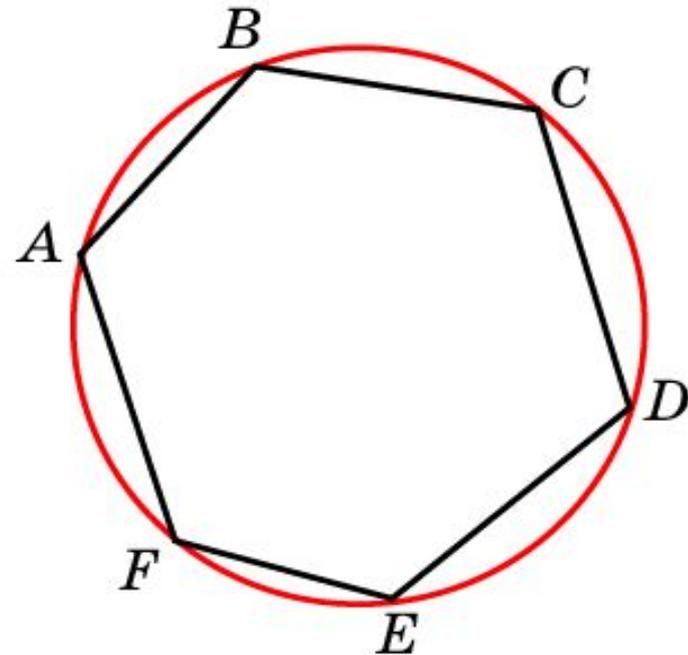
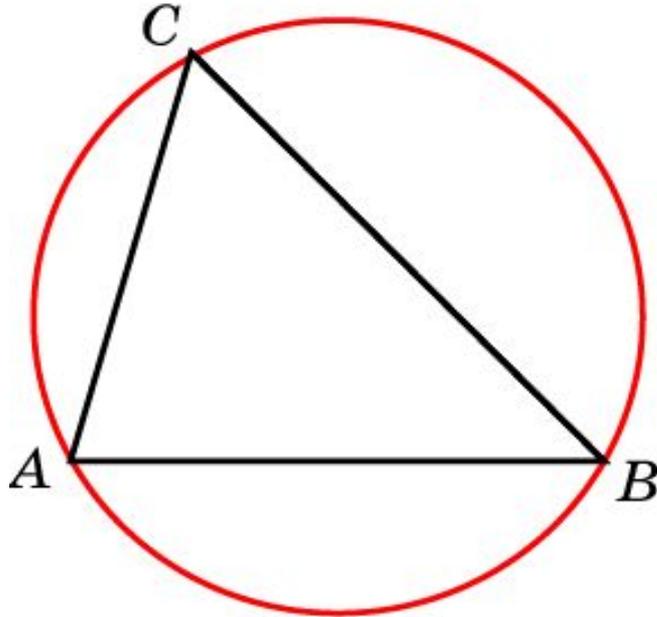


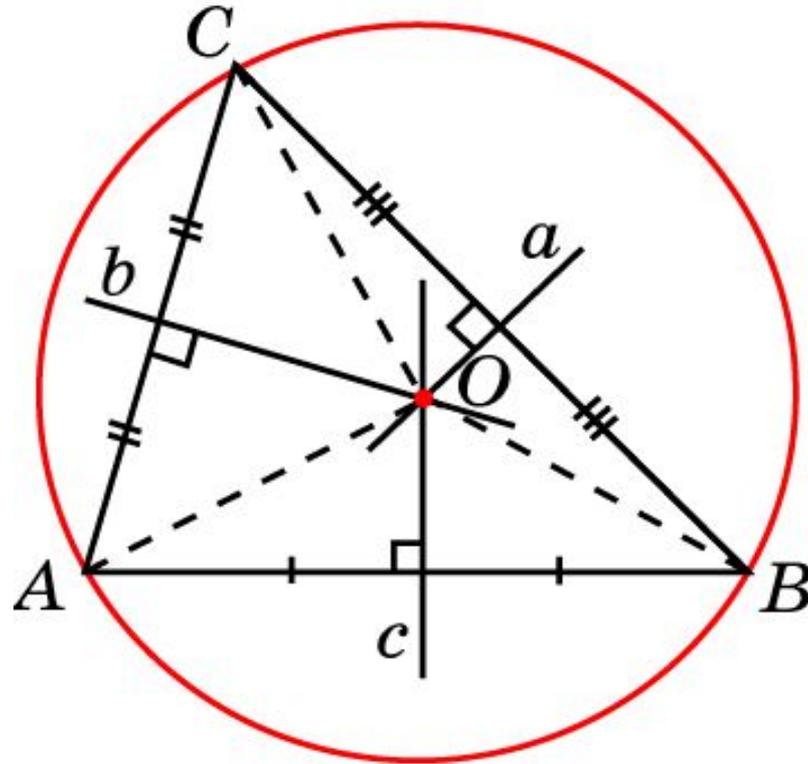
# Многоугольники, вписанные в окружность

Многоугольник называется **вписанным** в окружность, если все его вершины принадлежат окружности. Окружность при этом называется **описанной** около многоугольника.



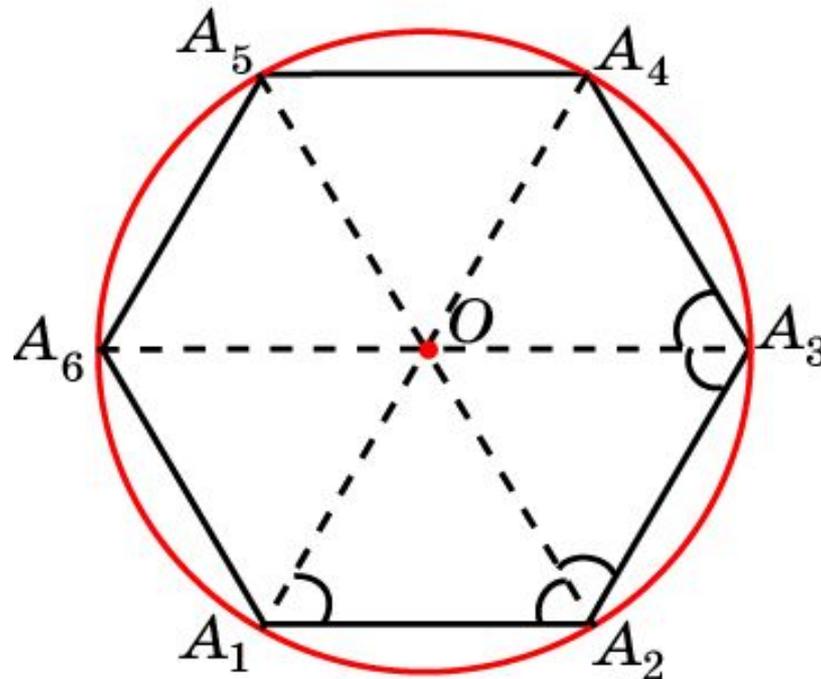
# Теорема 1

Около всякого треугольника можно описать окружность. Ее центр является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.



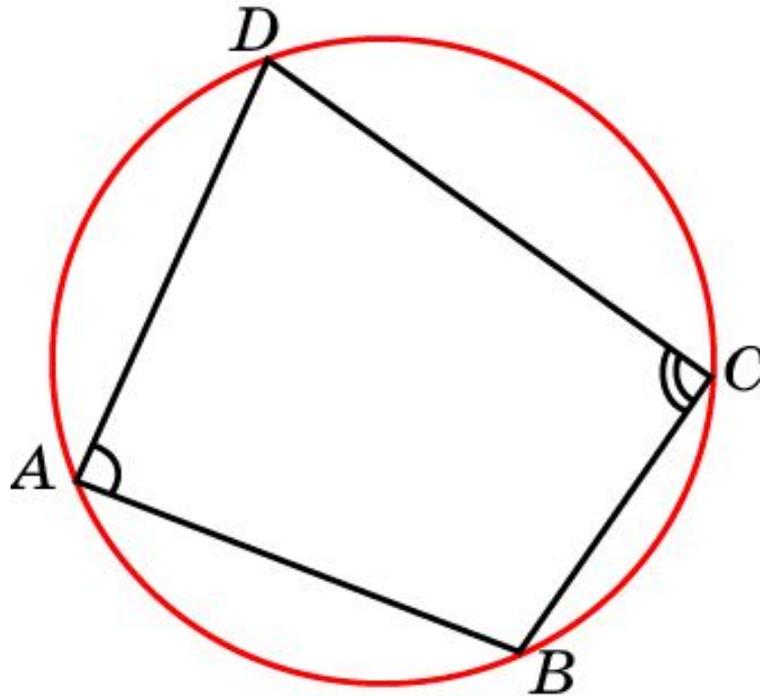
## Теорема 2

Около любого правильного многоугольника можно описать окружность.



## Теорема 3

Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна  $180^\circ$ .



# Вопрос 1

Какой многоугольник называется вписанным в окружность?

**Ответ:** Многоугольник называется вписанным в окружность, если все его вершины принадлежат окружности.

## Вопрос 2

Какая окружность называется описанной около многоугольника?

**Ответ:** Окружность называется описанной около многоугольника, если ей принадлежат все вершины этого многоугольника.

## Вопрос 3

Около всякого ли треугольника можно описать окружность?

Ответ: Да.

## Вопрос 4

Где находится центр описанной около треугольника окружности?

**Ответ:** Центром описанной окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

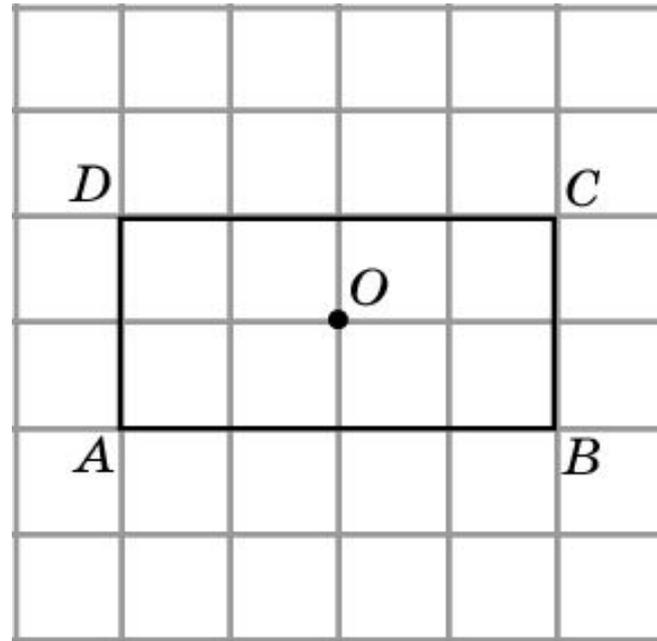
## Вопрос 5

Можно ли описать окружность около правильного многоугольника?

Ответ: Да.

# Упражнение 1

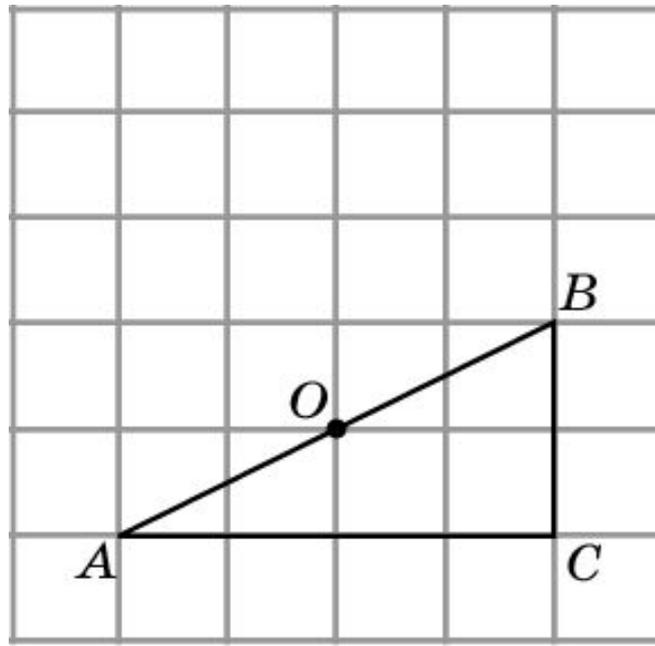
Укажите центр окружности, описанной около прямоугольника  $ABCD$ .



Ответ:

## Упражнение 2

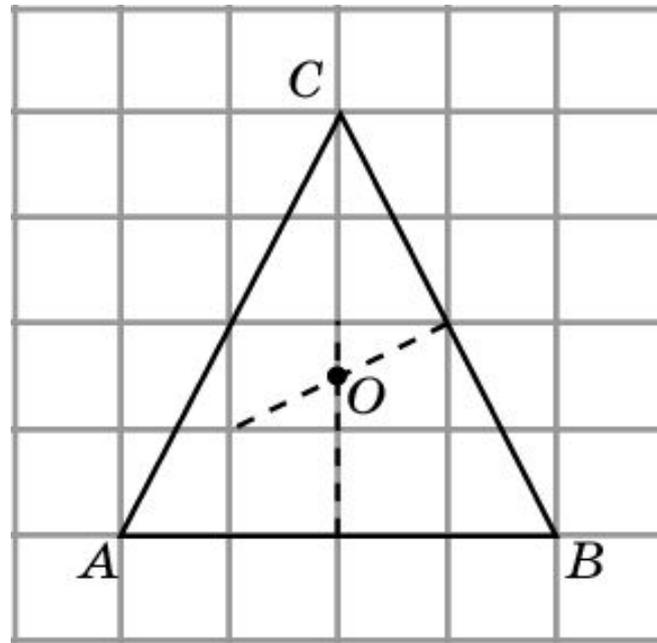
Укажите центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .



Ответ:

## Упражнение 3

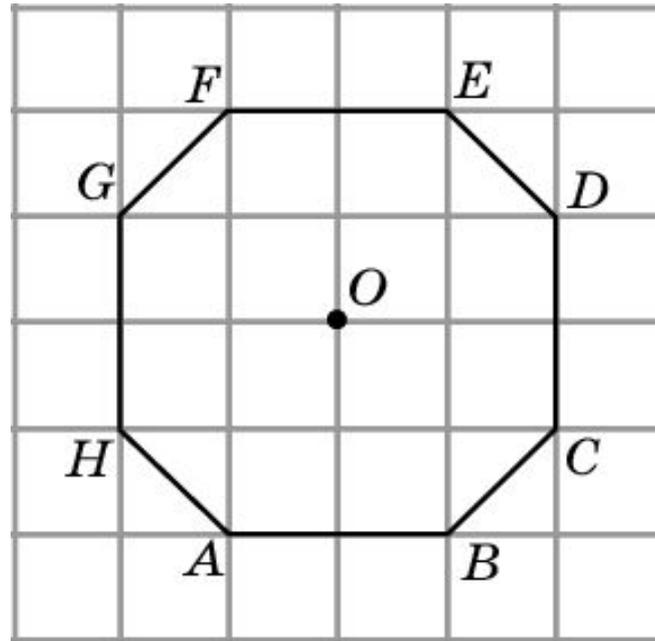
Укажите центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .



Ответ:

## Упражнение 4

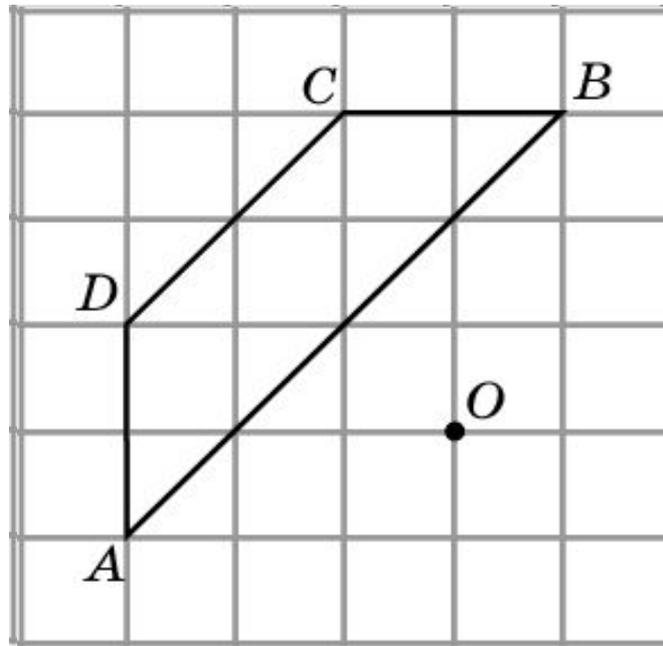
Укажите центр окружности, описанной около многоугольника  $ABCDEFGH$ .



Ответ:

## Упражнение 5

Укажите центр окружности, описанной около трапеции  $ABCD$ .



Ответ:

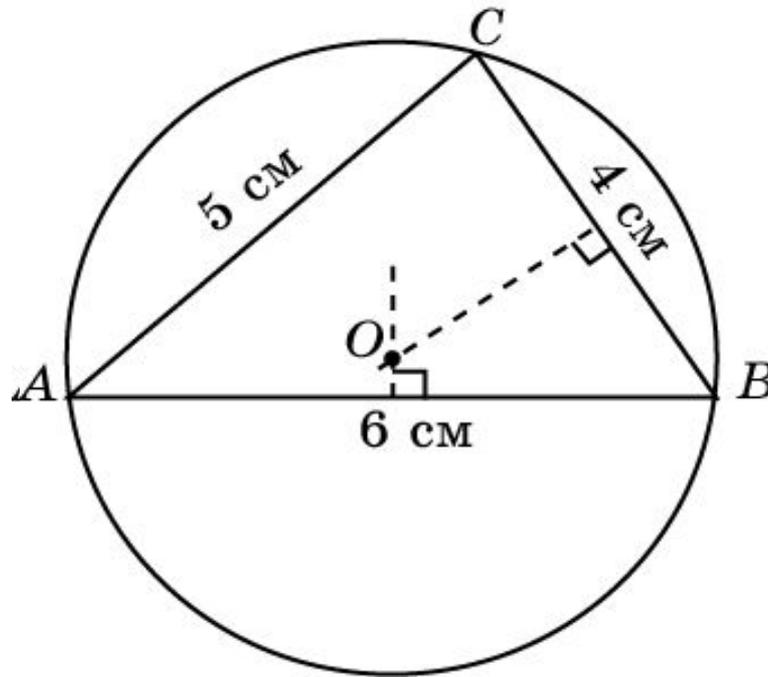
## Упражнение 6

Может ли центр описанной около треугольника окружности находиться: а) внутри треугольника; б) на стороне треугольника; в) вне этого треугольника?

**Ответ:** а) Да;  
б) да;  
в) да.

## Упражнение 7

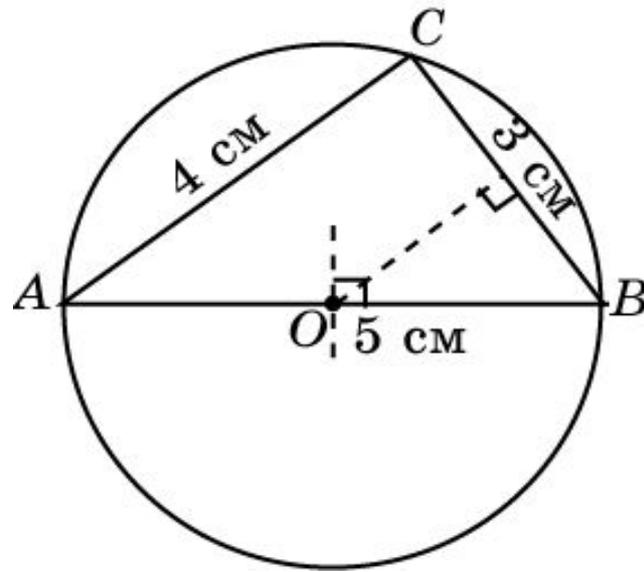
С помощью циркуля и линейки постройте окружность, описанную около треугольника со сторонами 4 см, 5 см, 6 см.



**Решение.** Центром описанной окружности будет точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

## Упражнение 8

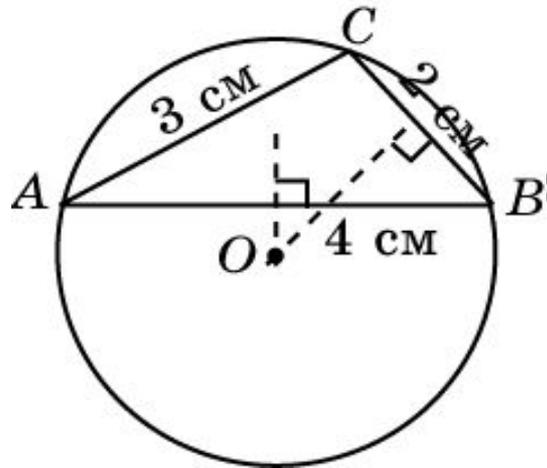
С помощью циркуля и линейки постройте окружность, описанную около треугольника со сторонами 3 см, 4 см, 5 см.



**Решение.** Центром описанной окружности будет точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

## Упражнение 9

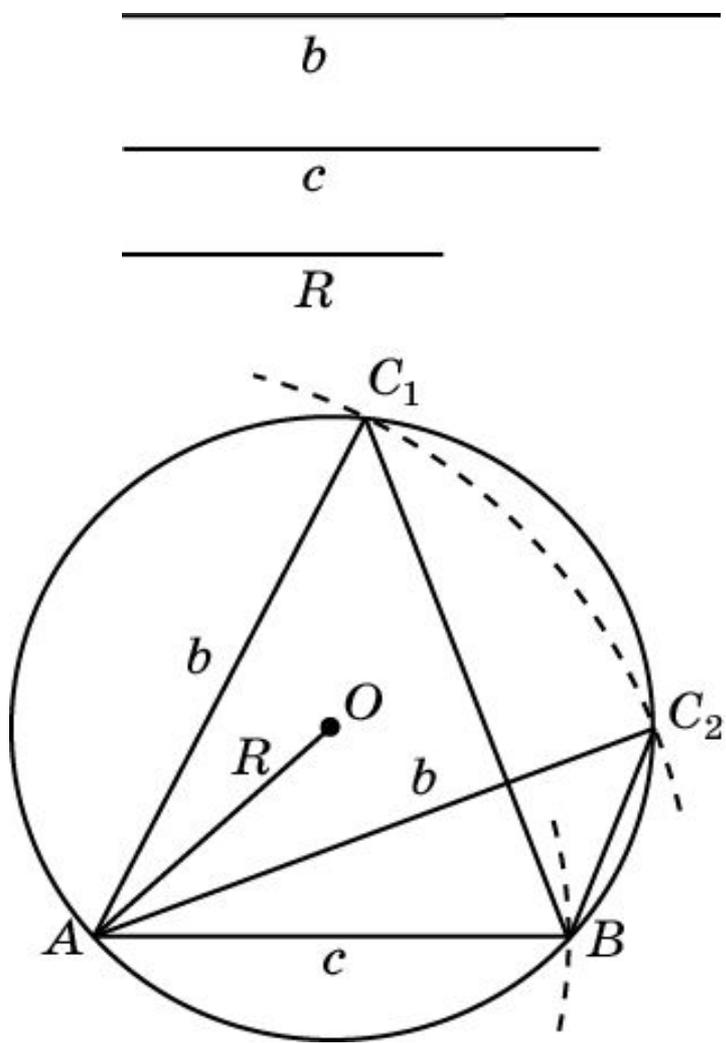
С помощью циркуля и линейки постройте окружность, описанную около треугольника со сторонами 2 см, 3 см, 4 см.



**Решение.** Центром описанной окружности будет точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

## Упражнение 10

Постройте треугольник  $ABC$  по двум данным сторонам  $AB = c$ ,  $AC = b$  и радиусу  $R$  описанной окружности.

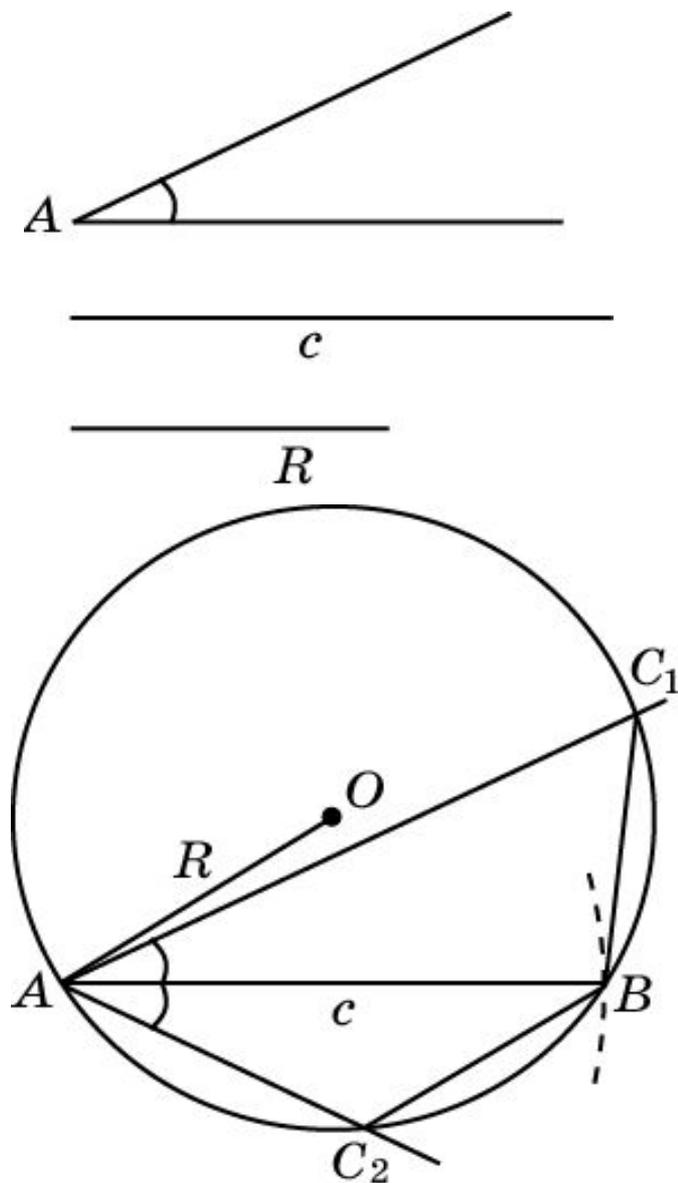


**Решение:** Проведем окружность радиуса  $R$ . С центром в точке  $A$  этой окружности и радиусом  $c$  проведем дугу окружности. Обозначим  $B$  ее точку пересечения с проведенной окружностью. Проведем отрезок  $AB$ . С центром в точке  $A$  проведем дугу окружности радиуса  $b$ . Обозначим  $C_1$ ,  $C_2$  ее точки пересечения с проведенной окружностью. Соединим их отрезками с точками  $A$  и  $B$ . Треугольники  $ABC_1$  и  $ABC_2$  будут искомыми.

## Упражнение 11

Постройте треугольник  $ABC$  по данным стороне  $AB = c$ , углу  $A$  и радиусу  $R$  описанной окружности.

**Решение:** Проведем окружность радиуса  $R$ . С центром в точке  $A$  этой окружности и радиусом  $c$  проведем дугу окружности. Обозначим  $B$  ее точку пересечения с проведенной окружностью. Проведем отрезок  $AB$ . От луча  $AB$  отложим углы, равные углу  $A$ . Обозначим  $C_1, C_2$  точки пересечения их лучей с проведенной окружностью. Соединим их отрезками с точками  $A$  и  $B$ . Треугольники  $ABC_1$  и  $ABC_2$  будут искомыми.



## Упражнение 12

Всегда ли можно ли описать окружность около:

- а) прямоугольника; б) параллелограмма; в) ромба;  
г) квадрата; д) равнобедренной трапеции; е)  
прямоугольной трапеции?

**Ответ:** а) Да;  
б) нет;  
в) нет;  
г) да;  
д) да;  
е) нет.

## Упражнение 13

Можно ли описать окружность около четырехугольника, углы которого последовательно равны: а)  $70^\circ$ ,  $130^\circ$ ,  $110^\circ$ ,  $50^\circ$ ; б)  $90^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ; в)  $45^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $105^\circ$ ; г)  $40^\circ$ ,  $125^\circ$ ,  $55^\circ$ ,  $140^\circ$ ?

**Ответ:** а) Да;  
б) нет;  
в) да;  
г) нет.

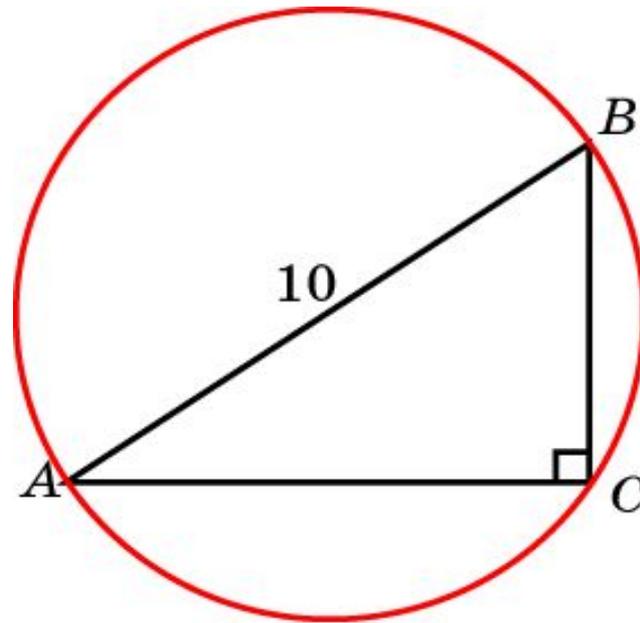
## Упражнение 14

Где находится центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника?

**Ответ:** В середине гипотенузы.

## Упражнение 15

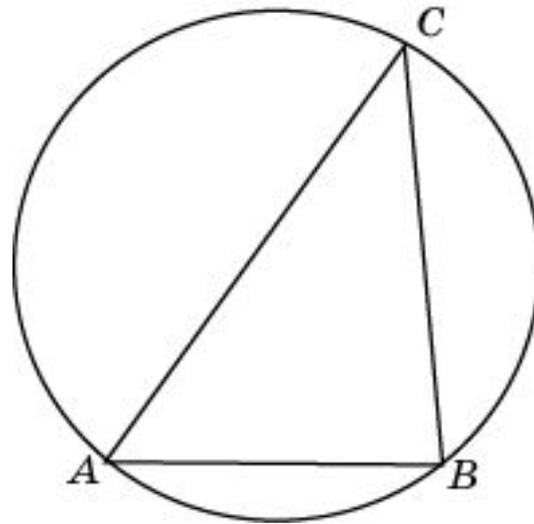
Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см. Найдите радиус описанной окружности.



Ответ: 5 см.

## Упражнение 16

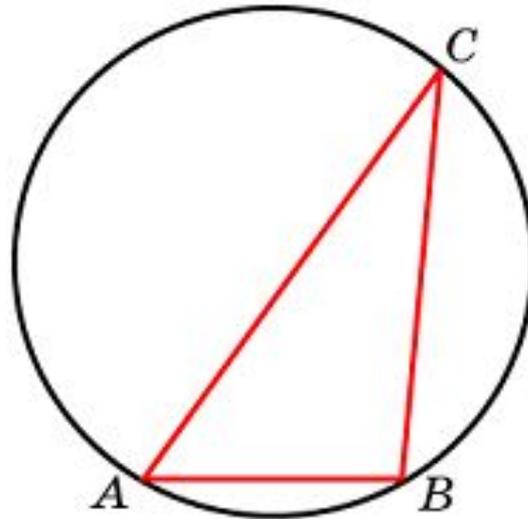
Сторона  $AB$  треугольника  $ABC$  равна 1. Противлежащий ей угол  $C$  равен  $30^\circ$ . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



Ответ: 1.

## Упражнение 17

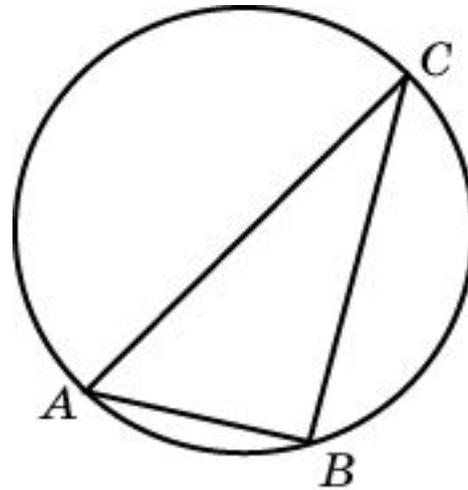
Одна сторона треугольника равна радиусу описанной окружности. Найдите угол треугольника, противолежащий этой стороне.



Ответ:  $30^\circ$ .

## Упражнение 18

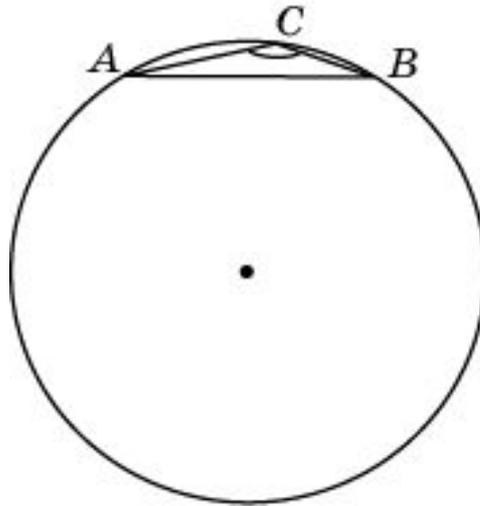
Угол  $C$  треугольника  $ABC$ , вписанного в окружность радиуса 3, равен  $30^\circ$ . Найдите сторону  $AB$  этого треугольника, противолежащую данному углу.



Ответ: 3.

## Упражнение 19

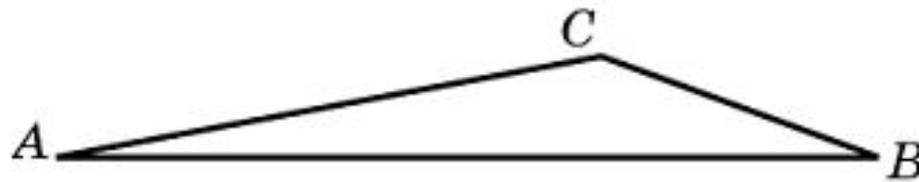
Сторона  $AB$  треугольника  $ABC$  равна 1. Противлежащий ей угол  $C$  равен  $120^\circ$ . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



Ответ: 1.

## Упражнение 20

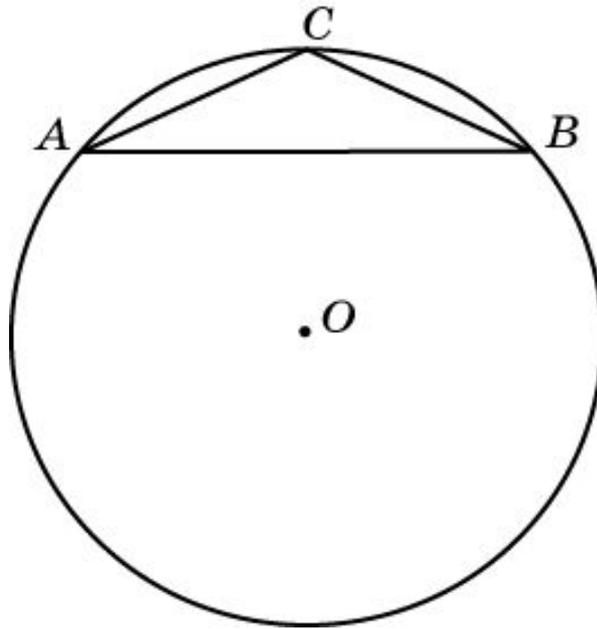
Сторона  $AB$  тупоугольного треугольника  $ABC$  равна радиусу описанной около него окружности. Найдите угол  $C$ .



Ответ:  $150^\circ$ .

## Упражнение 21

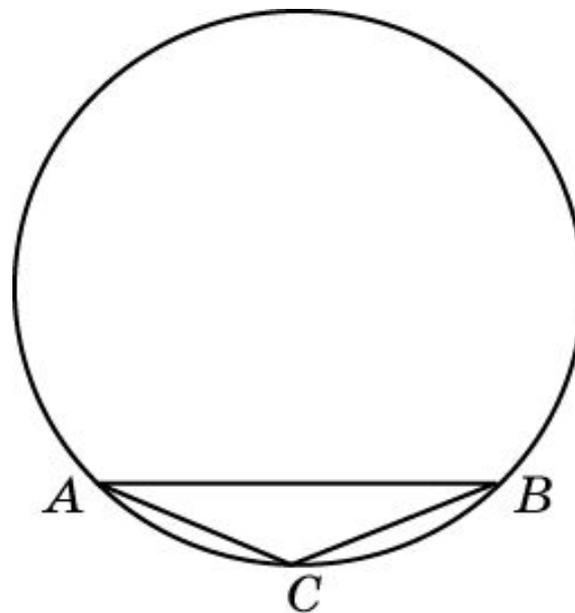
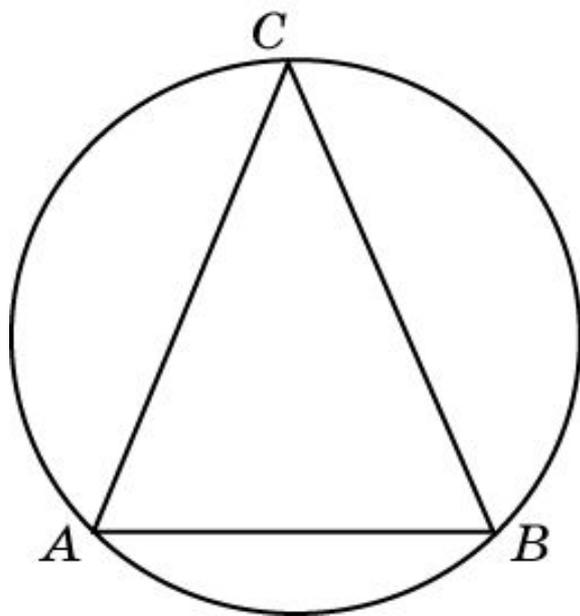
Найдите углы вписанного в окружность равнобедренного треугольника, боковая сторона которого стягивает дугу в  $24^{\circ}51'$ .



**Ответ:**  $12^{\circ}25'30''$ ,  $12^{\circ}25'30''$ ,  $155^{\circ}9'$ .

## Упражнение 22

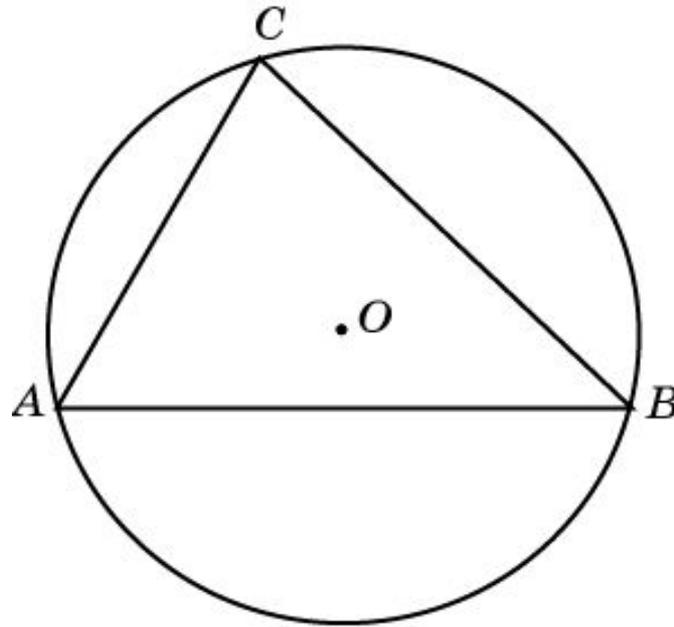
Найдите углы вписанного в окружность равнобедренного треугольника, если его основание стягивает дугу в  $100^\circ$ .



**Ответ:**  $50^\circ, 65^\circ, 65^\circ$  или  $25^\circ 30', 25^\circ 30', 130^\circ$ .

## Упражнение 23

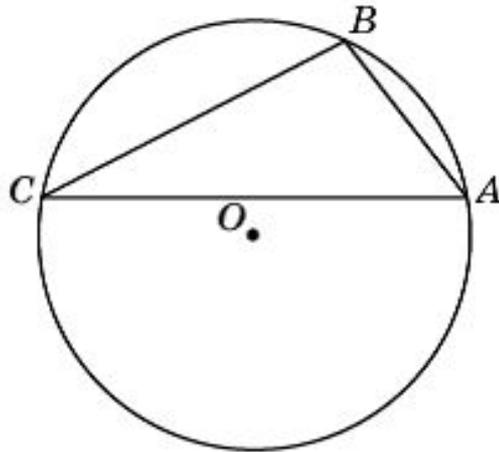
Два угла треугольника равны  $60^\circ$  и  $40^\circ$ . Под какими углами видны его стороны из центра описанной около него окружности?



**Ответ:**  $120^\circ$ ,  $80^\circ$  и  $160^\circ$ .

## Упражнение 24

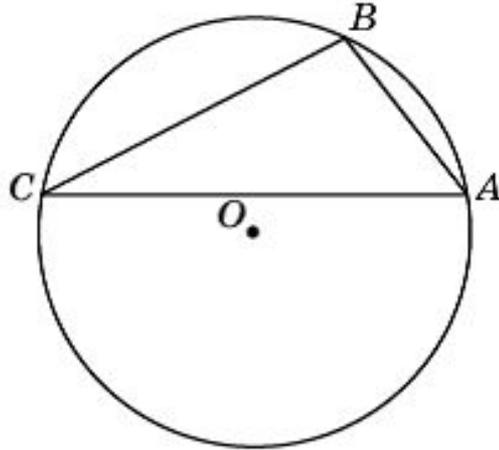
Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , расположенные на окружности, делят ее на три дуги, градусные величины которых относятся как  $1 : 3 : 5$ . Найдите больший угол треугольника  $ABC$ .



Ответ:  $100^\circ$ .

## Упражнение 25

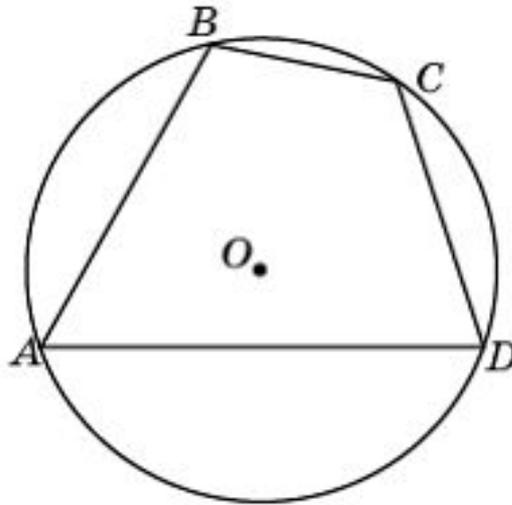
Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , расположенные на окружности, делят эту окружность на три дуги, градусные величины которых относятся как  $2 : 3 : 7$ .  
Найдите углы треугольника  $ABC$ .



**Ответ:**  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $105^\circ$ .

## Упражнение 26

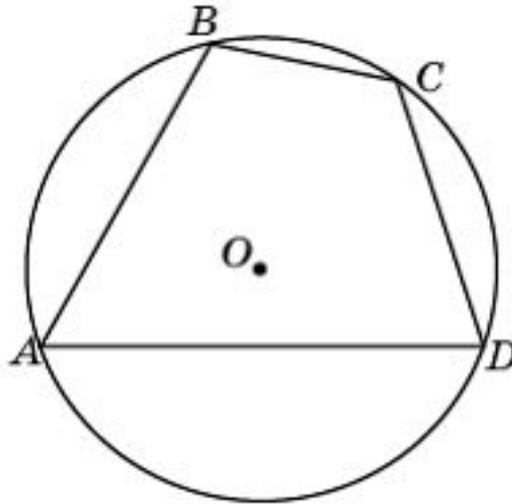
Угол  $A$  четырехугольника  $ABCD$ , вписанного в окружность, равен  $58^\circ$ . Найдите угол  $C$  этого четырехугольника.



Ответ:  $122^\circ$ .

## Упражнение 27

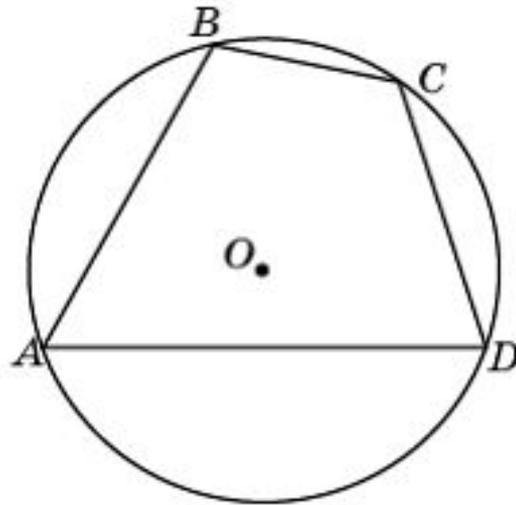
Стороны четырехугольника  $ABCD$  стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно  $95^\circ$ ,  $49^\circ$ ,  $71^\circ$ ,  $145^\circ$ . Найдите угол  $B$  этого четырехугольника.



Ответ:  $108^\circ$ .

## Упражнение 28

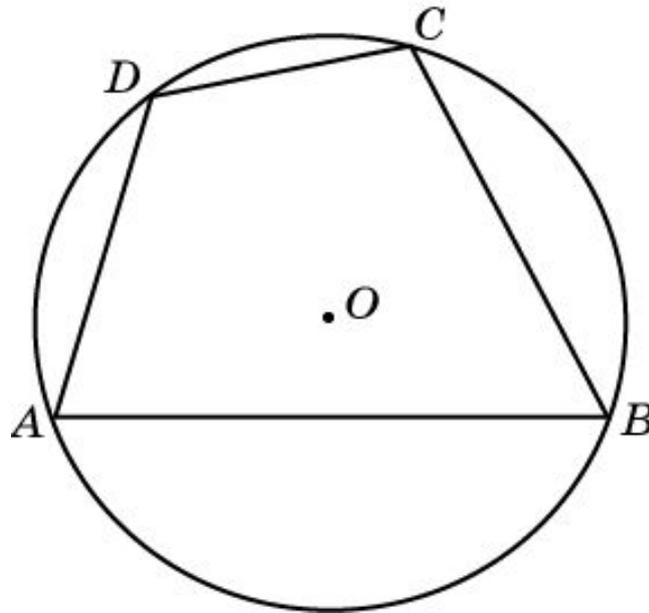
Точки  $A, B, C, D$ , расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги, градусные величины которых относятся как  $4:2:3:6$ . Найдите угол  $A$  четырехугольника  $ABCD$ .



Ответ:  $60^\circ$ .

## Упражнение 29

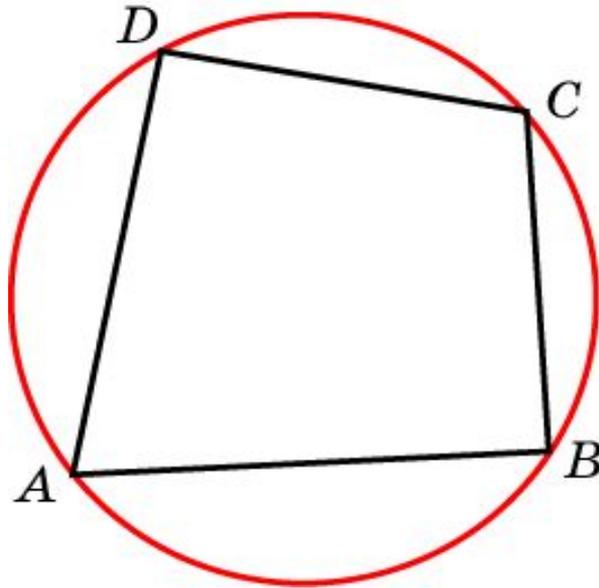
Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны  $80^\circ$  и  $60^\circ$ . Найдите два других угла четырехугольника.



**Ответ:**  $100^\circ$  и  $120^\circ$ .

## Упражнение 30

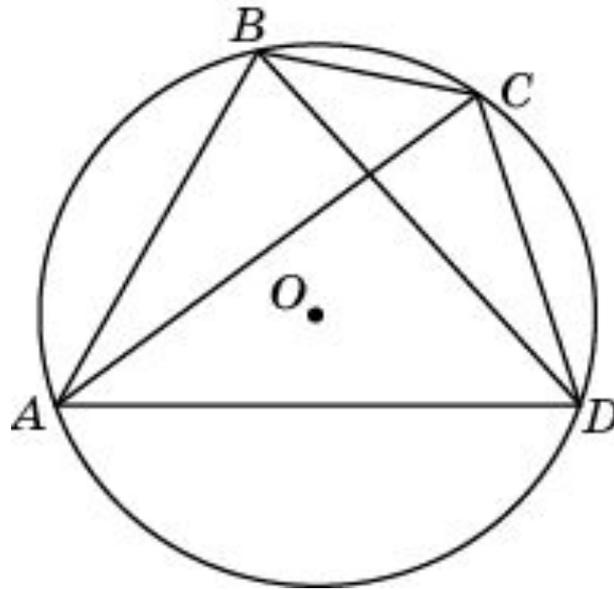
Углы  $A$ ,  $B$  и  $C$  четырехугольника  $ABCD$  относятся как  $2:3:4$ . Найдите угол  $D$ , если около данного четырехугольника можно описать окружность.



Ответ:  $90^\circ$ .

## Упражнение 31

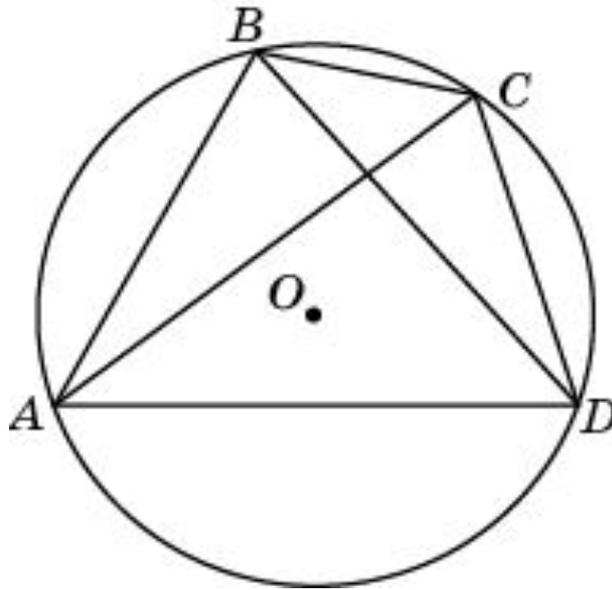
Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Угол  $ABC$  равен  $105^\circ$ , угол  $CAD$  равен  $35^\circ$ . Найдите угол  $ABD$ .



Ответ:  $70^\circ$ .

## Упражнение 32

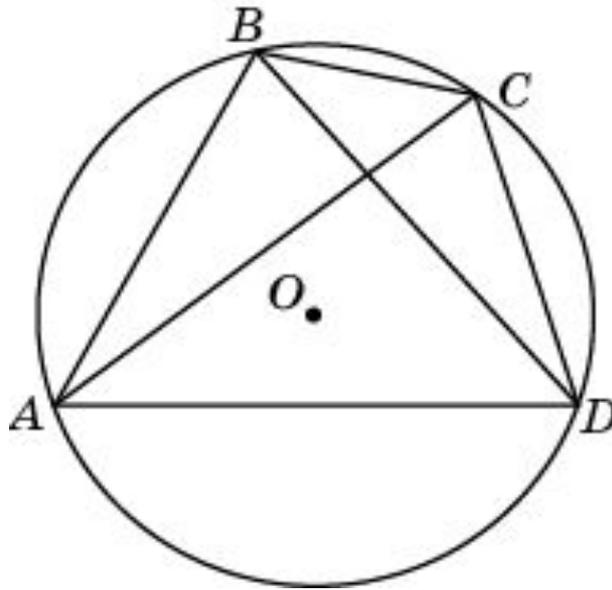
Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Угол  $ABD$  равен  $75^\circ$ , угол  $CAD$  равен  $35^\circ$ . Найдите угол  $ABC$ .



Ответ:  $110^\circ$ .

## Упражнение 33

Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Угол  $ABC$  равен  $110^\circ$ , угол  $ABD$  равен  $70^\circ$ . Найдите угол  $CAD$ .



Ответ:  $40^\circ$ .

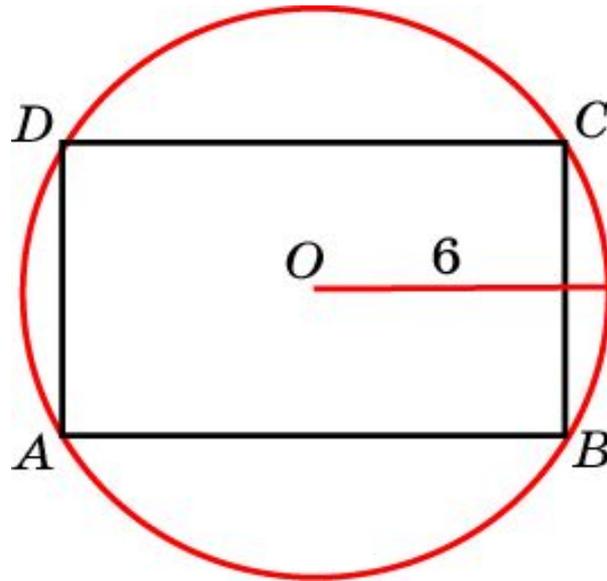
## Упражнение 34

Углы треугольника равны  $30^\circ$ ,  $65^\circ$  и  $85^\circ$ . Какая из сторон треугольника расположена дальше от центра описанной окружности?

**Ответ:** Против угла в  $30^\circ$ .

## Упражнение 35

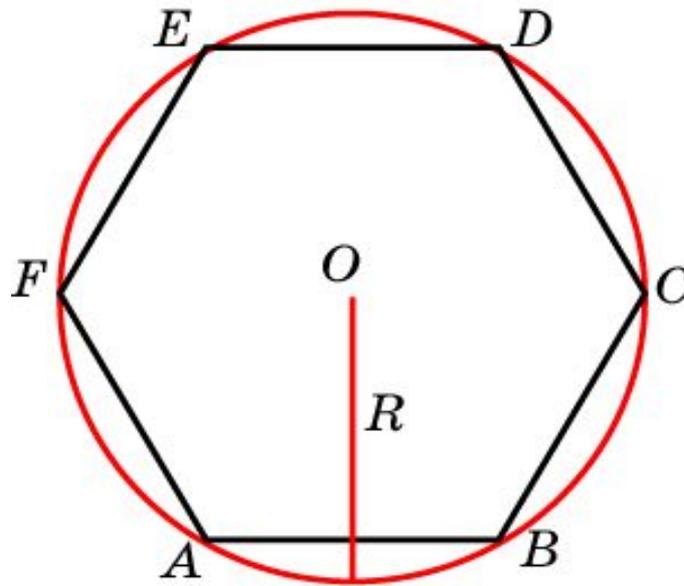
Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность радиуса 6 см.



Ответ: 12 см.

## Упражнение 36

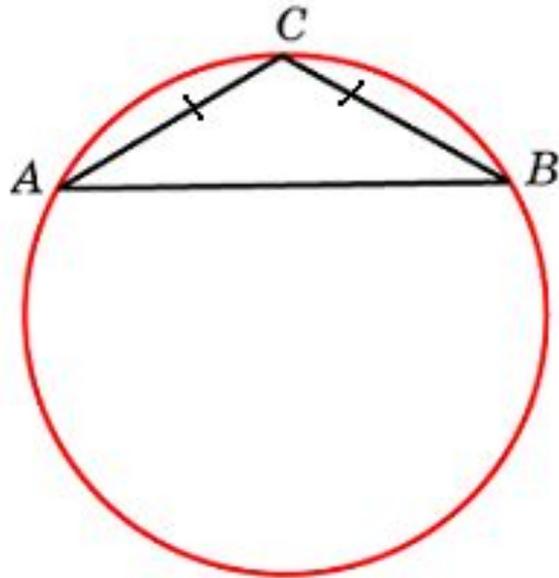
Чему равна сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса  $R$ ?



Ответ:  $R$ .

## Упражнение 37

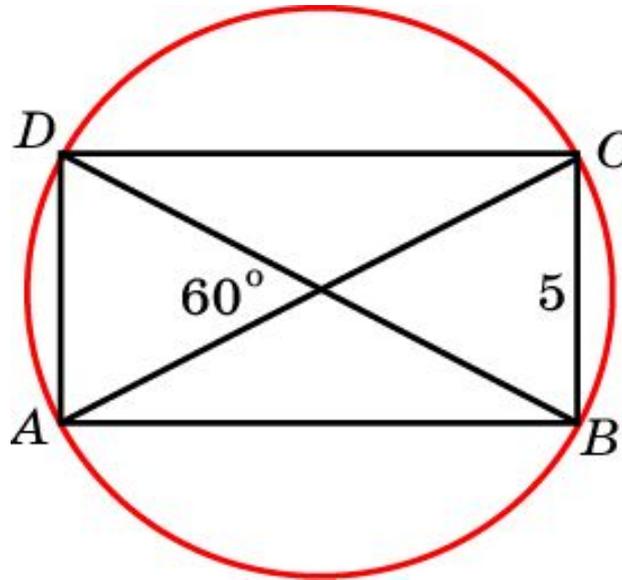
Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 1, угол при вершине, противолежащей основанию, равен  $120^\circ$ . Найдите диаметр описанной окружности.



Ответ: 2.

## Упражнение 38

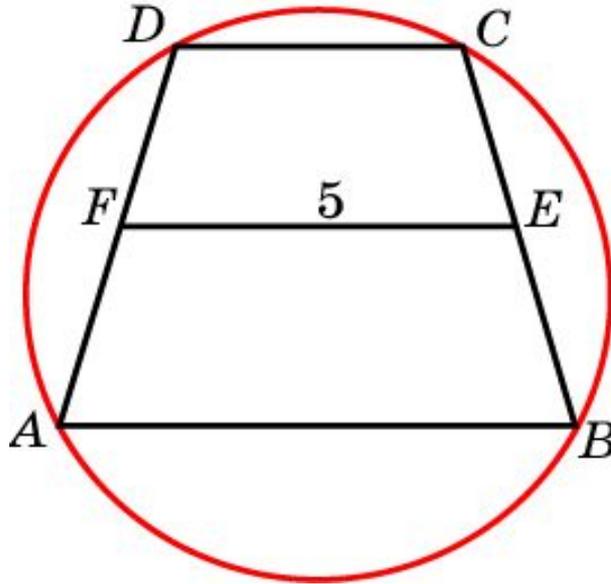
Меньшая сторона прямоугольника равна 5 см. Угол между диагоналями равен  $60^\circ$ . Найдите радиус описанной окружности.



Ответ: 5 см.

## Упражнение 39

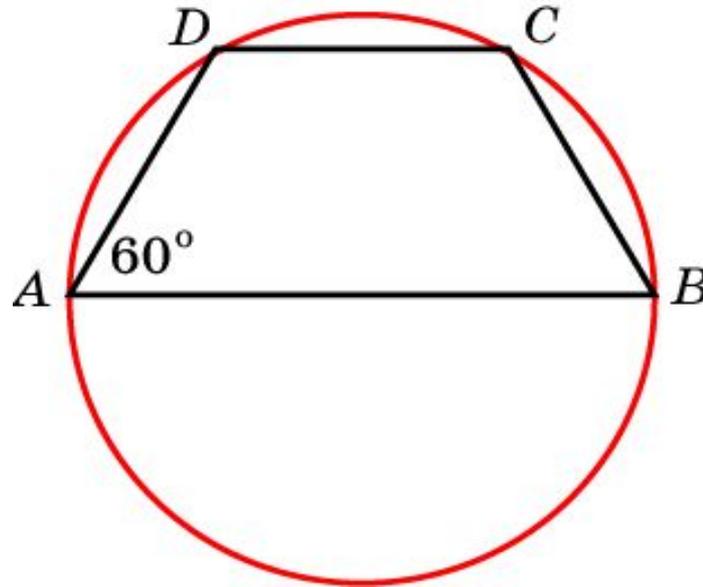
Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 20 см, средняя линия 5 см. Найдите боковые стороны трапеции.



Ответ: 5 см.

## Упражнение 40

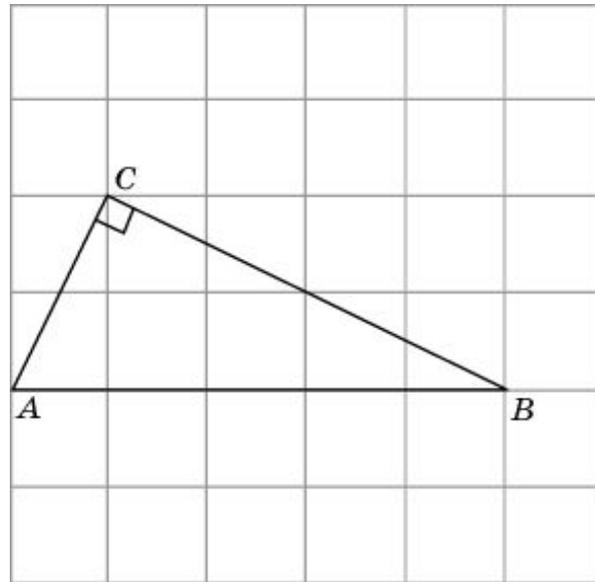
Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию. Угол при основании равен  $60^\circ$ . Где расположен центр описанной около данной трапеции окружности?



**Ответ:** В середине большего основания.

## Упражнение 41

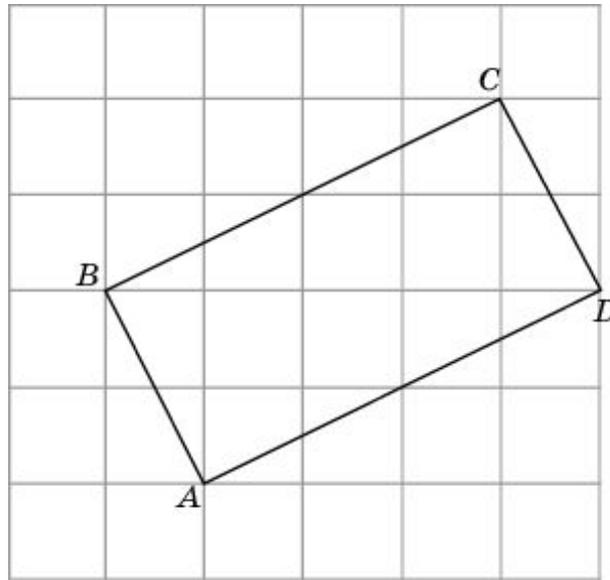
Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника  $ABC$ , если стороны квадратных клеток равны 1.



Ответ: 2,5.

## Упражнение 42

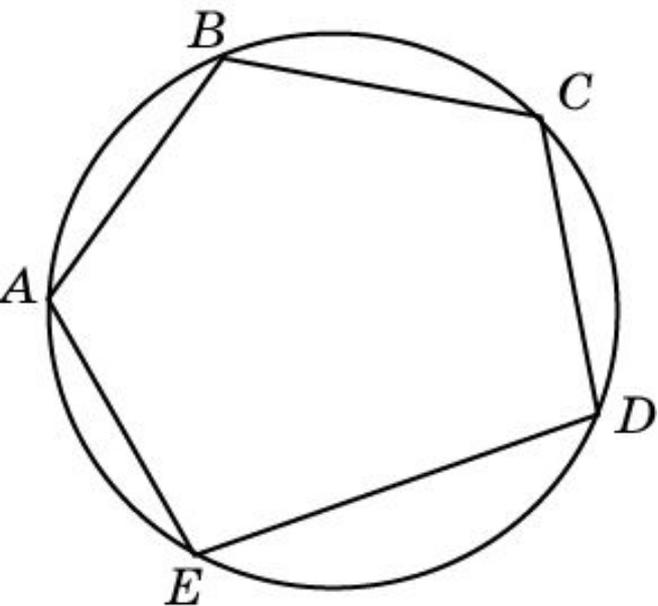
Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника  $ABCD$ , если стороны квадратных клеток равны 1.



Ответ: 2,5.

## Упражнение 43\*

Можно ли описать окружность около пятиугольника с углами  $80^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $130^\circ$ ,  $140^\circ$ ?

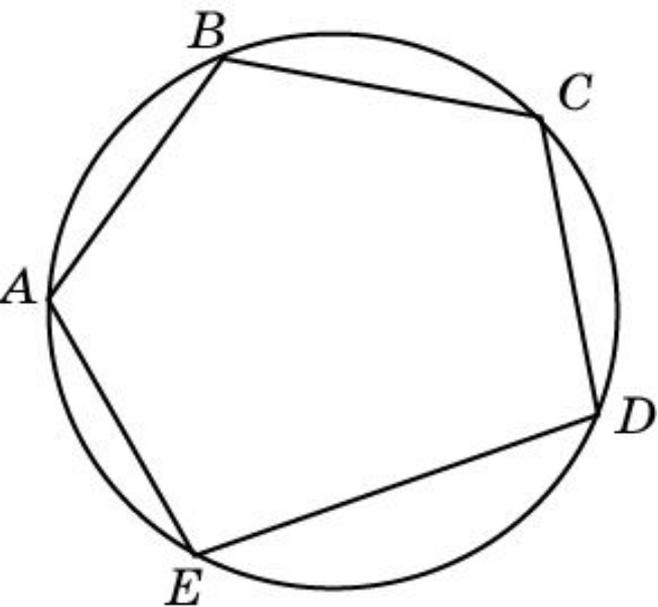


**Решение.** Установим соотношение между углами вписанного пятиугольника  $ABCDE$ . Заметим, что углы  $A$  и  $C$  опираются на дуги, в сумме составляющие всю окружность плюс дугу  $DE$ .

Из этого вытекает, что сумма любых двух несоседних углов любого вписанного пятиугольника больше  $180^\circ$ . Указанные в задаче углы не удовлетворяют этому условию, и, значит, около такого пятиугольника нельзя описать окружность.

## Упражнение 44\*

Докажите, что если сумма любых двух несоседних углов пятиугольника  $ABCDE$  больше  $180^\circ$ , то существует пятиугольник с такими же углами, около которого можно описать окружность.



**Решение.** Искомым пятиугольником является пятиугольник  $A'B'C'D'E'$ , для которого

$$\angle D'E' = 2(\angle A + \angle C - 180^\circ),$$

$$\angle A'E' = 2(\angle B + \angle D - 180^\circ),$$

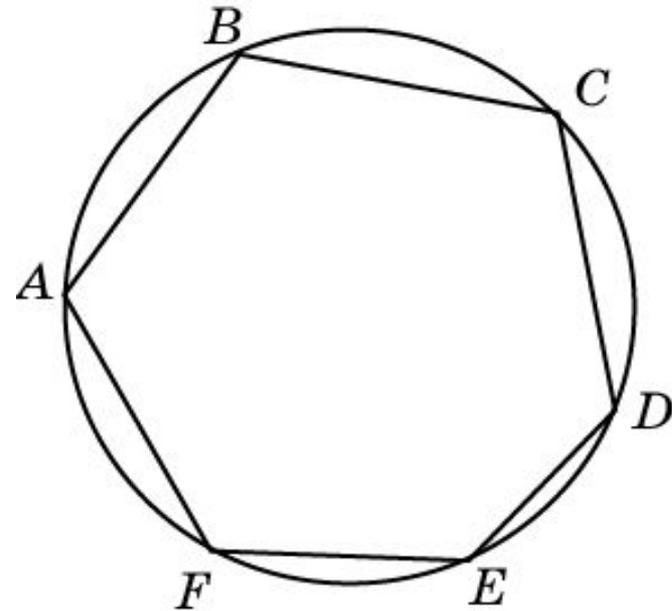
$$\angle A'B' = 2(\angle C + \angle E - 180^\circ),$$

$$\angle B'C' = 2(\angle D + \angle A - 180^\circ),$$

$$\angle C'D' = 2(\angle E + \angle B - 180^\circ).$$

## Упражнение 45\*

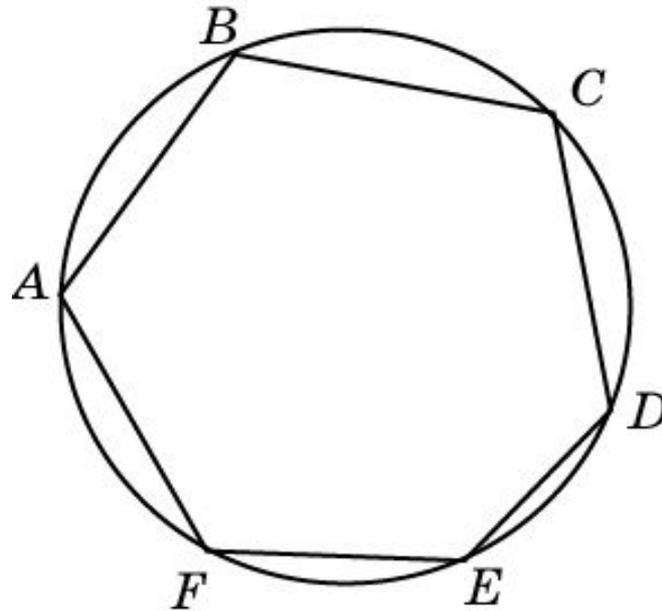
Можно ли описать окружность около шестиугольника с углами  $100^\circ$ ,  $110^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $130^\circ$ ,  $140^\circ$ ?



**Решение.** Заметим, что сумма любых трех несоседних углов вписанного шестиугольника равна  $360^\circ$ . Указанные в задаче углы не удовлетворяют этому условию, и, значит, около такого шестиугольника нельзя описать окружность.

## Упражнение 46\*

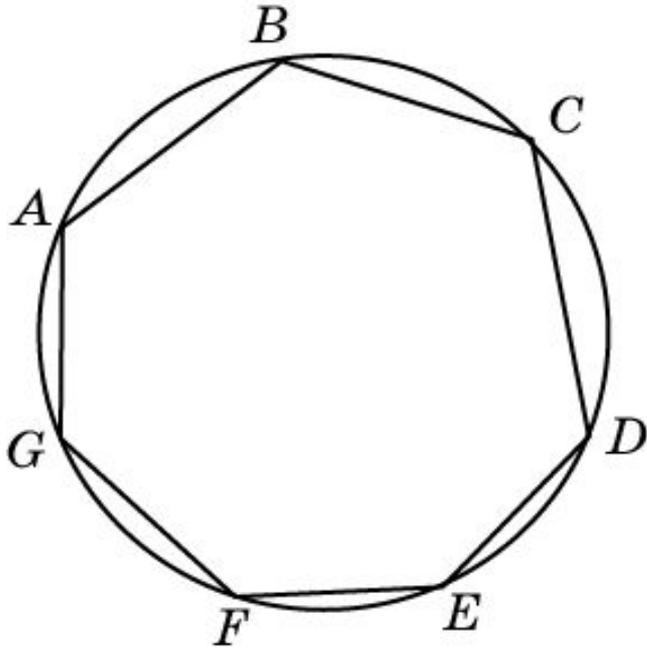
Четыре последовательных угла вписанного шестиугольника равны  $100^\circ$ ,  $110^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $120^\circ$ . Найдите оставшиеся два угла.



**Ответ.**  $140^\circ$  и  $130^\circ$ .

## Упражнение 47\*

Докажите, что сумма любых трех несоседних углов вписанного семиугольника больше  $360^\circ$ .



**Решение.** Угол  $A$  опирается на всю окружность без дуги  $BG$ . Угол  $C$  опирается на всю окружность без дуги  $BD$ . Угол  $E$  опирается на всю окружность без дуги  $DF$ . В сумме эти углы опираются на более чем две окружности. Следовательно, их сумма больше  $360^\circ$ .