Тема: "Решение задач с параметрами"

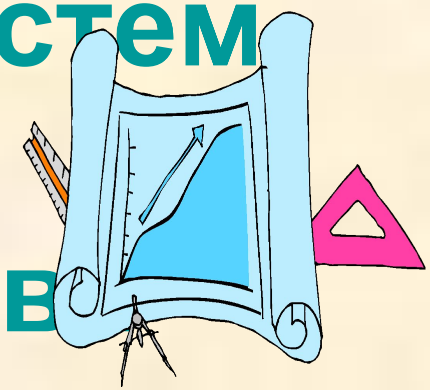
Саратов 2012г.

Учитель математики высшей категории
Зарьянцева Виктория Павловна

МОУ «СОШ № 84»

Аналитические приёмы

Параметр и количество решений уравнений , неравенств и их систем



Параметр и свойства уравнений, неравенств и их систем.

Параметры при решении уравнений, содержащих ОТФ.

Пример : **Решите уравнение**: $\arcsin x = 2\arcsin a$

Решение.

$$\sin(2\arcsin a) = 2\sin(\arcsin a)\cos(\arcsin a) = 2a\sqrt{1-a^2},$$

где $|a| \le 1$

$x = 2a\sqrt{1-a^2}$, где $|2\arcsin a| \le \dfrac{\pi}{2}, |\arcsin a| \le \dfrac{\pi}{4}, |a| \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Ответ при $a \in \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] x = 2a\sqrt{1-a^2},$

$a \in \left(-\infty; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$ **решений нет**.

Параметр и свойства уравнений, неравенств и их систем

Найдите все значения а, при которых неравенство

(x – 3a)(x – a – 3)<0.Выполняется при всех x, таких, что $1 \le x \le 3$

Решение.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3a < 1,\\ 3 < a+3,\end{cases}\\ \begin{cases}a+3 < 1,\\ 3 < 3a.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$0 < a < \frac{1}{3}$$

Ответ. $0 < a < \frac{1}{3}$

Свойства функций в задачах с параметрами

1. Область значений функции
2. Экстремальные свойства функции
3. Монотонность
4. Чётность. Периодичность. Обратимость.

Графические приёмы

Параллельный перенос

Найти все значения параметра *b*, при которых уравнение имеет единственное решение.

$$\lg 2|x| + \lg(2-x) - \lg(\lg b) = 0$$

$$\begin{cases} 2|x|(2-x) = a, \\ x < 2, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

lg b>2

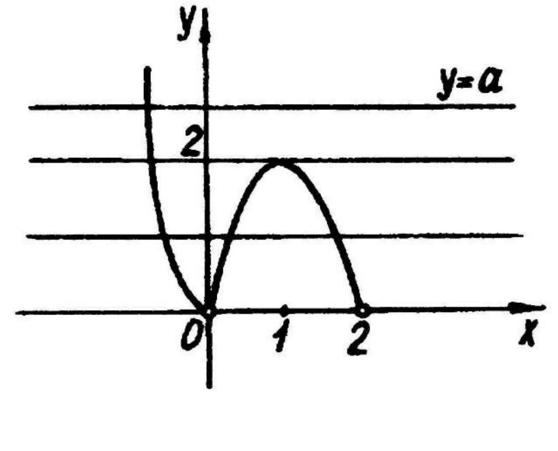


Рис. 1

Ответ: $b > 100$.

Найдите все значения параметра а, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x = a + \sqrt{y}, \\ y^2 - x^2 - 2x + 4y + 3 = 0; \end{cases}$$

имеет решение.

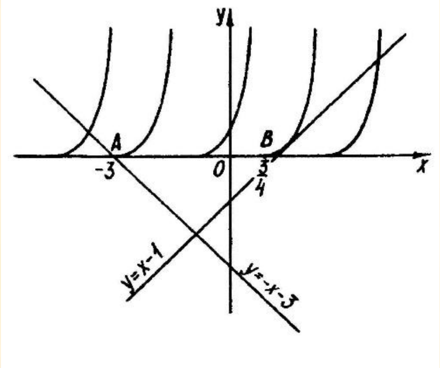


Рис. 7

Решение.

$$\begin{cases} y = x - 1, \\ y = (x - a)^2; \end{cases}$$

$$a = \frac{3}{4}$$

Ответ. $a \le -3$ или $a \ge \frac{3}{4}$

Квадратичная функция

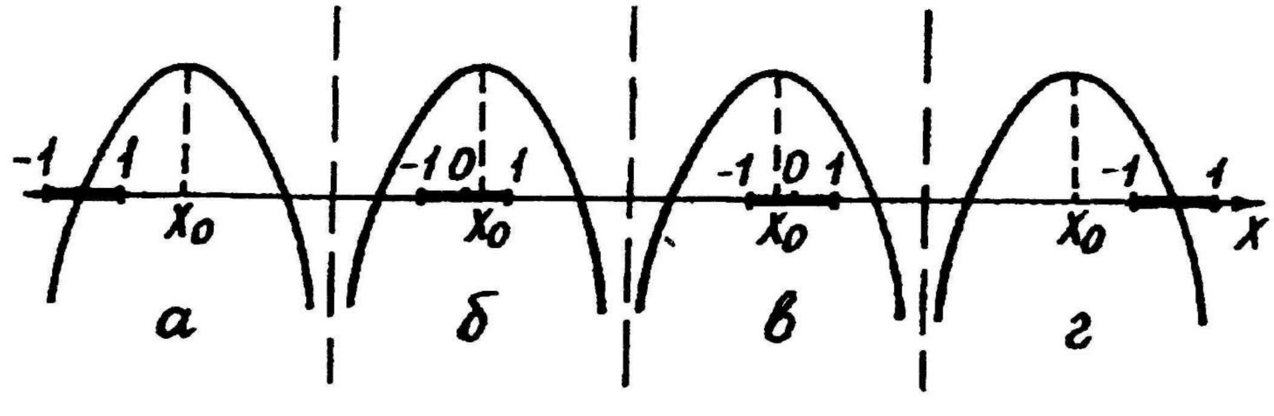


Рис. 57

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2 - ax - 3x^2$

на отрезке [-1;1]

Ответ: Если $1 < -\frac{a}{6}$ то $\max\limits_{[-1;1]}$ y = y(1)= - a – 1,$\min\limits_{[-1;1]}$ y=y(- 1) = a - 1

Если $0 < -\frac{a}{6}$,т.е. $-6 \le a < 0$ то $\max\limits_{[-1;1]} y = y(x_0) = 2 + \frac{a^2}{12}$, $\min\limits_{[-1;1]} y = y(-1) = a - 1$

Если $-1 < -\frac{a}{6} \le 0$, т.е. $0 \le a < 6$,то $\max\limits_{[-1;1]} y = y(x_0) = 2 + \frac{a^2}{12}$, $\min\limits_{[-1;1]} y = y(1) = -a - 1$

Если $-\frac{a}{6} \le -1$,т.е. $a \ge 6$,то $\max\limits_{[-1;1]} y = y(-1) = a - 1$, $\min\limits_{[-1;1]} y = y(1) = -a - 1$

Решения неравенств с параметром:

При каких значениях а неравенство

$$ax^2 + 2(a+1)x + a + 4 > 0$$

выполняется при любых значениях х?

Решение.

$a = 0, \quad x > -2;$

$a \neq 0,$ *тогда* $\begin{cases} a > 0, \\ D < 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} a^2 + 2a + 1 - a^2 - 4a < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > \frac{1}{2} \\ a > 0 \end{cases}$$

$a > \frac{1}{2}.$ *Ответ:* $a > \frac{1}{2}.$

Тесты ЕГЭ группы С:

Найдите все значения *a*, при которых каждое из уравнений

$$\sqrt{41+9\cos x}-a\cos x=0 \qquad |x-a|+7|x+2|+5x=0$$

имеет хотя бы один корень.

Решение *:*
Посмотрим сначала когда первое уравнение имеет корни. С учетом области значений косинуса выражение под корнем всегда положительное.
Получаем: $\sqrt{49+9\cos x}=a\cos x$

А вот здесь сейчас будет интересно. Казалось бы, все прекрасно, возводим в квадрат – и вперед,
по стандартной схеме исследуем корни квадратного уравнения. Но все не так просто. Поскольку на
наличие корней будет влиять знак произведения, стоящего в правой части.
Можно очень легко выкрутиться из этой ситуации без рассмотрения большого числа случаев. Как всегда на помощь приходят графики.

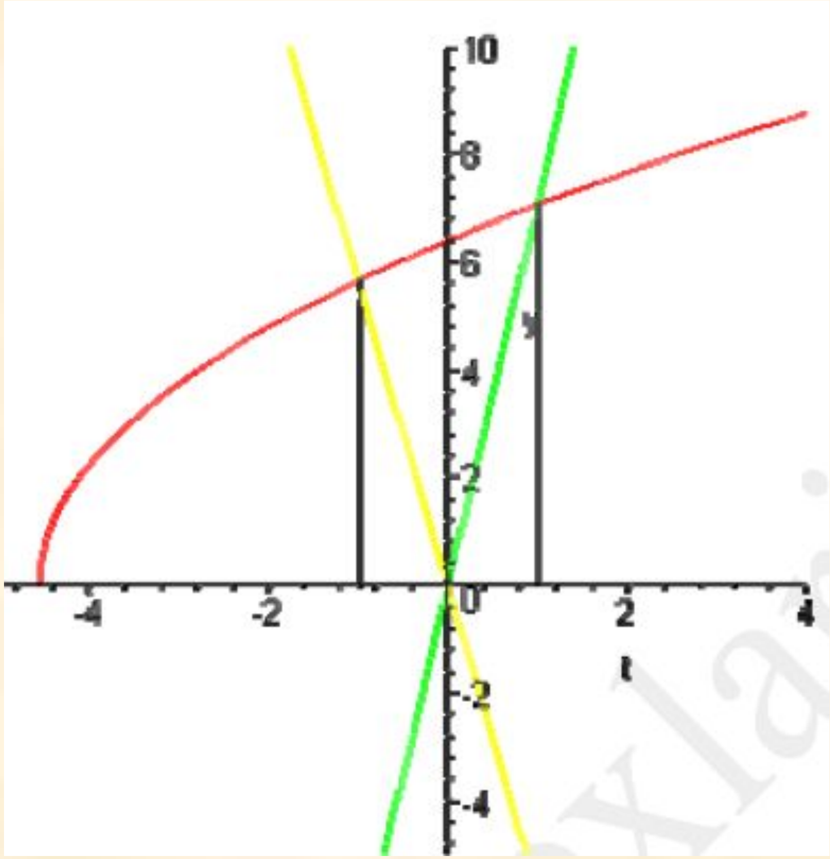
Рассмотрим функции f= $\sqrt{41+9t}$ и $g=at$

Точка пересечения этих графиков должна попасть в отрезок [-1;1] поскольку t= $\cos x$

Точка пересечения для возрастающей прямой *f(1)=g(1)* , $a = 5\sqrt{2}$

для убывающей *f(-1)=g(-1)* , ; $a = -4\sqrt{2}$

Не составляет большого труда увидеть, что точка пересечения будет в промежутке от -1 до 1, если $a \in (-\infty; -4\sqrt{2}] \cup [5\sqrt{2}; +\infty)$



Теперь займемся вторым уравнением. Здесь все проще.

$$|x-a|+7|x+2|+5x=0; \quad \to \quad -|x-a|=7|x+2|+5x$$

Функция, стоящая в правой части достигает своего наименьшего значения -10 в точке $x=-2$. График функции в левой части представляет собой «перевернутый» график модуля, смещенный по оси абсцисс на величину a.

Для того чтобы уравнение имело корни, должно быть выполнено условие $-|-2-a|\ge -10$

Получаем:

$$|-2-a|\le 10; \quad \to \quad -10\le -2-a\le 10; \quad \to \quad -8\le -a\le 12; \quad \to \quad -12\le a\le 8$$

Примечание. Второй случай можно разобрать и иначе, выполнив условие, что наименьшее значение функции $|x-a|+7|x+2|+5x$ должно быть неположительным. Для этого надо раскрыть модули всеми возможными способами и составить систему неравенств.

С учетом условия, полученного для первого уравнения, пишем ответ: $a\in\left[-12;-4\sqrt{2}\right]\cup\left[5\sqrt{2};8\right]$

С учетом условия, полученного для первого уравнения, пишем ответ: $a\in\left[-12;-4\sqrt{2}\right]\cup\left[5\sqrt{2};8\right]$

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{3^x-6a+3}{a-2}+\frac{12}{(a-2)(3^x-3+a)}\le\frac{10a+2}{3-a-3^x}$$

является отрезком длины меньше 1.

Сначала преобразования.

$$\frac{(3^x-6a+3)(3^x-3+a)+12+(10a+2)(a-2)}{(a-2)(3^x-3+a)}\le 0$$

$$\frac{9^x-3\cdot 3^x+a\cdot 3^x-6a\cdot 3^x+18a-6a^2+3\cdot 3^x-9+3a+12+10a^2-20a+2a-4}{(a-2)(3^x-3+a)}\le 0$$

$$\frac{9^x-5a\cdot 3^x+4a^2+3a-1}{(a-2)(3^x-3+a)}\le 0$$

$$\frac{9^x-5a\cdot 3^x+(a+1)(4a-1)}{(a-2)(3^x-3+a)}\le 0$$

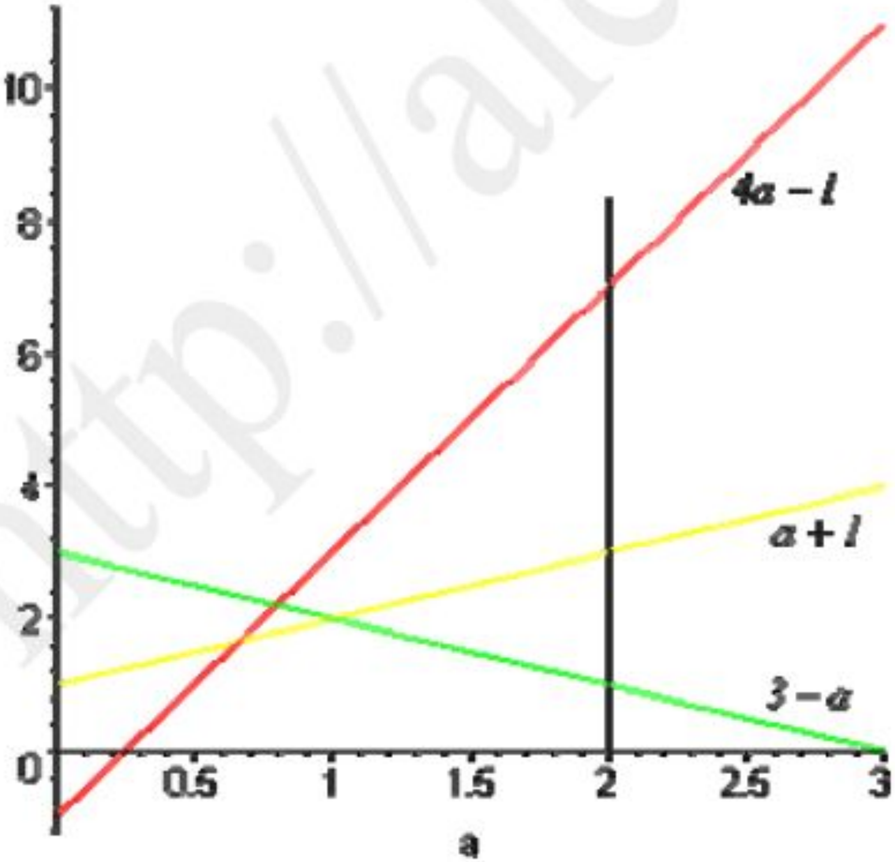
$$\frac{(3^x-a-1)(3^x-4a+1)}{(a-2)(3^x-3+a)}\le 0$$

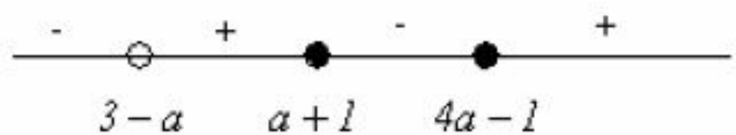
Обозначим $3^x = t > 0$

$$\frac{(t-(a+1))(t-(4a-1))}{(a-2)(t-(3-a))} \le 0$$

А вот теперь самое интересное. Объяснение «по-простому». Первая мысль: если $a < 2$, то каково бы ни было взаимное расположение нулей числителя и знаменателя, чередование знаков в методе интервалов слева направо будет иметь вид «плюс-минус-плюс-минус». Т.е. будет неограниченный промежуток отрицательности. Естественно, являться отрезком меньше 1, как требует условие, он не может. Значит, в этом случае решений нет.

Теперь вторая мысль. Если $a > 2$, то попробуем расположить нули числителя и знаменателя на числовой прямой. Для этого применим графический способ.





Вот так можно легко и наглядно решить непростую в общем-то задачку. Осталось совсем немного. Получаем два отрицательных интервала. Отрезок должен быть длиной меньше 1, а вот что делать с неограниченным интервалом? Ответ простой – его не должно быть вообще.

Ведь $t > 0$, Значит, если $3 - a \le 0$, то решение будет только то, которое удовлетворяет условию задачи. Получаем условие $a \ge 3$.

Теперь последнее. Пусть $3^{x_1} = t_1;\quad 3^{x_2} = t_2;\quad \to\quad x_1 = \log_3 t_1;\quad x_2 = \log_3 t_2;$

$$x_2 - x_1 = \log_3 \frac{t_2}{t_1} < 1;\quad \to\quad \frac{t_2}{t_1} < 3$$

Для нашего решения получаем: $\dfrac{4a-1}{a+1} < 3\quad \to (a+1>0) \to\quad 4a-1 < 3a+3;$

Итого: $a < 4$

Окончательно получаем ответ: $a \in [3;4)$

Задача 3

Найдите все значения параметра *a*, при которых данное уравнение имеет три решения.

$$\left|(2x-a)^2-|x|-28\right|+2|x|=16$$

Будем решать с использованием графических иллюстраций. Все эти графики легко прикинуть от руки и схематически.

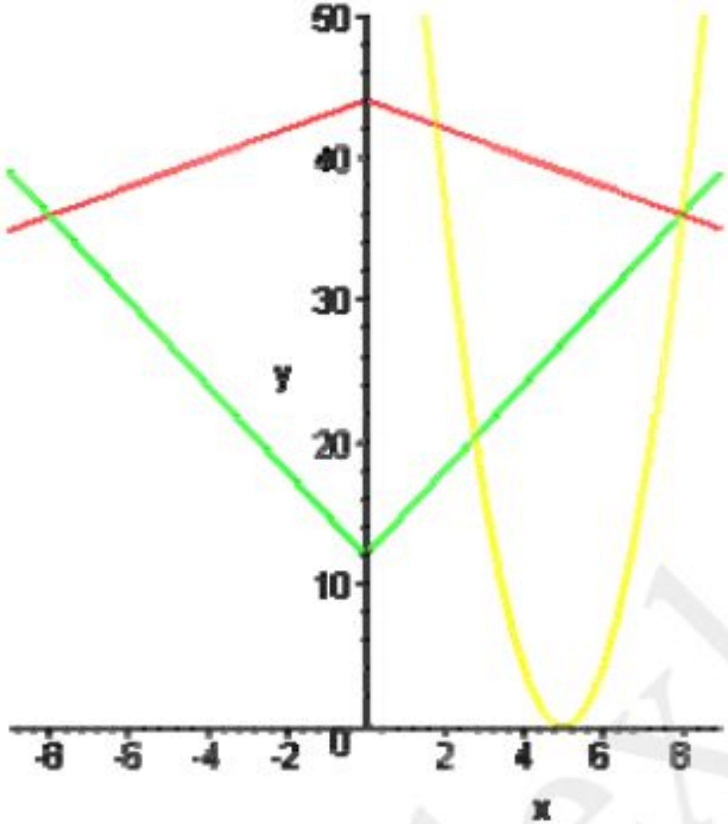
$$\left|(2x-a)^2-|x|-28\right|=16-2|x|$$

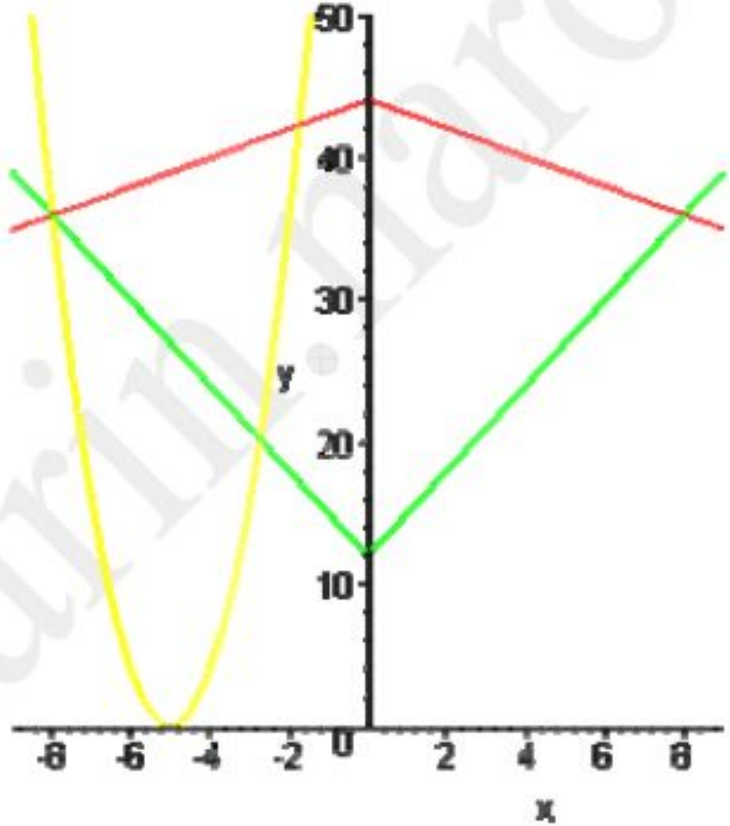
Решения вообще будут, если $16-2|x|\geq 0; \ \rightarrow \ |x|\leq 8 \ \rightarrow \ -8\leq x\leq 8$.

Это важный факт, он будет использован позже.
Теперь преобразуем наше уравнение.

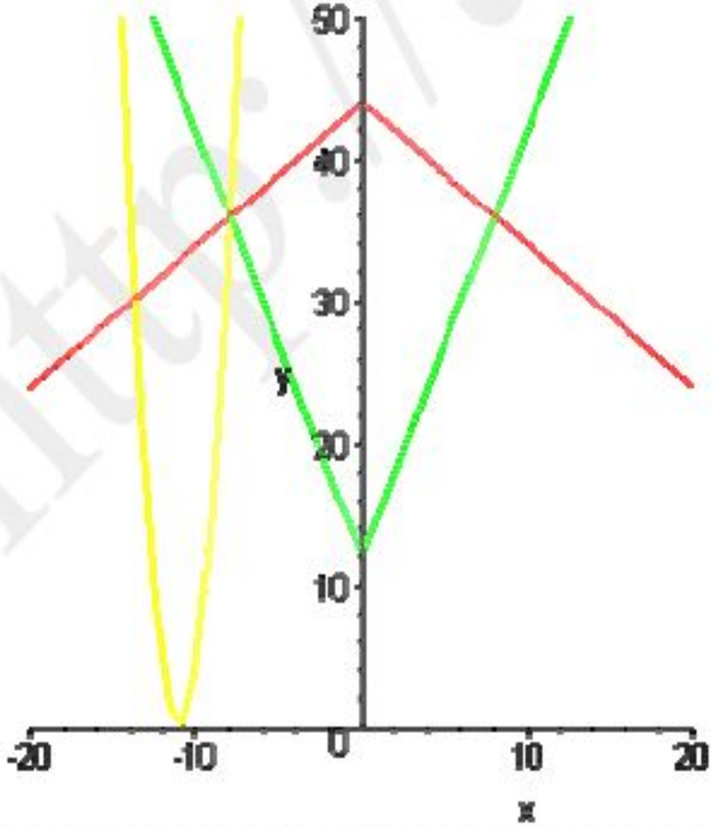
$$\left[\begin{array}{l}(2x-a)^2-|x|-28=16-2|x|\\(2x-a)^2-|x|-28=-16+2|x|\end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l}(2x-a)^2=44-|x|\\(2x-a)^2=3|x|+12\end{array}\right.$$

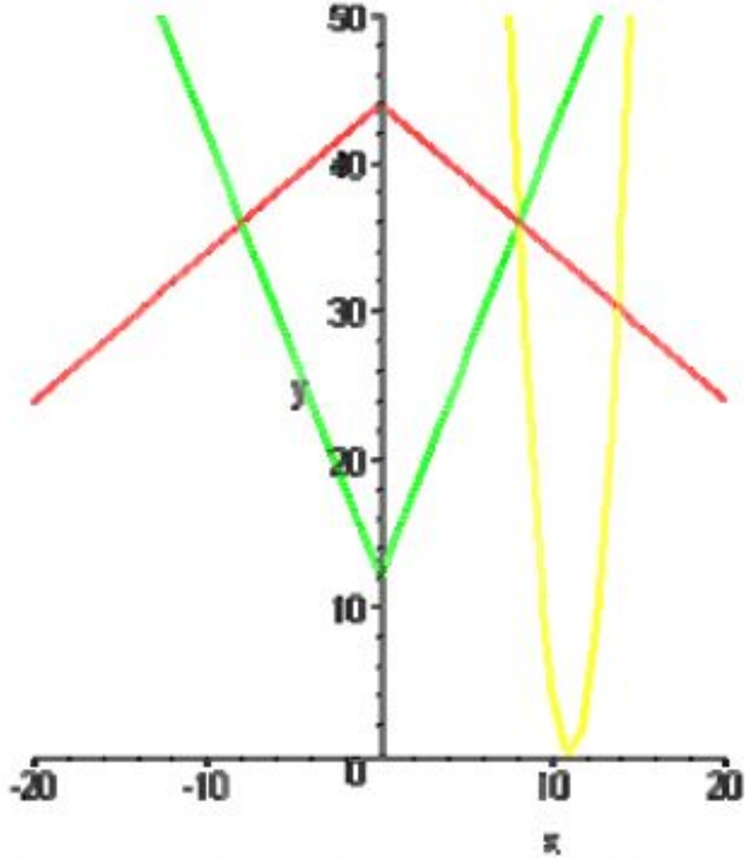
Теперь построим графики трех функций $f_1=(2x-a)^2; \quad f_2=44-|x|; \quad f_3=3|x|+12;$





Наличие трех решений показано на двух верхних графиках. Понятно, что при любом другом расположении параболы никак не получить трех точек пересечения. Конечно, возможны еще два случая, изображенные ниже:





Но в этих случаях два корня из трех не будут попадать в промежуток от -8 до 8, о чем мы говорили выше.

Точку пересечения ломаных найти несложно

$$44-|x|=3|x|+12 \quad \rightarrow \quad |x|=8;$$

Находим а.

$$\left|(2x-a)^2-36\right|=0 \quad \rightarrow \quad 2x-a=\pm 6; \quad \rightarrow a=22,-22,10,-10$$

Описанным чуть выше двум случаям, которые удовлетворяют условию задачи, соответствуют значения $a=\pm 10$

Ответ: $a=\pm 10$

С2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{\cos x - a}(\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x + \sqrt{3}\sin x + \cos x + \sqrt{3} + 1) = 0$ не имеет корней.

Решение:

C2. $\log_{\cos x - a}(\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x + \cos x + \sqrt{3}\sin x + \sqrt{3} + 1) = 0$

Уравнение не имеет корней, если

$$\left[\begin{array}{l} \cos x - a < 0, \\ \cos x - a = 1; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \geqslant \cos x, \\ a = \cos x \neq -1. \end{array}\right.$$

По определению логарифма имеем:

$\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x + \cos x + \sqrt{3}\sin x + \sqrt{3} + 1 = 1.$

Найдём $\cos x$.

$2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x + \sqrt{3}\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x + \cos x + \sqrt{3} = 0,$

$\cos x(2\sin x + 1) + \sqrt{3}(\sin^2 x + \sin x + 1 - \cos^2 x) = 0,$

$\cos x(2\sin x + 1) + \sqrt{3}(2\sin^2 + \sin x) = 0,$

$\cos x(2\sin x + 1) + \sqrt{3}\sin x(2\sin x + 1) = 0,$

$(2\sin x + 1)(\cos x + \sqrt{3}\sin x) = 0,$

1. $2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\dfrac{1}{2}, \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

2. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\sin x = -\cos x, \operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}},$

$\cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Найдём значение a, решив систему:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a \geqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ a = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right\} \cup \left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right), \\ \left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right\} \cup \left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right\} \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right).$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right\} \cup \left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.

С3. Найдите наименьшее значение меньшего из корней уравнения $x^2 + 9x + ax = 22 + a$, если множеством значений параметра a является промежуток $(-\infty; -7]$.

Решение:

С3. $x^2+9x+ax=22+a$ $x^2+9x-22=a(1-x)$.

1) $1-x=0$ $x=1$. при $x=1 \Rightarrow 1+9-22\neq 0$.

$x=1$ — не является корнем уравнения.

2) $1-x\neq 0$, тогда $\dfrac{x^2+9x-22}{1-x}=a$.

Рассмотрим функцию $y=\dfrac{x^2+9x-22}{1-x}$, $x\neq 1$.

$$y'(x)=\frac{(2x+9)(1-x)+x^2+9x-22}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{2x-2x^2+9-9x+x^2+9x-22}{(1-x)^2}=\frac{-x^2+2x-13}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{-(x^2-2x+13)}{(x-1)^2}$$

на $D(y)$ $x^2-2x+13>0$, значит, $y'(x)<0$, таким образом, функция $y=\dfrac{x^2+9x-22}{1-x}$ убывает на промежутке $(-\infty;1)$ и на промежутке $(1;+\infty)$ (см. рис. 119).

При $a=-7$ уравнение $\dfrac{x^2+9x-22}{1-x}=-7$ имеет 2 корня: $x=-5$ и $x=3$.

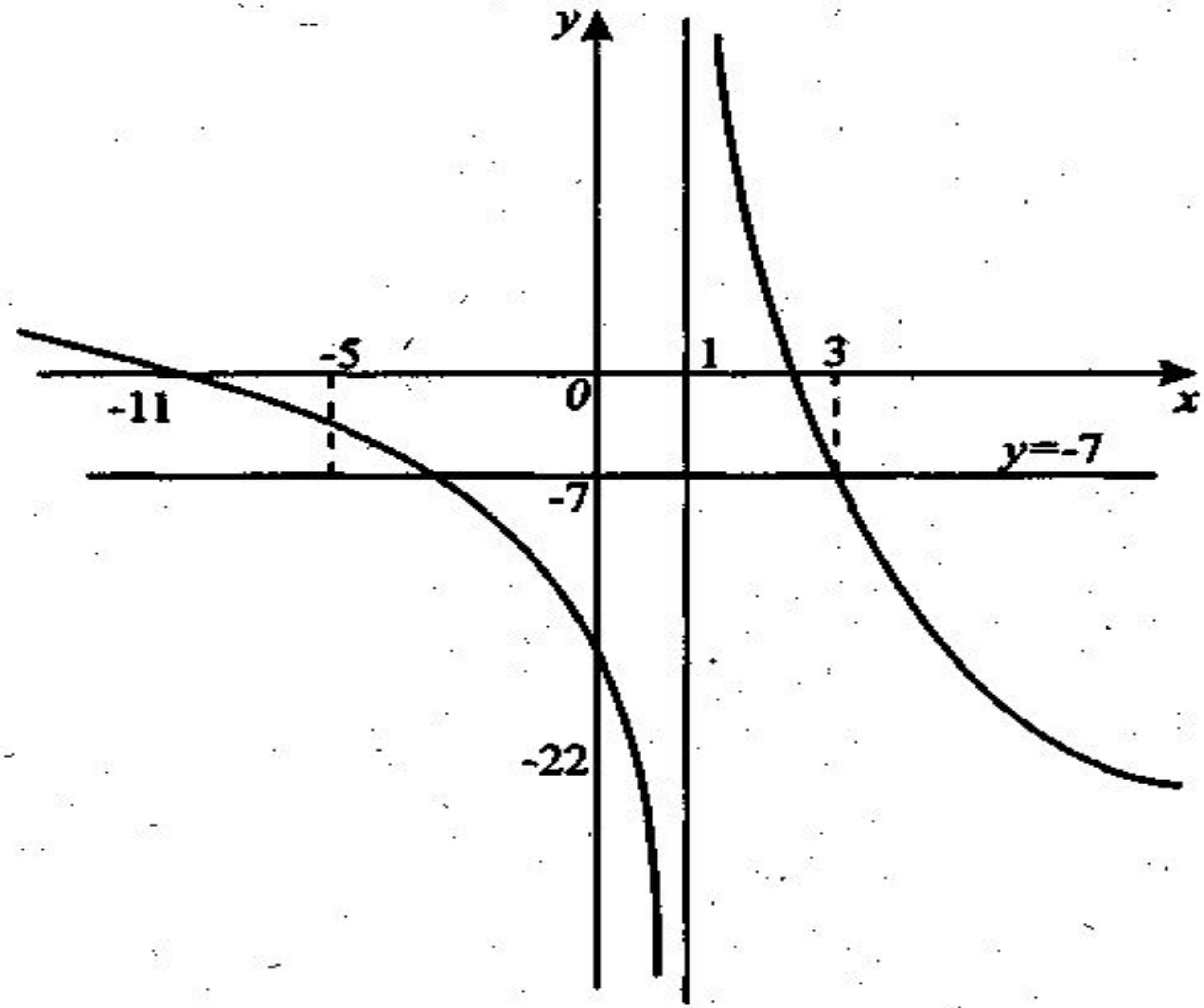


Рис. 119.

При $a < -7$ меньший корень больше -5, но меньше 1, следовательно, наименьшее значение меньшего из корней равно -5.

Ответ: -5.

С4. В основании правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен квадрат $ABCD$. Точка M является центром грани AA_1B_1B, а на ребре AD выбрана точка N так, что $\frac{AN}{ND} = p$. При каких значениях параметра p площадь треугольника NCC_1 равна двум площадям сечения пирамиды $MNBB_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер B_1M, NB, NB_1?

Решение:

С4. 1. Пусть $O \in B_1M_1$, $E \in NB$, $Q \in NB_1$ (см. рис. 120). По условию точки O, E, Q — середины соответствующих рёбер, значит, OQ и EQ — средние линии граней MB_1N и BNB_1. Следовательно, сечением пирамиды $MNBB_1$ плоскостью OEQ является параллелограмм $OQEF$, тогда $S_{NCC_1} = 2S_{OQEF}$.

2. Обозначим через a сторону квадрата $ABCD$, через h — высоту призмы, тогда $AD = a$, $CC_1 = h$.

$\frac{AN}{ND} = p$, $p > 0$, отсюда $AN = \frac{ap}{p+1}$, $ND = \frac{a}{p+1}$.

В $\triangle NDC$: $NC = \sqrt{DC^2 + ND^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{p+1}\right)^2} =$

$= \frac{a\sqrt{p^2+2p+2}}{p+1}$, $S_{NCC_1} = \frac{1}{2} NC \cdot CC_1 = \frac{ah\sqrt{p^2+2p+2}}{p+1}$.

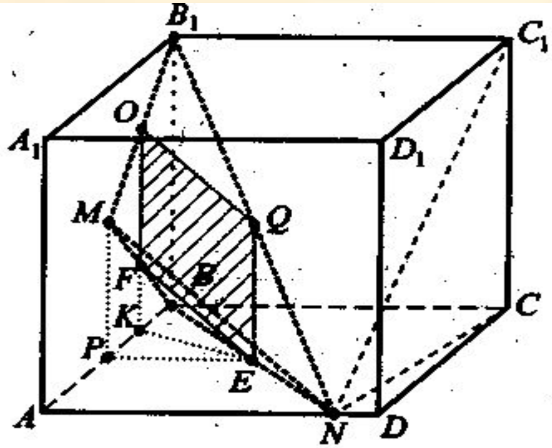


Рис. 120.

3. В четырёхугольнике AA_1B_1B проведём $MP \parallel BB_1$ и продолжим отрезок OF до пересечения с AB, тогда $MP \perp AB$, $OK \perp AB$. $AM = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{2}$, $PK = \frac{1}{2}PB = \frac{a}{4}$.

4. В $\triangle ABN$: EP — средняя линия, $EP = \frac{1}{2}AN = \frac{ap}{2(p+1)}$.

В $\triangle KPE$:

$$KE = \sqrt{KP^2 + PE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{16} + \left(\frac{ap}{2(p+1)}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5p^2+2p+1}}{4(p+1)}.$$

$BB_1 \perp ABC, OK \parallel BB_1 \Rightarrow OK \perp ABC, OK \perp KE$, значит, KE — высота параллелограмма $OQEF$.

$$S_{OQEF} = QE \cdot KE = \frac{ah\sqrt{5p^2+2p+1}}{4(p+1)},$$

$$2S_{OQEF} = \frac{ah\sqrt{5p^2+2p+1}}{2(p+1)}.$$

Имеем, $\frac{ah\sqrt{p^2+2p+2}}{p+1} = \frac{ah\sqrt{5p^2+2p+1}}{2(p+1)}$,

$4p^2+8p+8 = 5p^2+2p+1$, $p^2-6p-7=0$,

$p_1 = 7$, $p_2 = -1$ — не удовлетворяет условию $p > 0$.

Ответ: 7.

С5. Найдите все значения параметра *a*, при которых система уравнений
$$\begin{cases} 2\cdot 1000^x + 16 - a^2 - 2a = (2a+9)(y-1)^2 - 2ay, \\ (x^2+1)\lg(y-1) = x^3 + x \end{cases}$$
имеет ровно два различных решения

Решение:

С5. $\begin{cases} 2\cdot 1000^x + 16 - a^2 - 2a = (2a+9)(y-1)^2 - 2ay, \\ (x^2+1)\lg(y-1) = x^3 + x. \end{cases}$

Из второго уравнения системы выразим y через x.

$\lg(y-1) = \dfrac{x(x^2+1)}{x^2+1}$, $y-1 = 10^x$, $y = 10^x + 1$.

Подставим $y = 10^x + 1$ в первое уравнение системы

$2\cdot 10^{3x} + 16 - a^2 - 2a = (2a+9)\cdot 10^{2x} - 2a(10^x + 1)$.

$a^2 + 2a - 16 - 2\cdot 10^{3x} + 2a\cdot 10^{2x} + 9\cdot 10^{2x} - 2a\cdot 10^x - 2a = 0$.

$a^2 - 2(10^x - 10^{2x})a - (2\cdot 10^{3x} - 9\cdot 10^{2x} + 16) = 0$.

$a_{1,2} = (10^x - 10^{2x}) \pm \sqrt{10^{2x} - 2\cdot 10^{3x} + 10^{4x} + 2\cdot 10^{3x} - 9\cdot 10^{2x} + 16}$.

$a_{1,2} = (10^x - 10^{2x}) \pm (10^{2x} - 4)$, $10^{2x} - 4 \neq 0$, $10^x \neq 2$.

$a_1 = 10^x - 4$, $a_2 = -2\cdot 10^{2x} + 10^x + 4$.

1. $10^x = a + 4$, $a + 4 > 0$, $a > -4$.

Так как $10^x \neq 2$, то $a \neq -2$.

Система имеет одно решение при $a > -4$, $a \neq -2$

2. $a = -2\cdot 10^{2x} + 10^x + 4$ (1)

По условию система имеет ровно два различных решения. Найдём, при каких значениях a уравнение (1) имеет единственный корень. Рассмотрим функцию $y = -2\cdot 10^{2x} + 10^x + 4$, $10^x = t$, $t > 0$.

$y = -2t^2 + t + 4$, $t_0 = -\dfrac{1}{2\cdot(-2)} = \dfrac{1}{4}$, $y\left(\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} + 4 = \dfrac{33}{8}$

(см. рис. 121).

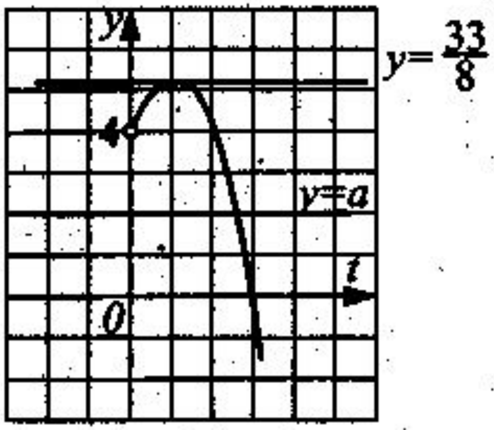


Рис. 121.

Уравнение (1) имеет единственный корень при $a = \dfrac{33}{8}$ и при $a \leqslant 4$.

Итак, исходная система имеет ровно два решения, если

$a \in (-4; -2) \cup (-2; 4] \cup \left\{\dfrac{33}{8}\right\}$.

Ответ: $a \in (-4; -2) \cup (-2; 4] \cup \left\{\dfrac{33}{8}\right\}$.

Спасибо за вниман