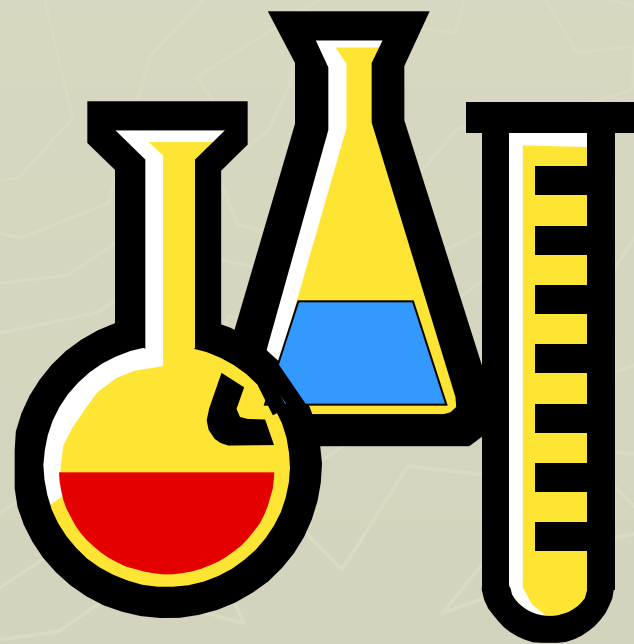
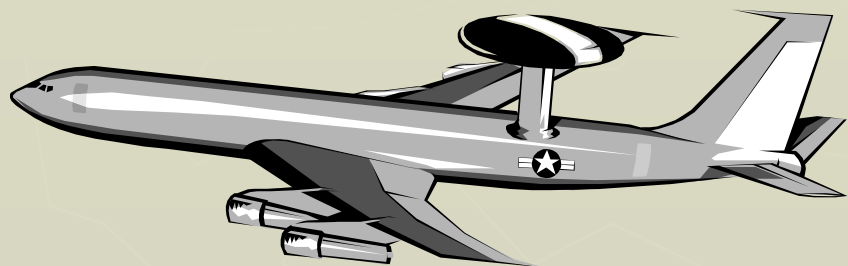


Задачи, приводящие к понятию производной.



В начале было слово.



▶ К понятию производной можно прийти, рассматривая, например, такое широко используемое в физике понятие, как мгновенная скорость неравномерно движущегося тела.



▶ Мы познакомились с этим понятием, изучая в курсе физики раздел кинематики, а точнее кинематики прямолинейного неравномерного движения.



- ▶ Совершенно верно. Как же Вы представляете себе мгновенную скорость? Что это такое?



- ▶ Мгновенной скоростью тела называют скорость, которую оно имеет в данный момент времени (в данной точке траектории)



- ▶ А как Вы представляете себе мгновенную скорость?



- ▶ Так и представляю... Если тело движется равномерно, то в разные моменты времени его скорость одинакова. Если тело движется неравномерно (ускоряясь или замедляясь, то в разные моменты времени его скорость будет, вообще говоря, различной



- ▶ Разве Вы не чувствуете, что фраза «скорость в данный момент времени» не более как синоним фразы «мгновенная скорость»? Как говорится, «что в лоб, что по лбу». Термин «скорость в данный момент времени» нуждается в разъяснении в той же мере, в какой нуждается в нём термин «мгновенная скорость».



- ▶ Физик эту проблему решает просто. У него есть приборы, например, спидометр. А математик создаст математическую модель процесса.

Итак, проблема поставлена.

Приступим к её решению.

Остановись мгновение –

мы тебя исследуем !

Сначала мы определили «территорию» своих исследований. В каких ещё науках математика поможет решить подобную проблему ?

Оказалось, что связь между количественными характеристиками самых различных процессов, исследуемых физикой, химией, биологией, экономикой, техническими науками, аналогична связи между путём и скоростью.

Основным математическим понятием, выражающим эту связь является производная.

Производная

Центральные понятия дифференциального исчисления – производная и дифференциал возникли при рассмотрении большого числа задач естествознания и математики, приводивших к вычислению пределов одного и того же типа. Важнейшие среди них – физическая задача определения скорости неравномерного движения и геометрическая задача построения касательной к кривой.

Рассмотрим подробно каждую из них.



Будем вслед за итальянским учёным Г.Галилеем изучать закон свободного падения тел. Поднимем камешек и затем из состояния покоя отпустим его. Движение свободно падающего тела явно неравномерное. Скорость v постепенно возрастает. Но как именно выглядит зависимость $v(t)$?

Фиксируем момент t , в который мы хотим знать значение скорости $v(t)$. Пусть h – небольшой промежуток времени, прошедший от момента t . За это время падающее тело пройдёт путь, равный $s(t+h)-s(t)$.

Если промежуток времени h очень мал, то приближённо $s(t+h)-s(t) \approx v(t) \cdot h$, или $\frac{s(t+h) - s(t)}{h} \approx v(t)$, причём

последнее приближённое равенство тем точнее, чем меньше h .

Значит величину $v(t)$ скорости в момент t можно рассматривать как *предел*, к которому стремится отношение, выражающее среднюю скорость на интервале времени от момента t до момента $t+h$.

Сказанное записывают в виде

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

Задача о мгновенной скорости

- Предел средней скорости за промежуток времени от t_0 до t при $t \rightarrow t_0$, называется **мгновенной скоростью** $v(t_0)$ в момент времени t_0

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} v_{cp}(t_0; t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

А л г о р и т м

На языке предмета

На математическом языке

1) $\Delta t = t - t_0$

$$\Delta x = x - x_0$$

2) $\Delta v = v(t+t_0) - v(t_0)$

$$\Delta f = f(x+x_0) - f(x_0)$$

3)
$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

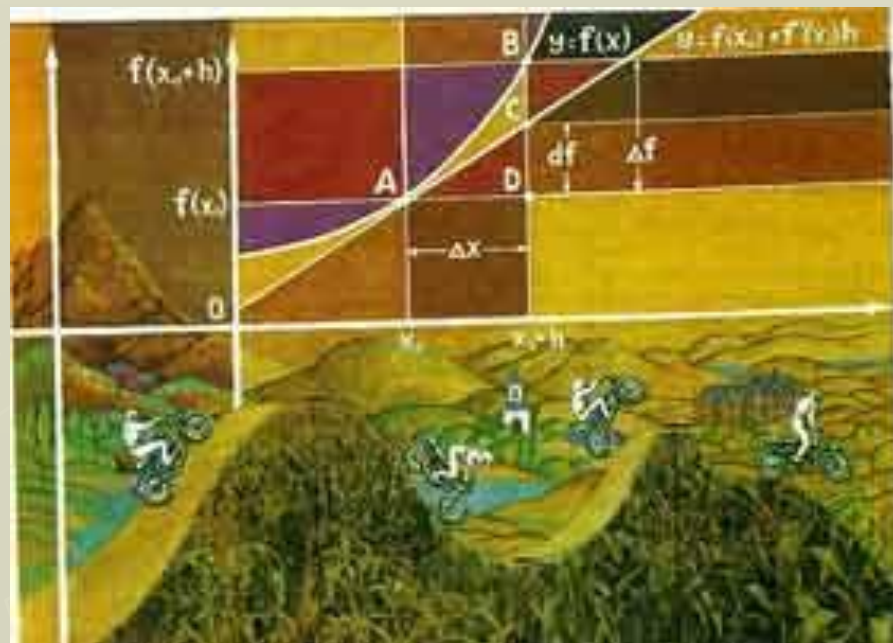
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

4)
$$\dot{v}(t_0) = S' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

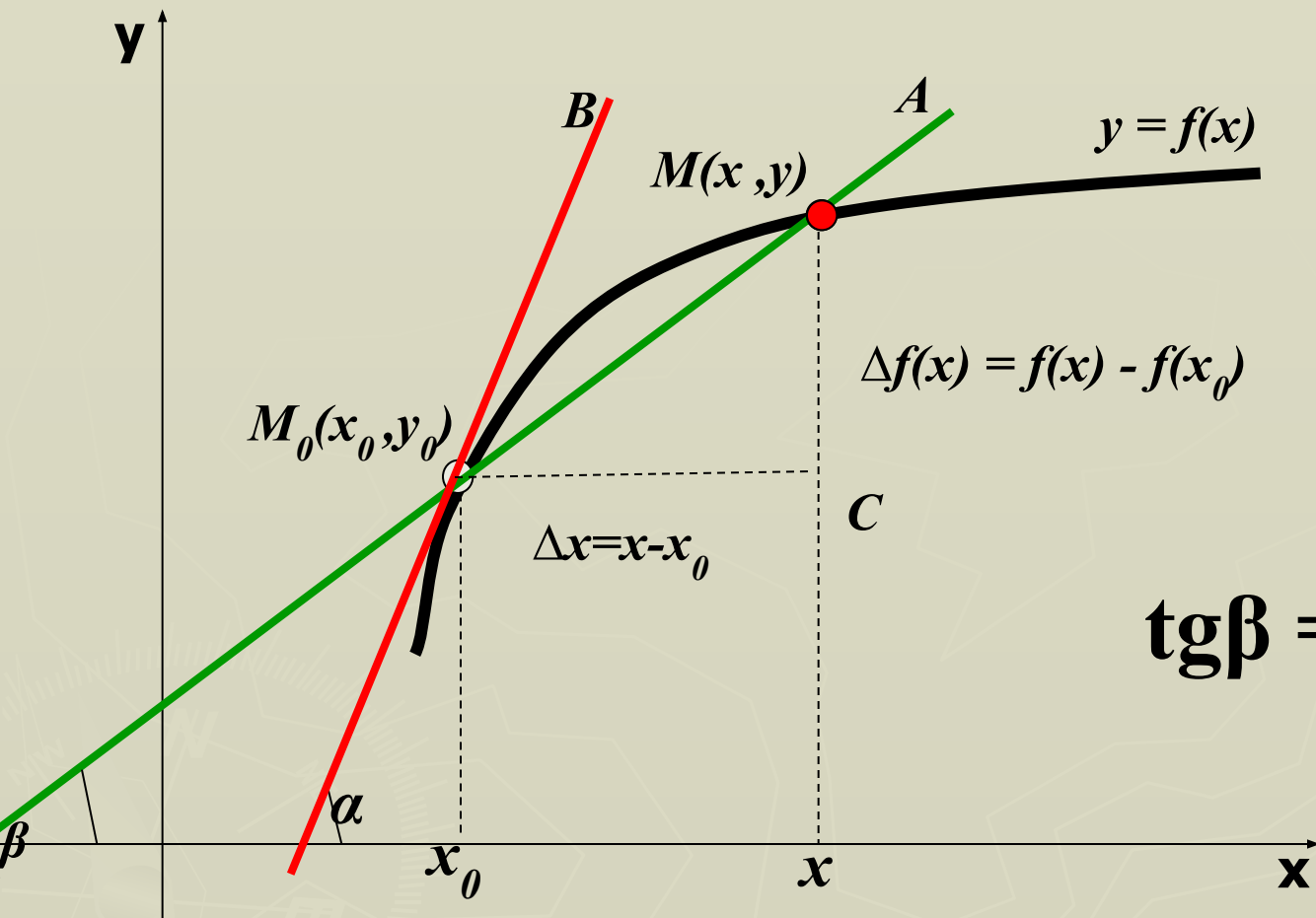
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Рассмотрим теперь другой классический пример, который решается в терминах производной, - построение касательной к кривой.

Требуется построить прямую T , касательную в т. A к кривой – графику функции $y = f(x)$.



Задача о касательной к графику функции



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

При $x \rightarrow x_0$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

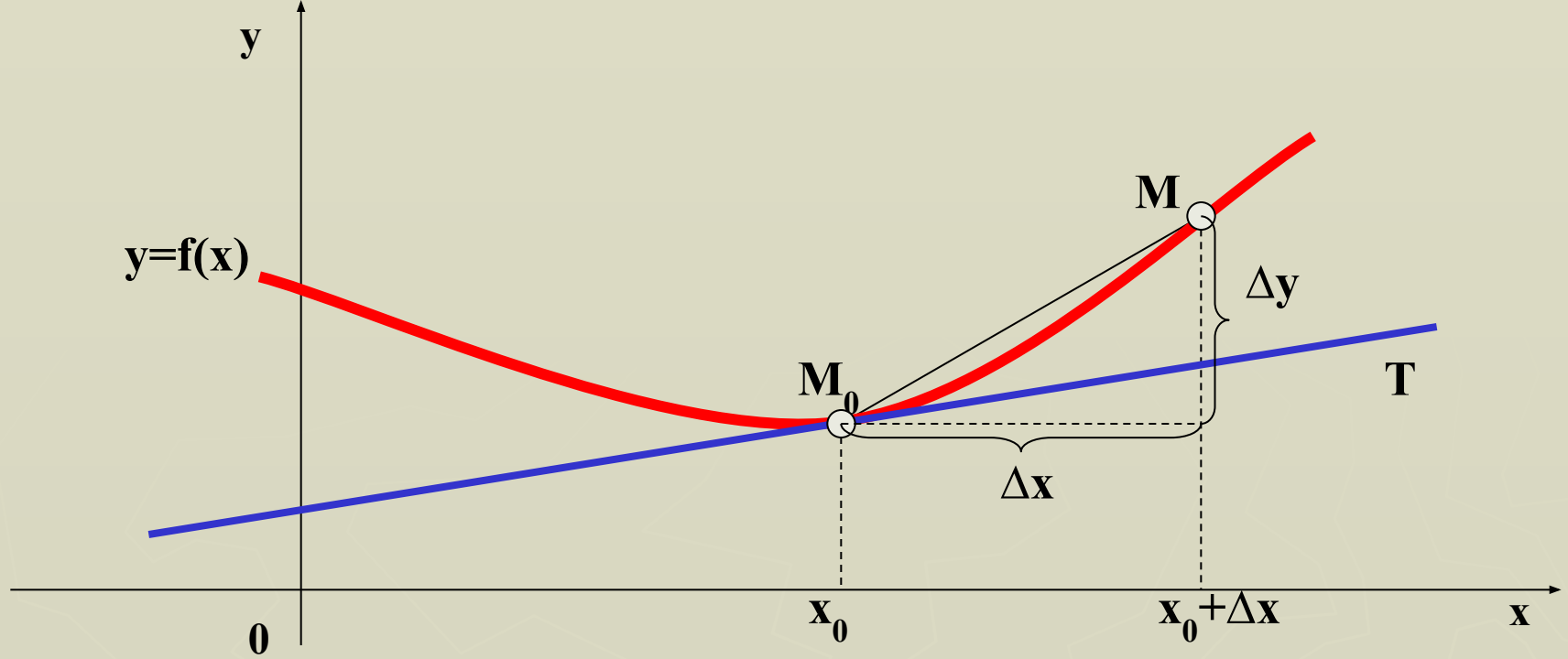
А л г о р и т м

$$1) \quad \Delta x = x - x_0$$

$$2) \quad \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x_0)$$

$$3) \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$4) \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



Убедитесь, что угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ можно определить по формуле

$$k_{M_0T} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{M_0M} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

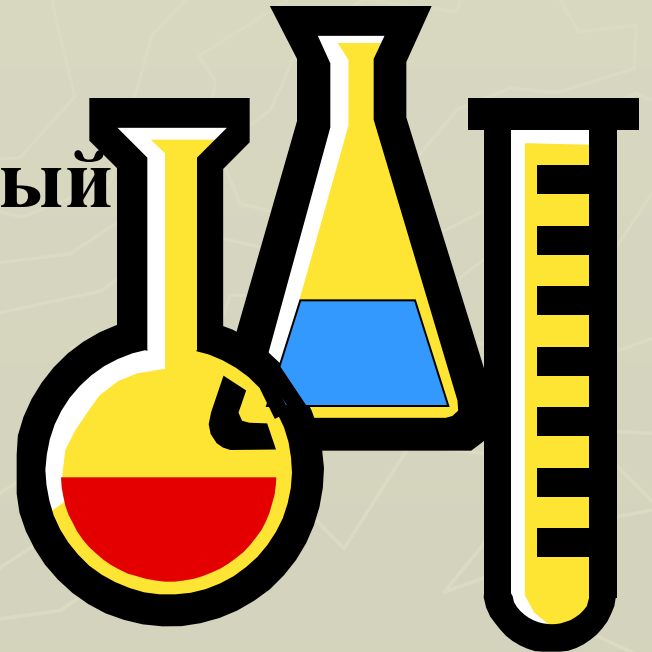
Задача о скорости химической реакции

Средняя скорость растворения соли в воде за промежуток времени $[t_0; t_1]$ (масса соли, растворившейся в воде изменяется по закону $x = f(t)$) определяется по формуле

$$v_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Скорость растворения в данный момент времени

$$v(t_0) = f'(t_0)$$



А л г о р и т м

На языке предмета

На математическом языке

1) $\Delta t = t - t_0$

$$\Delta x = x - x_0$$

2) $\Delta f = f(t_1) - f(t_0)$

$$\Delta f = f(x) - f(x_0)$$

3) $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t - t_0}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x - x_0}$$

4) $v(t_0) = f'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Задача о теплоёмкости тела

Если температура тела с массой в 1 кг повышается от $t_1 = 0$ до $t_2 = \tau$, то это происходит за счёт того, что телу сообщается определённое количество тепла Q ; значит Q есть функция температуры τ , до которой тело нагревается: $Q = Q(\tau)$.

Пусть температура повысилась с τ до $\tau + \Delta\tau$. Количество тепла ΔQ , затраченное для этого нагревания равно: $\Delta Q = Q(\tau + \Delta\tau) - Q(\tau)$.

Отношение $\frac{\Delta Q}{\Delta\tau}$ есть количество тепла, которое необходимо «в среднем» для нагревания тела на 1° . Это отношение называется средней теплоёмкостью, которая не даёт представления о теплоёмкости для любого значения температуры τ .

Теплоёмкостью при температуре τ называется предел отношения приращения количества тепла ΔQ к приращению температуры $\Delta\tau$. (при $\Delta\tau \rightarrow 0$)



А л г о р и т м

На языке предмета

На математическом языке

1) $\Delta\tau = \tau - \tau_0$

$$\Delta x = x - x_0$$

2) $\Delta Q = Q(\tau_1) - Q(\tau_0)$

$$\Delta f = f(x) - f(x_0)$$

3) $\frac{\Delta Q}{\Delta\tau} = \frac{Q(\tau_1) - Q(\tau_0)}{\tau - \tau_0}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x - x_0}$$

4) $C(\tau_0) = Q'(\tau_0) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta\tau}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Задача о мгновенной величине тока

Обозначим через $q = q(t)$ количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время t .

Пусть Δt – некоторый промежуток времени, $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$ – количество электричества, протекающее через указанное сечение за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$. Тогда отношение $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ называют средней силой тока.

Мгновенной силой тока в момент времени t называется предел отношения приращения количества электричества Δq ко времени Δt , при условии, что $\Delta t \rightarrow 0$.

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$$



А л г о р и т м

На языке предмета

На математическом языке

1) $\Delta t = t - t_0$

$$\Delta x = x - x_0$$

2) $\Delta q = q(t_1) - q(t_0)$

$$\Delta f = f(x) - f(x_0)$$

3) $\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t_1) - q(t_0)}{t - t_0}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x - x_0}$$

4) $I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Экономические задачи

Рассмотрим ситуацию: пусть y - издержки производства, а x - количество продукции, тогда Δx - прирост продукции, а Δy - приращение издержек производства.

В этом случае производная $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает предельные

издержки производства и характеризует приблизительно дополнительные затраты на производство дополнительной

единицы продукции $MC = \frac{dTC}{dQ}$, где MC – предельные

издержки (marginal costs); TC – общие издержки (total costs); Q - количество. $C(t)$

Экономические задачи

Аналогичным образом могут быть определены и многие другие экономические величины, имеющие предельный характер.

Другой пример - категория предельной выручки (MR— marginal revenue) — это дополнительный доход, полученный при переходе от производства n -ной к $(n+1)$ -ой единице продукта.

Она представляет собой первую производную от выручки:

$$MR = \frac{dR}{dQ}$$

При этом $R = PQ$, где R —выручка (revenue); P —цена (price).

Таким образом $\frac{d(PQ)}{dQ} = P, \Rightarrow MR = P$.

Экономические задачи

Пусть функция $u(t)$ выражает количество произведенной продукции за время t . Найдем производительность труда в момент t_0 .

За период от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество продукции изменится от $u(t_0)$ до $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$. Тогда средняя производительность труда за этот период $z = \frac{\Delta u}{\Delta t}$ поэтому производительность труда в момент t_0

$$z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

Рост численности населения

Вывести формулу для вычисления численности населения на ограниченной территории в момент времени t .

Пусть $y=y(t)$ - численность населения.

Рассмотрим прирост населения за $\Delta t = t - t_0$

$\Delta y = k \cdot y \cdot \Delta t$, где $k = k_p - k_c$ — коэффициент прироста (k_p — коэффициент рождаемости, k_c — коэффициент смертности)

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y$$

получим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'$$



Выводы

Различные задачи привели в процессе решения к одной и той же математической модели – пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Значит, эту математическую модель надо специально изучить, т.е.:

- 1) Присвоить ей новый термин.**
- 2) Ввести для неё обозначение.**
- 3) Исследовать свойства новой модели.**
- 4) Определить возможности применения нового понятия - производная**

Определение производной

Производной функции $f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции в точке x к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, если этот предел существует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Возвращаясь к рассмотренным задачам, важно подчеркнуть следующее:

- а) мгновенная скорость** неравномерного движения есть производная от пути по времени;
- б) угловой коэффициент касательной** к графику функции в точке $(x_0; f(x))$ есть производная функции $f(x)$ в точке $x = x_0$;
- в) мгновенная сила тока** $I(t)$ в момент t есть производная от количества электричества $q(t)$ по времени;
- г) теплоёмкость** $C(\tau)$ при температуре τ есть производная от количества тепла $Q(\tau)$, получаемого телом;
- д) скорость химической реакции** в данный момент времени t есть производная от количества вещества $y(t)$, участвующего в реакции, по времени t .

А ЭТО ЗНАЧИТ:

*«...нет ни одной области в математике,
которая когда-либо не окажется
применимой к явлениям действительного
мира...» Н.И. Лобачевский*

- ▶ Аппарат производной можно использовать при решении геометрических задач, задач из естественных и гуманитарных наук, экономических задач оптимизационного характера.
- ▶ И, конечно, не обойтись без производной при исследовании функции и построении графиков, решении уравнений и неравенств

У нас впереди огромные возможности для исследовательской работы в новых проектах!

Авторы:



Учащиеся 10 класса

Амбарцумян Ануш,
Дешевых Андрей,

Рындин Вячеслав,
Макаровская Ирина

Леликова Евгения,
Морохов Александр.