:6$. Найдите угол A четырехугольника $ABCD$.



Ответ: 60° .

Упражнение 29

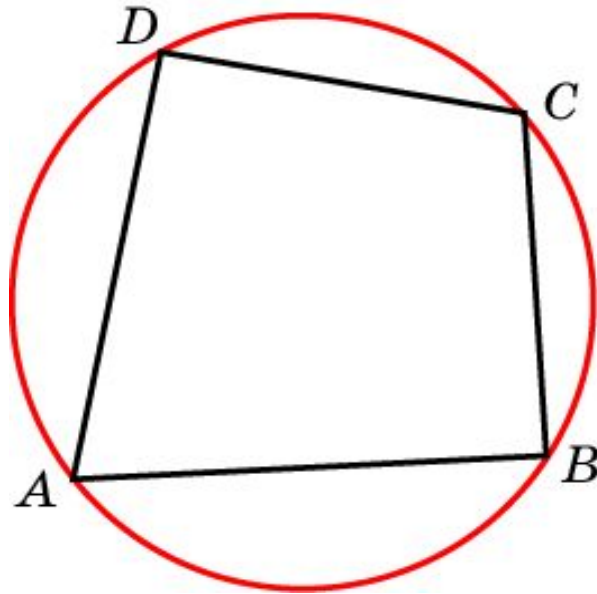
Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 80° и 60° . Найдите два других угла четырехугольника.



Ответ: 100° и 120° .

Упражнение 30

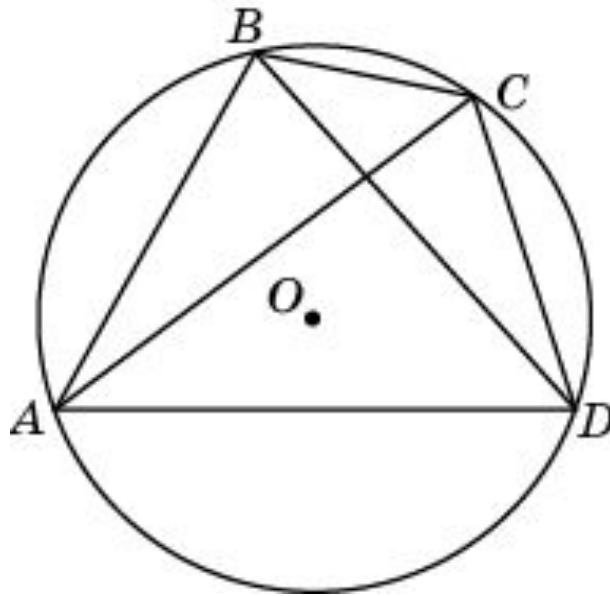
Углы A , B и C четырехугольника $ABCD$ относятся как $2:3:4$. Найдите угол D , если около данного четырехугольника можно описать окружность.



Ответ: 90° .

Упражнение 31

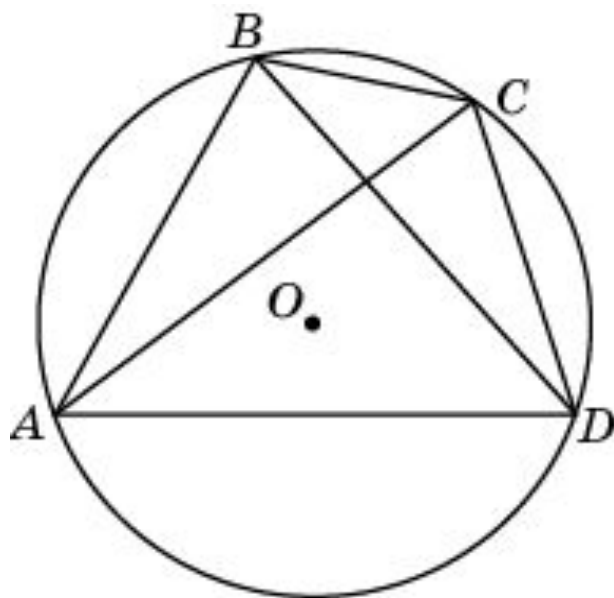
Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 105° , угол CAD равен 35° . Найдите угол ABD .



Ответ: 70° .

Упражнение 32

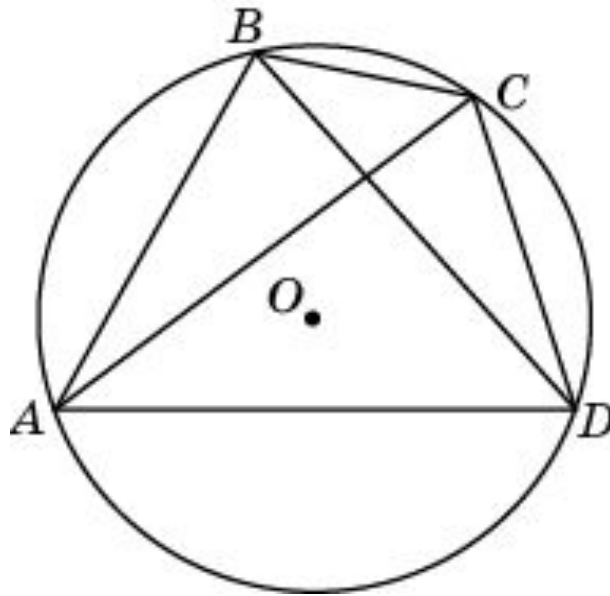
Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 75° , угол CAD равен 35° . Найдите угол ABC .



Ответ: 110° .

Упражнение 33

Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 110° , угол ABD равен 70° . Найдите угол CAD .



Ответ: 40° .

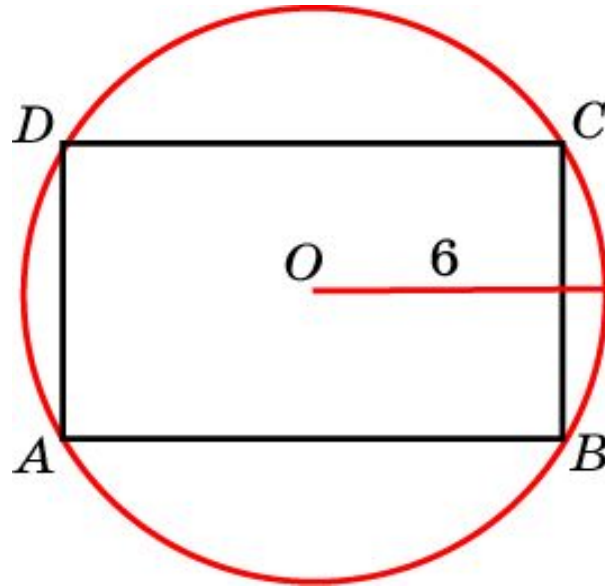
Упражнение 34

Углы треугольника равны 30° , 65° и 85° . Какая из сторон треугольника расположена дальше от центра описанной окружности?

Ответ: Против угла в 30° .

Упражнение 35

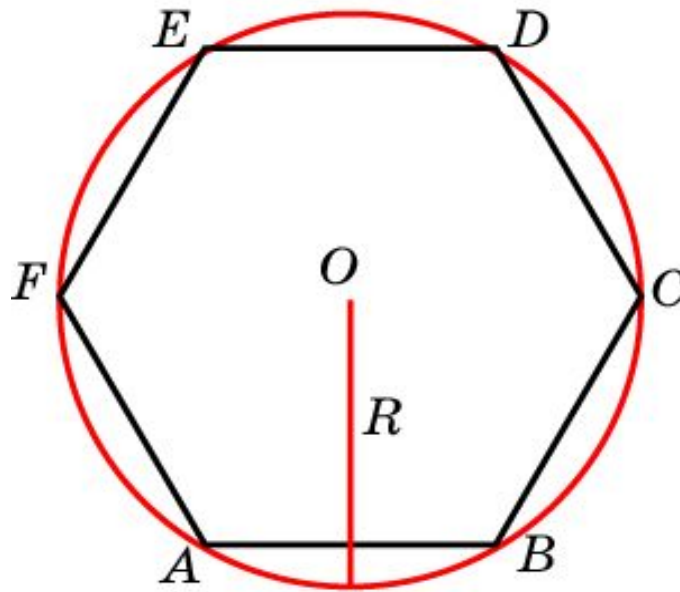
Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность радиуса 6 см.



Ответ: 12 см.

Упражнение 36

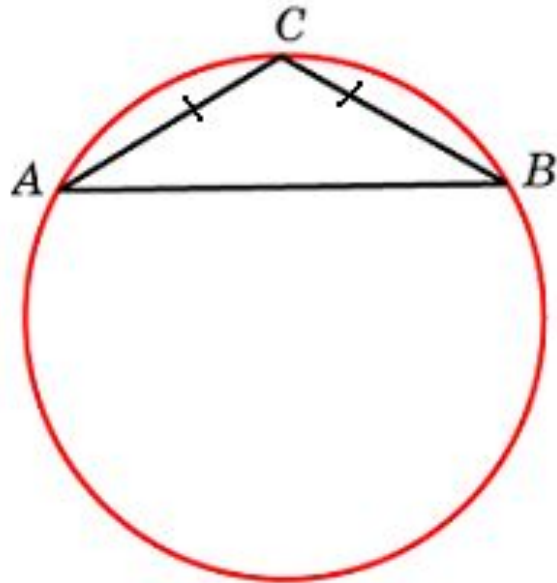
Чему равна сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса R ?



Ответ: R .

Упражнение 37

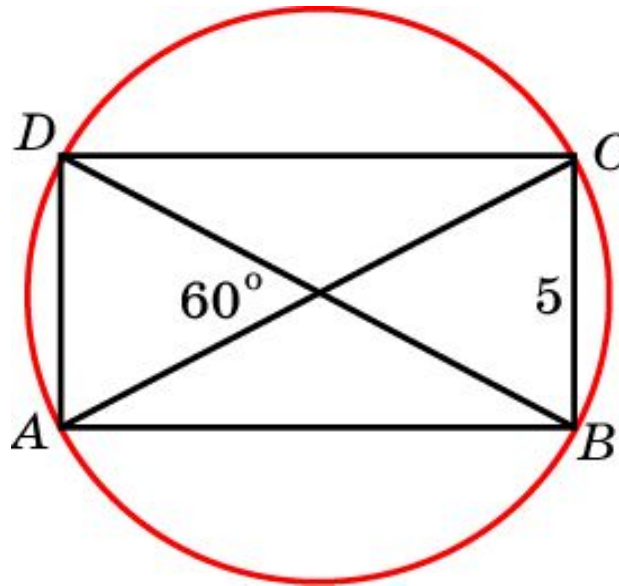
Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 1, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120° . Найдите диаметр описанной окружности.



Ответ: 2.

Упражнение 38

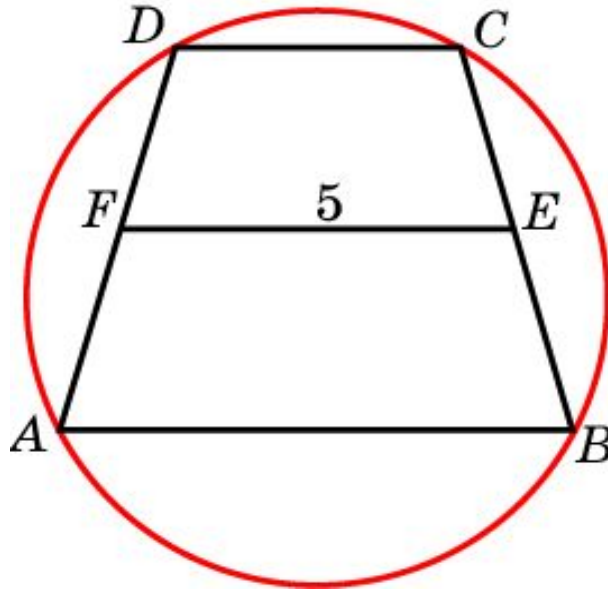
Меньшая сторона прямоугольника равна 5 см. Угол между диагоналями равен 60° . Найдите радиус описанной окружности.



Ответ: 5 см.

Упражнение 39

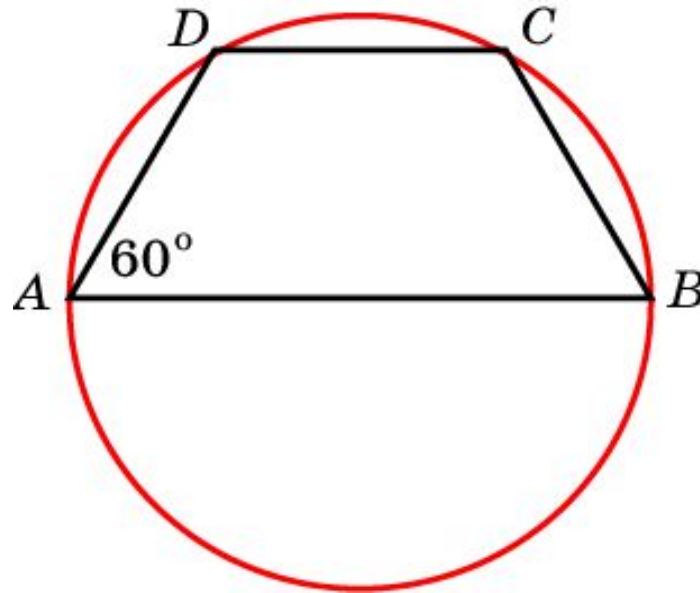
Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 20 см, средняя линия 5 см. Найдите боковые стороны трапеции.



Ответ: 5 см.

Упражнение 40

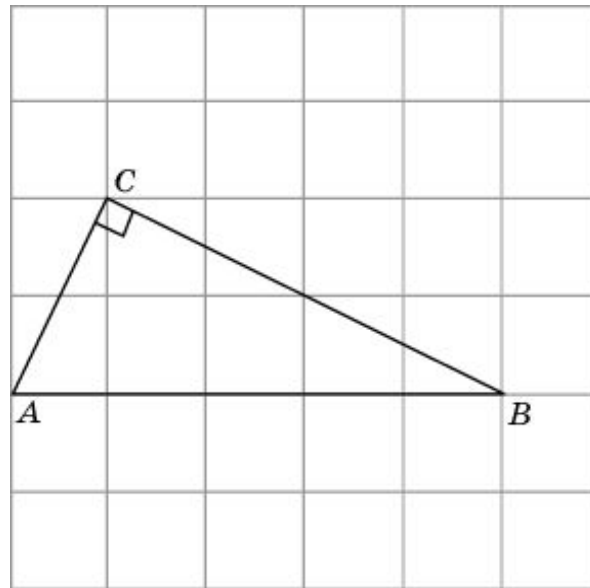
Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию. Угол при основании равен 60° . Где расположен центр описанной около данной трапеции окружности?



Ответ: В середине большего основания.

Упражнение 41

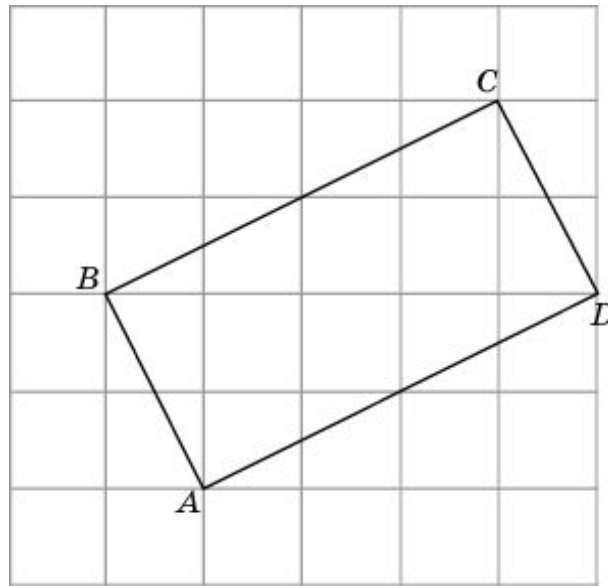
Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC , если стороны квадратных клеток равны 1.



Ответ: 2,5.

Упражнение 42

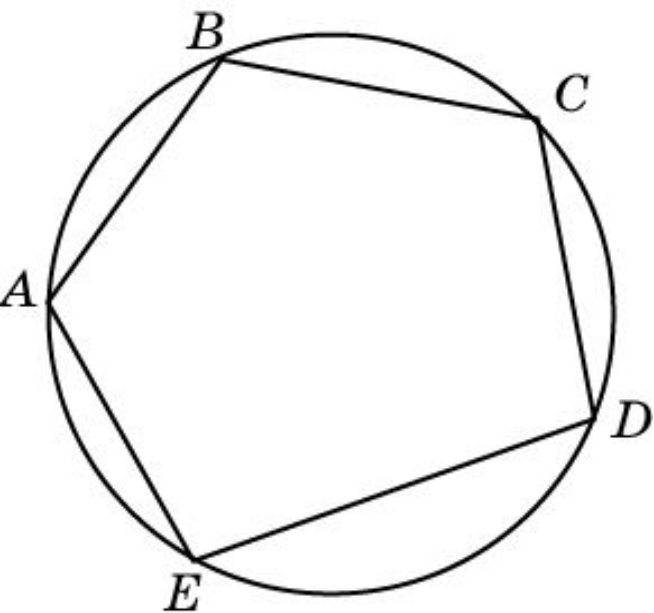
Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны 1.



Ответ: 2,5.

Упражнение 43*

Можно ли описать окружность около пятиугольника с углами 80° , 90° , 100° , 130° , 140° ?

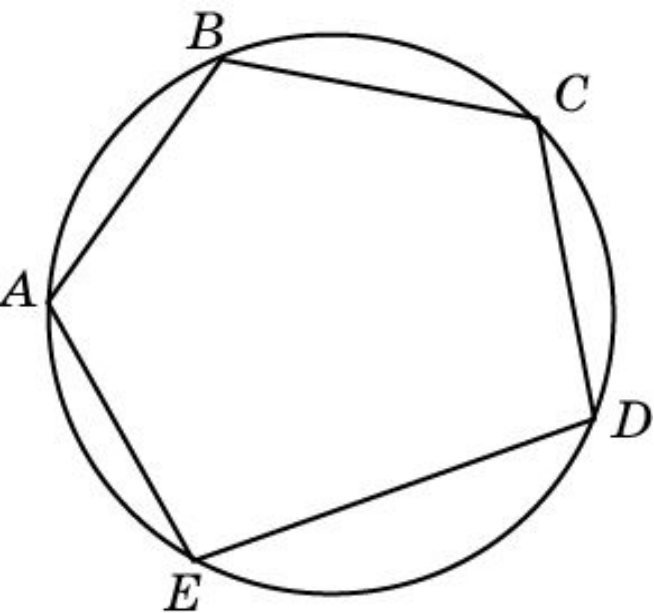


Решение. Установим соотношение между углами вписанного пятиугольника $ABCDE$. Заметим, что углы A и C опираются на дуги, в сумме составляющие всю окружность плюс дугу DE .

Из этого вытекает, что сумма любых двух несоседних углов любого вписанного пятиугольника больше 180° . Указанные в задаче углы не удовлетворяют этому условию, и, значит, около такого пятиугольника нельзя описать окружность.

Упражнение 44*

Докажите, что если сумма любых двух несоседних углов пятиугольника $ABCDE$ больше 180° , то существует пятиугольник с такими же углами, около которого можно описать окружность.



Решение. Искомым пятиугольником является пятиугольник $A'B'C'D'E'$, для которого

$$\angle D'E' = 2(\angle A + \angle C - 180^\circ),$$

$$\angle A'E' = 2(\angle B + \angle D - 180^\circ),$$

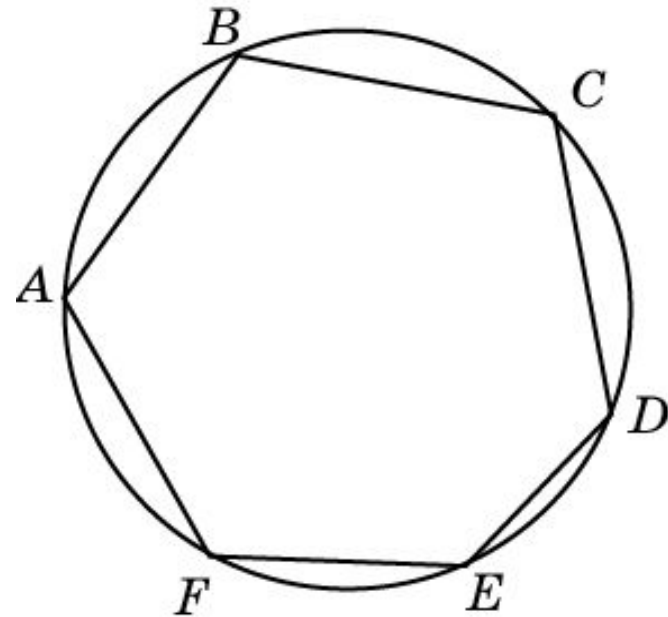
$$\angle A'B' = 2(\angle C + \angle E - 180^\circ),$$

$$\angle B'C' = 2(\angle D + \angle A - 180^\circ),$$

$$\angle C'D' = 2(\angle E + \angle B - 180^\circ).$$

Упражнение 45*

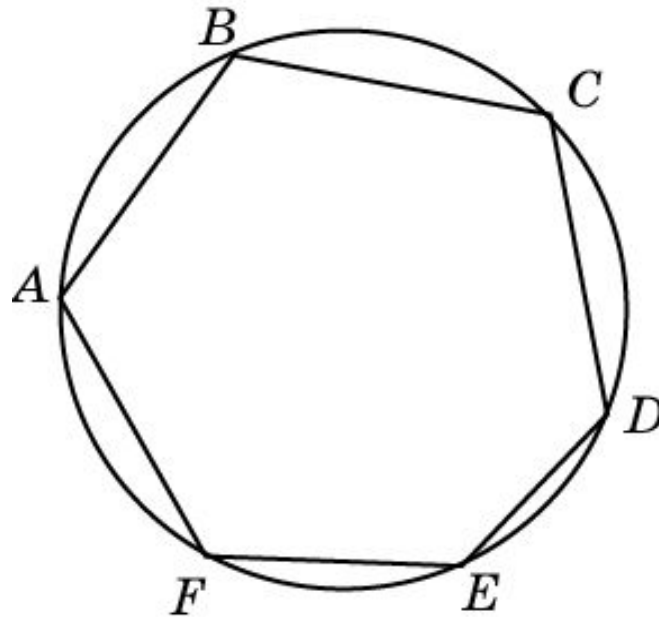
Можно ли описать окружность около шестиугольника с углами 100° , 110° , 120° , 120° , 130° , 140° ?



Решение. Заметим, что сумма любых трех несоседних углов вписанного шестиугольника равна 360° . Указанные в задаче углы не удовлетворяют этому условию, и, значит, около такого шестиугольника нельзя описать окружность.

Упражнение 46*

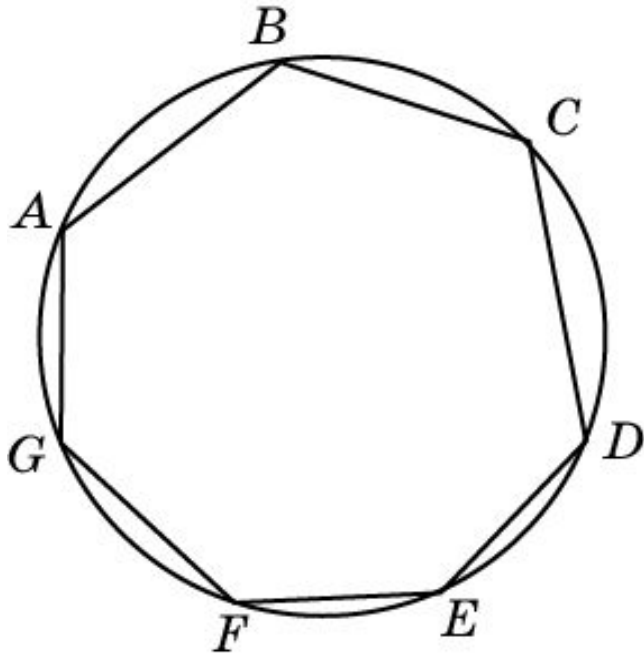
Четыре последовательных угла вписанного шестиугольника равны 100° , 110° , 120° , 120° . Найдите оставшиеся два угла.



Ответ. 140° и 130° .

Упражнение 47*

Докажите, что сумма любых трех несоседних углов вписанного семиугольника больше 360° .



Решение. Угол A опирается на всю окружность без дуги BG . Угол C опирается на всю окружность без дуги BD . Угол E опирается на всю окружность без дуги DF . В сумме эти углы опираются на более чем две окружности. Следовательно, их сумма больше 360° .