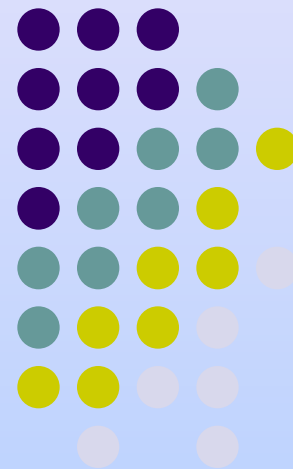
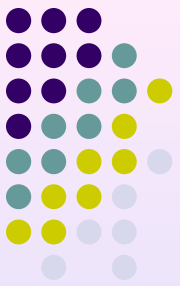


Задачи с параметрами на определение свойств решений квадратных уравнений и неравенств





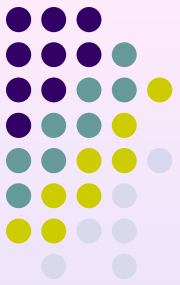
- **Свойства решений квадратных уравнений**

Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a \neq 0) \quad (1)$$

Дискриминант $D = b^2 - 4ac,$

корни $x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ (в случае $D \geq 0$)



Уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

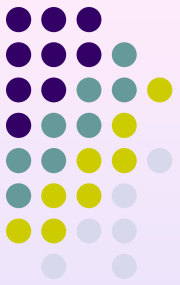
получено из (1) делением на $a \neq 0$.

Введем обозначение $p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}$.

Уравнение $x^2 + px + q = 0 \quad (2)$

называется **приведенным** квадратным уравнением.

Теорема Виета

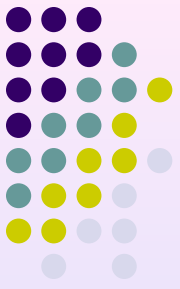


Пусть уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет действительные решения x_1, x_2 .

Тогда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$





Пример 1. *Найти сумму и произведение корней уравнения*

$$3x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Решение. 1) *Проверка: имеет ли уравнение действительные корни?*

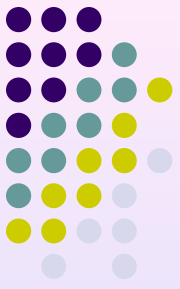
$$D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) > 0$$

Уравнение имеет действительные корни.

2) *Нахождение суммы и произведения корней уравнения с использованием теоремы Виета.*

$$x_1 + x_2 = -\frac{4}{3}, \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{5}{3}.$$





Пример 2. *Найти сумму и произведение корней уравнения*

$$2x^2 + 3x + 3 = 0.$$

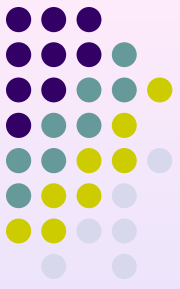
Решение. *Проверка: имеет ли уравнение действительные корни?*

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 < 0$$

Уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. *Уравнение не имеет действительных корней.*





Пример 3. При каких значениях параметра a произведение корней уравнения $x^2 + ax + 5a = 0$ равно 10?

Решение. 1) Найдем все значения параметра a , при которых уравнение имеет действительные решения.

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5a = a^2 - 20a = a(a - 20) \geq 0$$

$$\underline{a \in (-\infty; 0] \cup [20; +\infty)}.$$

2) По теореме Виета произведение корней уравнения

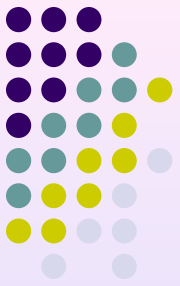
$$\text{равно 10, если } \begin{cases} D \geq 0, \\ 5a = 10. \end{cases}$$

$$\text{Решение системы: } \begin{cases} a \in (-\infty; 0] \cup [20; +\infty), \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{a \in \emptyset}.$$

Ответ. $a \in \emptyset$.



Применение теоремы Виета при исследовании свойств решений квадратных уравнений



Уравнение $x^2 + px + q = 0$

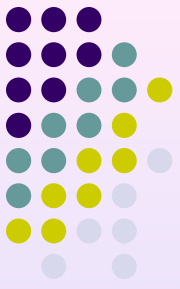
□ имеет корни одного знака, если $\begin{cases} D \geq 0, \\ q > 0. \end{cases}$

□ имеет корни разных знаков, если

$$\begin{cases} D > 0, \\ q < 0. \end{cases}$$

□ имеет положительные корни, если $\begin{cases} D \geq 0, \\ q > 0, \\ p < 0. \end{cases}$

□ имеет отрицательные корни, если $\begin{cases} D \geq 0, \\ q > 0, \\ p > 0. \end{cases}$



Пример 4. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + ax + 5a = 0$ имеет корни разных знаков ?

Решение. 1) Найдем все значения параметра a , при которых уравнение имеет действительные решения.

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5a = a^2 - 20a = a(a - 20) > 0$$
$$\underline{a \in (-\infty; 0) \cup (20; +\infty)}.$$

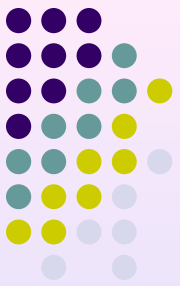
2) Уравнение имеет корни разных знаков, если

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ 5a < 0. \end{cases}$$

Решение системы: $\begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup (20; +\infty), \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{a \in (-\infty; 0)}.$

Ответ. $a \in (-\infty; 0).$





- **Свойства решений квадратных неравенств**

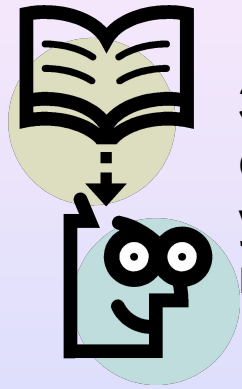
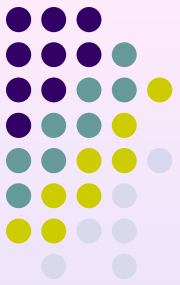
Рассмотрим квадратное неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (*) \quad (a \neq 0) \quad (3)$$

Дискриминант $D = b^2 - 4ac,$

корни $x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ (в случае $D \geq 0$)

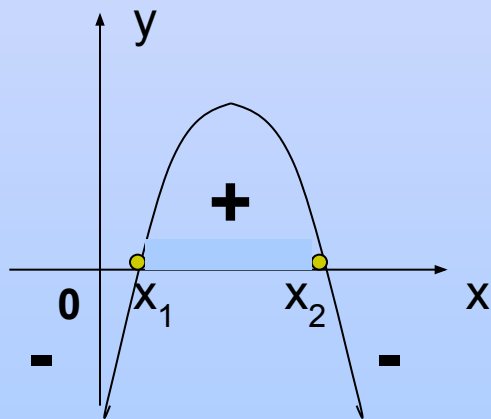
(*) Возможные знаки неравенства: $>$, $<$, \geq , \leq .



Задача отыскания решений квадратного неравенства (3) связана с исследованием соответствующего квадратного уравнения (1), и, следовательно, с возможностью использовать теорему Виета для приведенного уравнения (2).

Пример 5. При каких значениях параметра a неравенство $-x^2 + ax - 1 > 0$ имеет только положительные решения ?

Решение.



$$\left\{ \begin{array}{l} D > 0, \\ 1 > 0, \\ -a < 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{- существование решений} \\ \text{неравенства в виде промежутка} \\ \\ \text{- корни квадратного} \\ \text{уравнения (точки пересечения с} \\ \text{осью } Ox) \text{ - положительные} \end{array}$$

Ответ. $a \in (2; +\infty)$.