

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ  
сударственное образовательное учреждение высшего образования Московской облас  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБЛАСТНОЙ УНИВЕРСИТЕТ  
(МГОУ)

федра высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математи

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

тема: «Задачи с параметром в материалах ГИА и методы их  
решения

выполнил студент: (по материалам ЕГЭ за последние 5 лет)»

11 ГРУППЫ 1 КУРСА

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТА

АГАБАБОВА АНАСТАСИЯ  
КОНСТАНТИНОВНА

Научный руководитель:  
ст. преподаватель Высоцкая Полина Андреевна

# ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ РАБОТЫ

- Цель: изучение методов решения задач с параметром из материалов ЕГЭ.
- Задачи:
  - получение общего представления о заданиях с параметрами в материалах ЕГЭ;
  - классификация методов их решения;
  - разработка набора упражнений, на примерах которых реализуются эти методы.

# ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ В ЕГЭ

- Задания с параметром были введены в материалы ЕГЭ ещё с 2001 года, когда экзамен проводился в форме эксперимента. С 2009 года ЕГЭ является единственной формой выпускных экзаменов, где также содержатся задачи с параметром. Введение параметра способствовало появлению качественно новых типов задач, а также таких, как решение уравнений и неравенств.

# КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

- **Тип 1.** Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.
- **Тип 2.** Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).
- **Тип 3.** Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения, неравенства, их системы и совокупности имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).
- **Тип 4.** Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

# ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, СОДЕРЖАЩИХ ПАРАМЕТР

- Аналитический метод - это способ прямого решения, повторяющий стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра.

# ПРИМЕР:

Найдите все значения параметра  $c$ , при каждом из которых уравнение не имеет решений.

$$8 \sin^3 x = c + 9 \cos 2x$$

Решение: Перепишем уравнение в виде

$$8 \sin^3 x = c + 9(1 - 2\sin^2 x), \quad 8 \sin^3 x + 18 \sin^2 x = c + 9$$

Найдём множество значений левой части получившегося уравнения.

Для этого обозначим  $\sin x = t$  и рассмотрим функцию  $f(t) = 8t^3 + 18t^2$  при  $t \in [-1; 1]$ .

Её производная равна  $f'(t) = 24t^2 + 36t = 12(2t^2 + 3)$ .

На отрезке  $[-1; 1]$  производная обращается в ноль при  $t = 0$ , положительна при  $t > 0$ , и отрицательна при  $t < 0$ . Значит, при  $t \in [-1; 0]$  функция убывает, а при  $t \in [0; 1]$  возрастает. Наименьшее значение функции  $f(t)$  на отрезке – это  $f(0) = 0$ . Чтобы определить наибольшее значение, найдём значения  $f(t)$  на концах отрезка:  $f(-1) = 10$ ,  $f(1) = 26$ . Значит, наибольшее значение равно 26, и функция  $f(t)$  принимает все значения из отрезка  $[0; 26]$ .

Следовательно, данное уравнение имеет решения при  $c + 9 \in [0; 26]$ , т. е. при  $c \in [-9; 17]$ , а при всех остальных с решенияй нет.

Ответ:  $c \in (-\infty; -9) \cup (17; +\infty)$

# ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, СОДЕРЖАЩИХ ПАРАМЕТР

- Графический метод. Координатная плоскость ( $xOy$ )  
**Легче всего решать уравнения с помощью графического представления зависимости переменной  $x$  от параметра  $c$ . На плоскости ( $xOy$ ) функция  $y = f(c)$  задает группу кривых зависящих от параметра  $c$ . Нас будет интересовать с помощью какого преобразования плоскости можно переходить к другим кривым группы.**

# ПРИМЕР:

**Решение:** Заметим, что количество решений уравнения  $|x^2 - 7|x| + 6| = c$  равно количеству точек пересечения графиков функций

$$y = |x^2 - 7|x| + 6| \text{ и } y = c.$$

**Графики функций:**

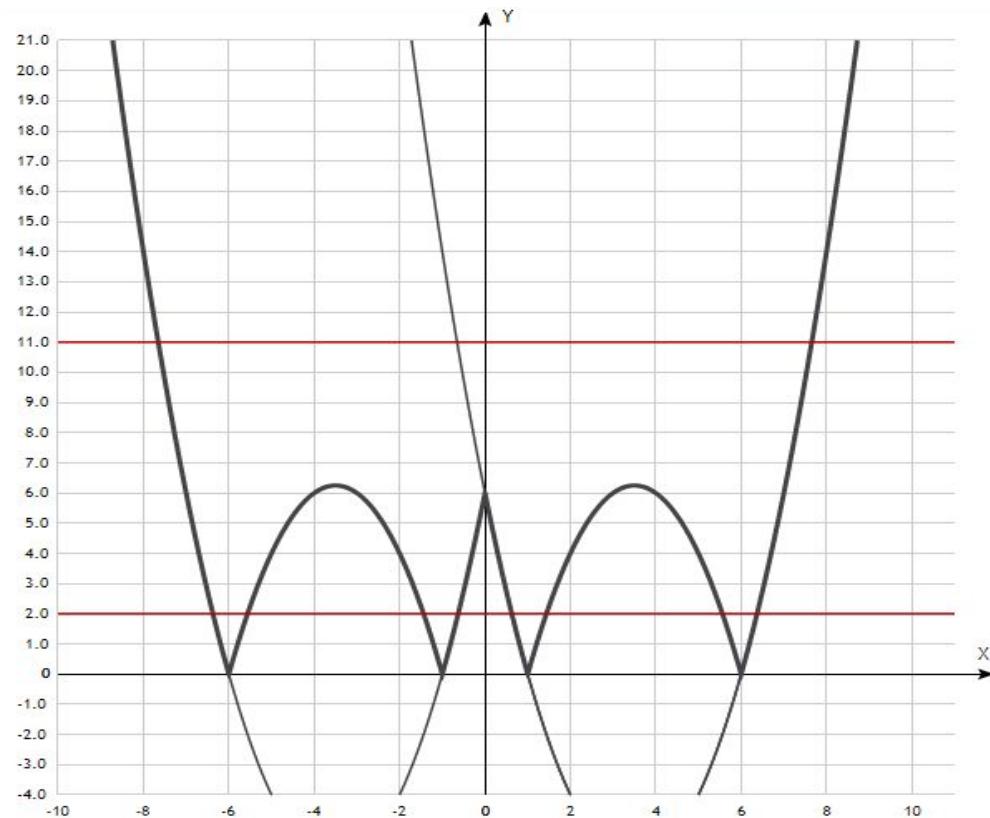
1)  $y = x^2 - 7x + 6 = (x - \frac{7}{2})^2 - \frac{25}{4};$

2)  $y = x^2 - 7|x| + 6;$

3)  $y = |x^2 - 7|x| + 6|$  показаны на рисунке 1.

$y = c$  - это горизонтальная прямая. По графику несложно установить количество точек пересечения в зависимости от  $c$  (например, при  $c = 11$  - две точки пересечения; при  $c = 2$  - восемь точек пересечения).

**Ответ:** при  $c < 0$  - решений нет; при  $c = 0$  и  $c = \frac{25}{4}$  - четыре решения; при  $0 < c < 6$  - восемь решений; при  $c = 6$  - семь решений; при  $6 < c < \frac{25}{4}$  - шесть решений; при  $c > \frac{25}{4}$  - два решения.



# ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, СОДЕРЖАЩИХ ПАРАМЕТР

- Графический метод. Координатная плоскость ( $xOc$ )  
Рассмотрим метод, упрощающий работу по решению задач с параметром. Метод состоит в следующем:
  - Из уравнения (неравенства) с переменной  $x$  и параметра с выразим параметр как функцию от  $x$ :  $c = f(x)$ .
  - В координатной плоскости ( $xOc$ ) строим график функции:  $c = f(x)$ .
  - Рассмотрим прямые  $c = const$  и выделим те промежутки оси  $Oc$ , на которых эти прямые удовлетворяют следующим условиям: а) не пересекает график функции  $c = f(x)$ , б) пересекает график функции  $c = f(x)$  в одной точке, в) в двух точках, г) в трех точках и так далее.
  - Если поставлена задача найти значения  $x$ , то выражаем  $x$  через  $c$  для каждого из найденных промежутков значения  $c$  в отдельности.

Взгляд на параметр как на равноправную переменную находит свое отражение в графических методах. Таким образом, возникает координатная плоскость ( $xOc$ ).

# ПРИМЕР:

одно решение.

$$\begin{cases} x^2 - x - c \leq 0, \\ x^2 + 2x - 6c \leq 0. \end{cases}$$

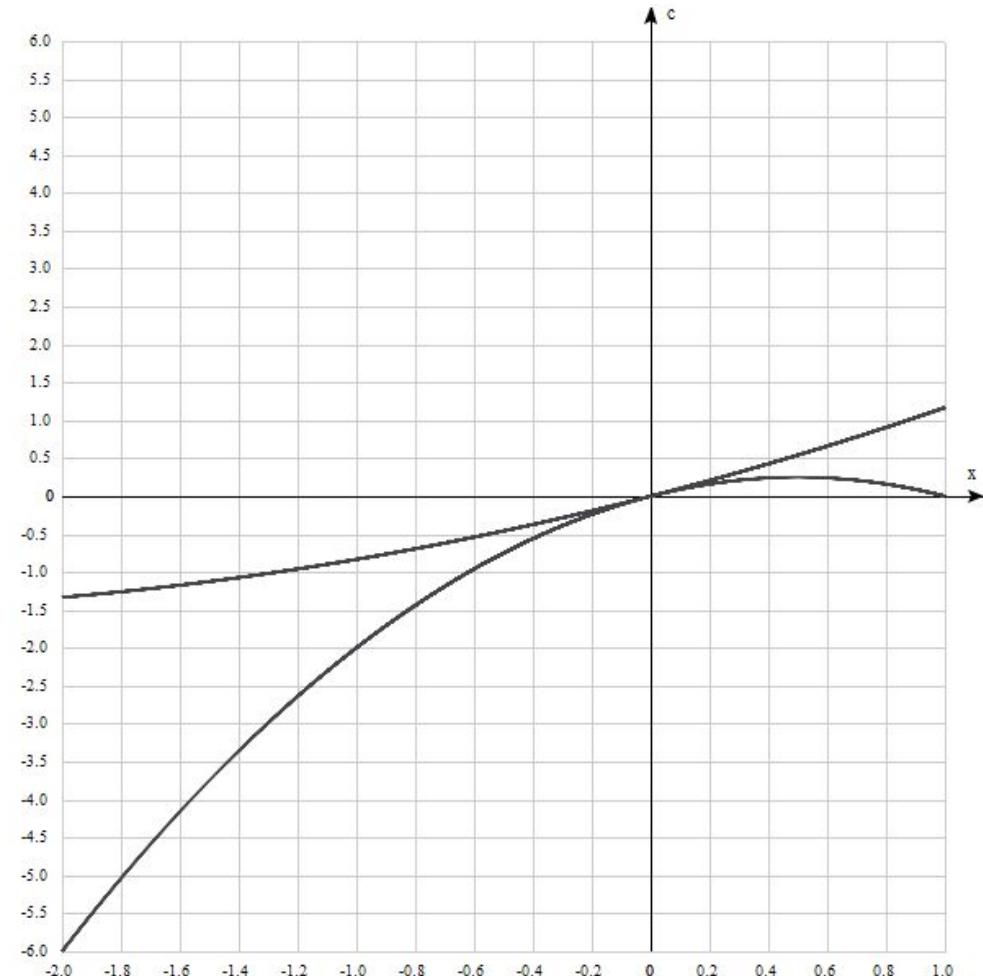
**Решение:** Изобразим решения системы неравенств на плоскости  $xOc$ . (Рисунок 2)

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} c \leq -x^2 + x \\ c \leq \frac{x^2 + 6x}{6} \end{cases}$$

Первому неравенству удовлетворяют точки, лежащие на параболе  $c = -x^2 + x$  и ниже неё, а второму – точки, лежащие на параболе  $c = \frac{x^2 + 6x}{6}$  и выше неё. Находим координаты вершин парабол и точек их пересечения, а затем строим график. Вершина первой параболы –  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ , второй параболы  $\left(-1; -\frac{1}{6}\right)$ , точки пересечения –  $(0; 0)$  и  $\left(\frac{4}{7}; \frac{12}{49}\right)$ . Видно, что система имеет ровно одно решение в случаях  $c = 0$  и  $c = \frac{1}{4}$ .

**Ответ:**  $c = 0, c = \frac{1}{4}$



# ПРИМЕР (РЕШЕНИЕ ПРЕМЯ СПОСОБАМИ):

Решение: Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} c - x^2 = (x - 1)^2 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x + 1 - c = 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

1 способ (аналитический): Корни квадратного уравнения:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{2c - 1}}{2}; \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{2c - 1}}{2}$$

■ Выясним, при каких значениях  $c$  они лежат в области  $\frac{1 - \sqrt{2c - 1}}{2} \geq 1 \rightarrow \sqrt{2c - 1} \leq -1 \rightarrow$  решений нет;  $\frac{1 + \sqrt{2c - 1}}{2} \geq 1 \rightarrow \sqrt{2c - 1} \geq 1 \rightarrow c \geq 1.$

Ответ: при  $\sqrt{2c - 1} \leq -1$  решений нет; при  $c \geq 1 \quad x = \frac{1 + \sqrt{2c - 1}}{2}.$

# ПРИМЕР (РЕШЕНИЕ ПРЕДЫДУЩИХ ПРИМЕРОВ СПОСОБАМИ):

Для всех действительных значений параметра с решите уравнение  $x - \sqrt{c - x^2} = 1$

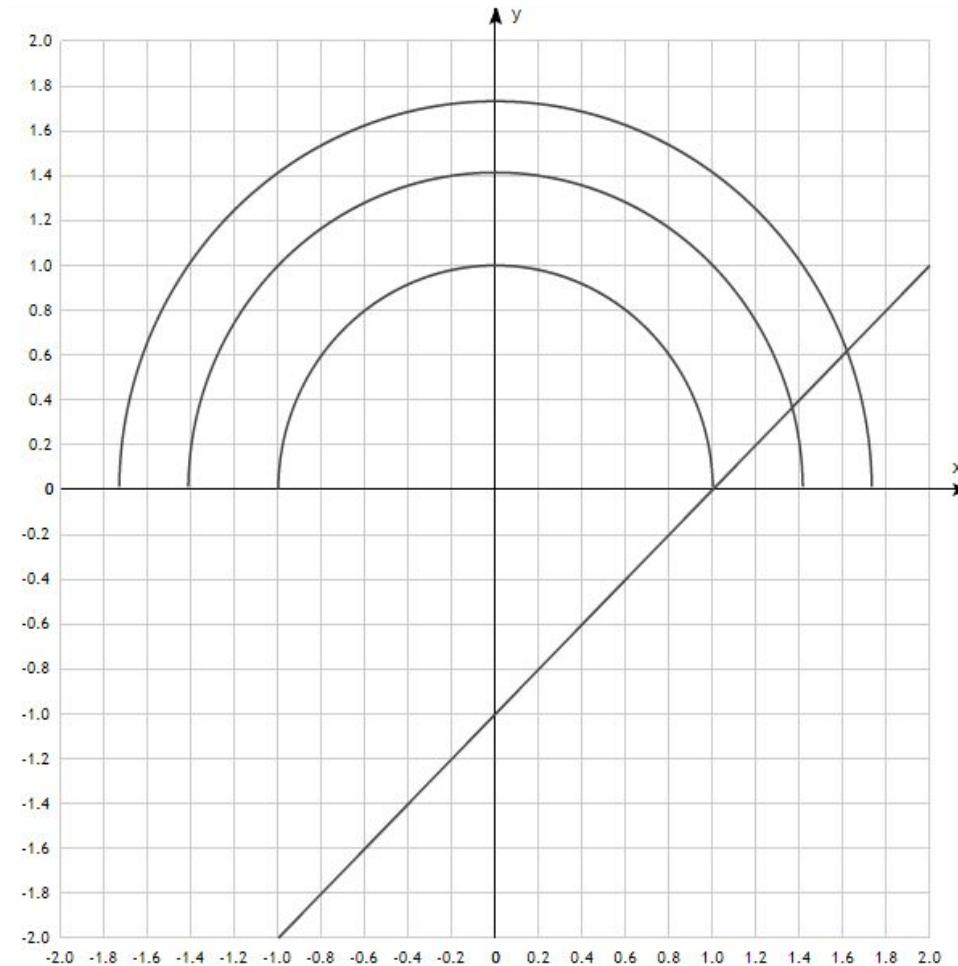
Решение:

2 способ (графический в плоскости  $xOy$ ): Преобразуем исходное уравнение

$$\sqrt{c - x^2} = x - 1; \quad y_1 = \sqrt{c - x^2}, \quad y_2 = x - 1.$$

Построим графики функций. Решением уравнения будут абсциссы точек пересечения графиков функций. Количество решений - количество точек пересечения (Рисунок 3)

Ответ: при  $\sqrt{2c - 1} \leq -1$  решений нет; при  $c \geq 1 \quad x = \frac{1 + \sqrt{2c - 1}}{2}$ .



# ПРИМЕР (РЕШЕНИЕ ПРЕДЫДУЩИХ ПРИМЕРОВ СПОСОБАМИ):

Для всех действительных значений параметра  $c$  решите

$$\text{уравнение } x - \sqrt{c - x^2} = 1$$

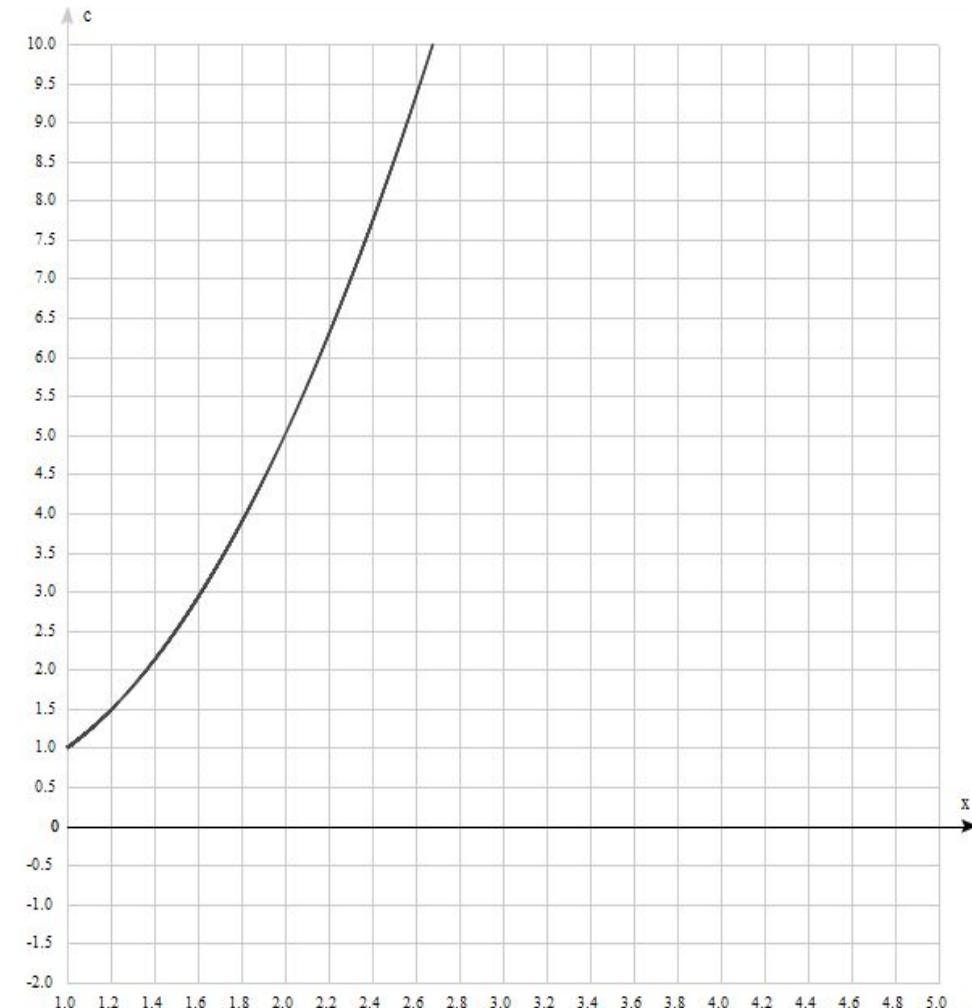
Решение:

3 способ (графический в плоскости  $xOc$ ): Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} c = 2x^2 - 2x + 1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Решение системы - это точки параболы для которых, как видно из рисунка 4, решение существует при  $x \geq 1$ , причем каждому значению соответствует одно решение.

Ответ: при  $\sqrt{2c - 1} \leq -1$  решений нет; при  $c \geq 1$   $x = \frac{1+\sqrt{2c-1}}{2}$ .



# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- ✓ Подводя итоги можно сделать вывод о том, какой из методов решения наиболее удобный.

Исходя из примеров, приведенных в работе, наглядным способом решения является графический. Этот способ позволяет упростить анализ задач, а в некоторых случаях является единственным путем к решению задачи. Также данный метод решения задействует весь набор знаний, связанных с исследованием функции. В то время как аналитический способ решения задач с параметром является наиболее трудным, который требует больше знаний высокого уровня.

# ЛИТЕРАТУРА

- Денищева, Л. О. Единый Государственный экзамен по математике / Л. О. Денищева, Ю. А. Глазков и др. – М.: Интеллект-Центр, 2009. – 272 с.
- Козко, А. И. Задачи с параметром и другие сложные задачи / А. И. Козко, В. Г. Чирский – М.: МЦНМО, 2007. – 296 с.
- Крамор, В. С. Примеры с параметрами и их решения / В. С. Крамор - М.: АРКТИ, 2001. – 48 с.
- Крамор, В. С. Задачи с параметрами и методы их решения / В. С. Крамор – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2007. – 416 с.
- Кулабухова, С. Ю. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013 / С. Ю. Кулабухова, Ф. Ф. Лысенко – Ростов-на-Дону: Легион, 2012. – 400 с.
- Локоть, В. В. Задачи с параметрами / В. В. Локоть – М.: АРКТИ, 2005. – 96 с.
- Мирошин, В. В. Решение задач с параметрами. Теория и практика / В. В. Мирошин - М.: Экзамен, 2009. – 286 с.
- Прокофьев, А. А. Математика. Подготовка к ЕГЭ. Решение задач с параметрами / А. А. Прокофьев, А. Г. Корянов - М.: Легион, 2015. - 336 с.
- Просветов, Г. И. Задачи с параметрами и методы их решения / Г. И. Просветов - М.: Альфа-пресс, 2010. - 420 с.
- Рязановский, А. Р. Готовимся к ЕГЭ: Математика - решение задач повышенной сложности / А. Р. Рязановский, В. В. Мирошин - М.: Интеллект-Центр, 2007. - 480 с.
- Субханкулова, С. А. Задачи с параметрами / С. А. Субханкулова – М.: ИЛЕКСА, 2010. – 208 с.
- Шахмейстер, А. Х. Задачи с параметрами на экзаменах / А. Х. Шахмейстер - М.: Издательство МЦНМО: СПб.: «Петроглиф»: «Виктория плюс», 2009. – 248 с.
- Решение задач с параметром // ЕГЭ по математике URL: <http://4ege.ru/matematika/> (дата обращения: 15.04.18).
- Задачи с параметром // ЕГЭ по математике URL: <https://academyege.ru/> (дата обращения: 17.04.18).
- Задачи с параметром из ЕГЭ // ЕГЭ по математике URL : <https://yourtutor.info/> (дата обращения: 19.04.18)

**СПАСИБО ЗА  
ВНИМАНИЕ!**