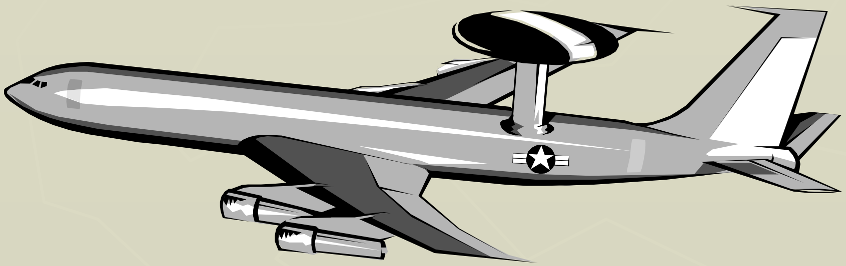
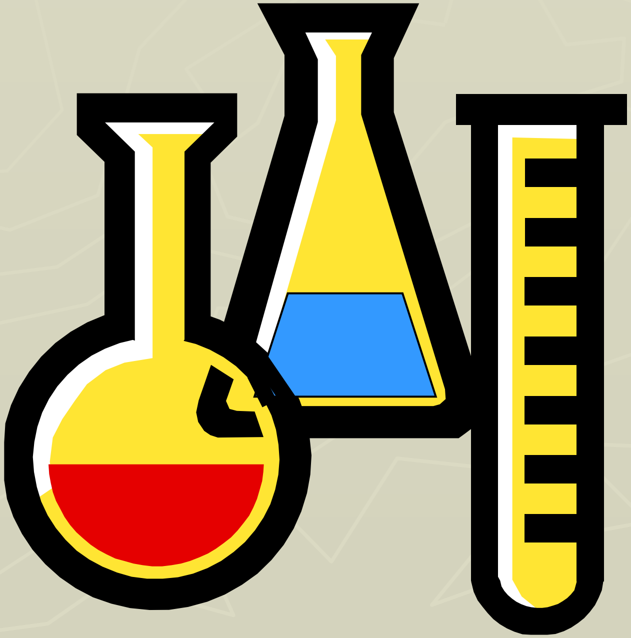
Задачи, приводящие к понятию производной.





В начале было слово.

- К понятию производной можно прийти, рассматривая, например, такое широко используемое в физике понятие, как мгновенная скорость неравномерно движущегося тела.
- Мы познакомились с этим понятием, изучая в курсе физики раздел кинематики, а точнее кинематики прямолинейного неравномерного движения.

- Совершенно верно. Как же Вы представляете себе мгновенную скорость? Что это такое?

- Мгновенной скоростью тела называют скорость, которую оно имеет в данный момент времени (в данной точке траектории)

- А как Вы представляете себе мгновенную скорость?

- Так и представляю… Если тело движется равномерно, то в разные моменты времени его скорость одинакова. Если тело движется неравномерно (ускоряясь или замедляясь, то в разные моменты времени его скорость будет, вообще говоря, различной

- Разве Вы не чувствуете, что фраза «скорость в данный момент времени» не более как синоним фразы «мгновенная скорость»? Как говорится, «что в лоб, что по лбу». Термин «скорость в данный момент времени нуждается в разъяснении в той же мере, в какой нуждается в нём термин «мгновенная скорость».

- Физик эту проблему решает просто. У него есть приборы, например, спидометр. А математик создаст математическую модель процесса.

Итак, проблема поставлена.

Приступим к её решению.

Остановись мгновенье –

мы тебя исследуем !

Сначала мы определили «территорию» своих исследований. В каких ещё науках математика поможет решить подобную проблему ?

Оказалось, что связь между количественными характеристиками самых различных процессов, исследуемых физикой, химией, биологией, экономикой, техническими науками, аналогична связи между путём и скоростью.

Основным математическим понятием, выражающим эту связь является производная.

Производная

Центральные понятия дифференциального исчисления – производная и дифференциал возникли при рассмотрении большого числа задач естествознания и математики, приводивших к вычислению пределов одного и того же типа. Важнейшие среди них – физическая задача определения скорости неравномерного движения и геометрическая задача построения касательной к кривой.

Рассмотрим подробно каждую из них.

Будем вслед за итальянским учёным Г.Галилеем изучать закон свободного падения тел. Поднимем камешек и затем из состояния покоя отпустим его. Движение свободно падающего тела явно неравномерное. Скорость *v* постепенно возрастает. Но как именно выглядит зависимость *v(t)* ?

Фиксируем момент t, в который мы хотим знать значение скорости $v(t)$. Пусть h – небольшой промежуток времени, прошедший от момента t. За это время падающее тело пройдёт путь, равный $s(t+h)-s(t)$.

Если промежуток времени h очень мал, то приближённо $s(t+h)-s(t) \approx v(t) \cdot h$, или $\frac{s(t+h)-s(t)}{h} \approx v(t)$, причём последнее приближённое равенство тем точнее, чем меньше h.

Значит величину $v(t)$ скорости в момент t можно рассматривать как ***предел***, к которому стремится отношение, выражающее среднюю скорость на интервале времени от момента t до момента $t+h$.

Сказанное записывают в виде

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

Задача о мгновенной скорости

- **Предел средней скорости за промежуток времени от t_0 до t при $t \to t_0$, называется *мгновенной скоростью $v(t_0)$ в момент времени t_0***

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} v_{cp}(t_0; t) = \lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

А л г о р и т м

На языке предмета | **На математическом языке**

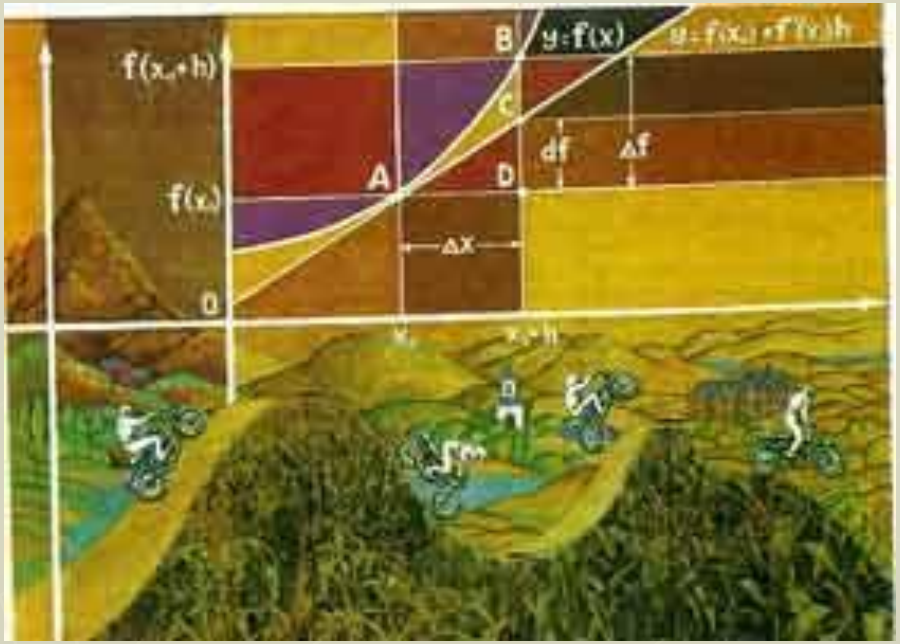
1) $\Delta t = t - t_0$ $\qquad$ $\Delta x = x - x_0$

2) $\Delta v = v(t+t_0) - v(t_0)$ $\qquad$ $\Delta f = f(x+x_0) - f(x_0)$

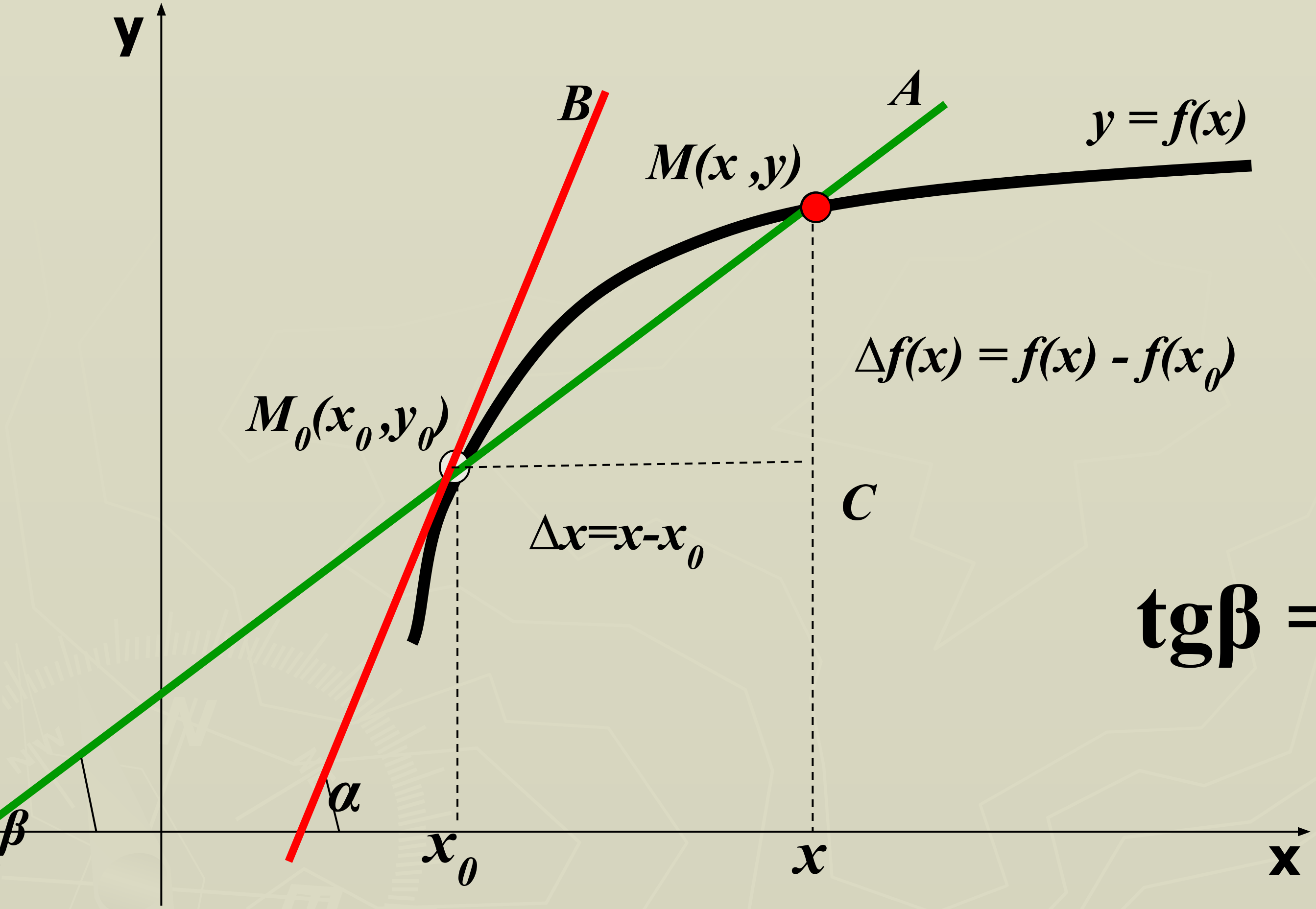
3) $$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_0+\Delta t) - v(t_0)}{t - t_0}$$ $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

4) $$v(t_0) = S' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$ $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Рассмотрим теперь другой классический пример, который решается в терминах производной, - построение касательной к кривой. Требуется построить прямую Т, касательную в т. А к кривой – графику функции *y = f(x)*.



Задача о касательной к графику функции



$$\mathrm{tg}\beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

При x→x$_0$ $$\lim_{x \to x_0} tg\beta = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

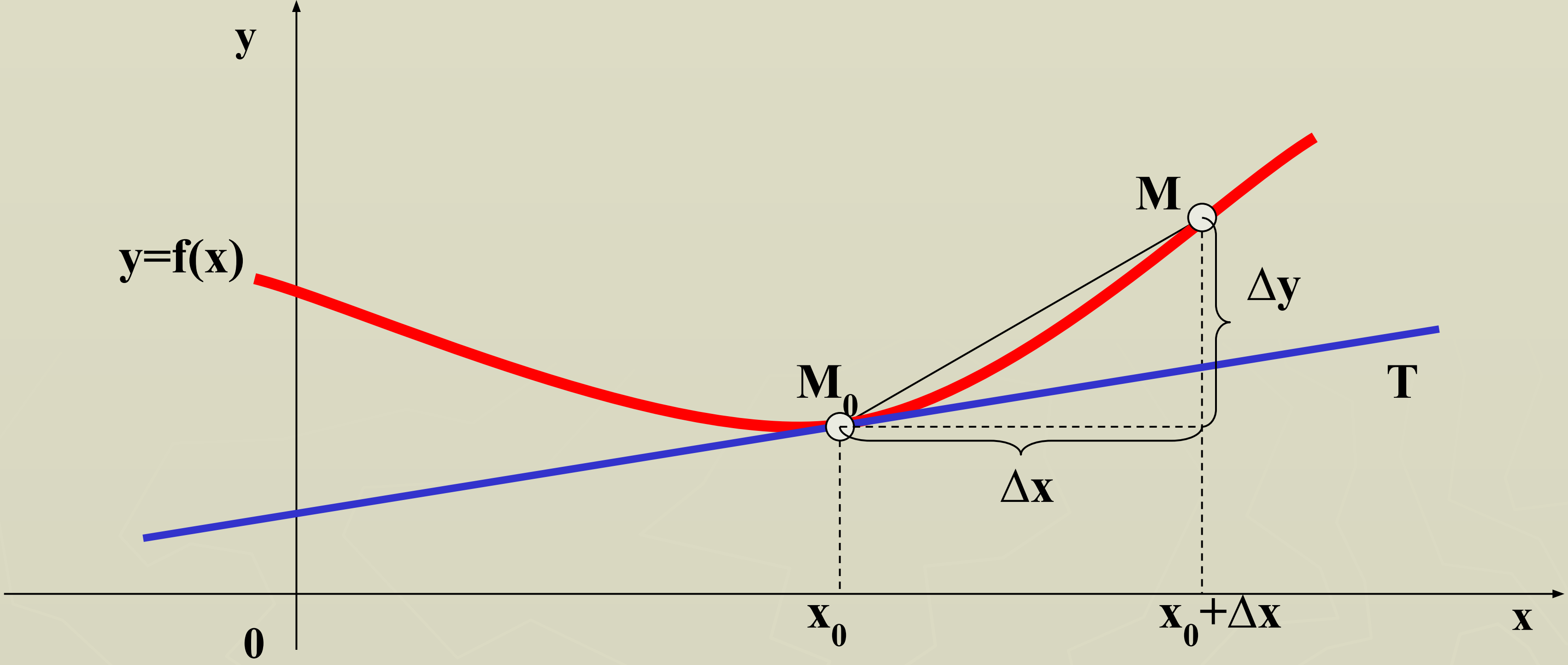
А л г о р и т м

1) $\Delta x = x - x_0$

2) $\Delta f = f(x+x_0) - f(x_0)$

3) $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

4) $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



Убедитесь, что угловой коэффициент касательной к графику функции y = f(x) можно определить по формуле

$$k_{M_0T} = \lim_{\Delta x \to 0} k_{M_0M} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

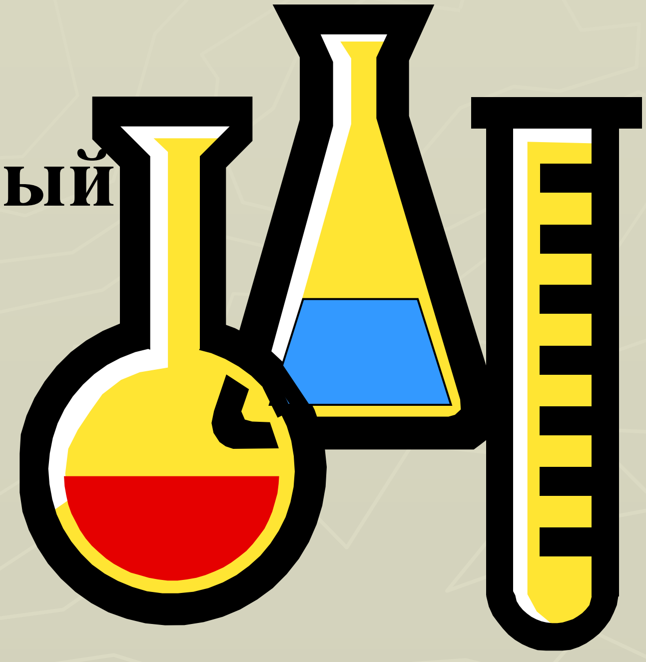
Задача о скорости химической реакции

Средняя скорость растворения соли в воде за промежуток времени [*t_0;t_1*] (масса соли, растворившейся в воде изменяется по закону *$x = f(t)$*) определяется по формуле

$$v_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Скорость растворения в данный момент времени

$$v(t_0) = f'(t_0)$$



А л г о р и т м

На языке предмета	На математическом языке
1) $\Delta t = t - t_0$	$\Delta x = x - x_0$
2) $\Delta f = f(t_1) - f(t_0)$	$\Delta f = f(x) - f(x_0)$
3) • $\dfrac{\Delta f}{\Delta t} = \dfrac{f(t_1) - f(t_0)}{t - t_0}$	$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x - x_0}$
4) • $v(t_0) = f'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta t}$	$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

Задача о теплоёмкости тела

Если температура тела с массой в 1 кг повышается от $t_1 = 0$ до $t_2 = \tau$, то это происходит за счёт того, что телу сообщается определённое количество тепла Q; значит Q есть функция температуры τ, до которой тело нагревается: $Q=Q(\tau)$.

Пусть температура повысилась с τ до $\tau + \Delta\tau$. Количество тепла ΔQ, затраченное для этого нагревания равно: $\Delta Q=Q(\tau+\Delta\tau)-Q(\tau)$. Отношение $\dfrac{\Delta Q}{\Delta\tau}$ есть количество тепла, которое необходимо «в среднем» для нагревания тела на 1°. Это отношение называется средней теплоёмкостью, которая не даёт представления о теплоёмкости для любого значения температуры τ.

Теплоёмкостью при температуре τ называ-ется предел отношения приращения количества тепла ΔQ к приращению температуры $\Delta\tau$.(при $\Delta\tau \to 0$)

А л г о р и т м

На языке предмета		**На математическом языке**
1)	$\Delta\tau = \tau - \tau_0$	$\Delta x = x - x_0$
2)	$\Delta Q = Q(\tau_1) - Q(\tau_0)$	$\Delta f = f(x) - f(x_0)$
3)	• $\dfrac{\Delta Q}{\Delta\tau} = \dfrac{Q(\tau_1) - Q(\tau_0)}{\tau - \tau_0}$	$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x - x_0}$
4)	• $C(\tau_0) = Q'(\tau_0) = \lim\limits_{\Delta\tau \to 0} \dfrac{\Delta Q}{\Delta\tau}$	$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

Задача о мгновенной величине тока

Обозначим через $q = q(t)$ количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время t.

Пусть Δt – некоторый промежуток времени, $\Delta q = q(t+\Delta t) - q(t)$ – количество электричества, протекающее через указанное сечение за промежуток времени от момента t до момента t + Δt. Тогда отношение $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ называют средней силой тока.

Мгновенной силой тока в момент времени t называется предел отношения приращения количества электричества Δq ко времени Δt, при условии, что $\Delta t \to 0$.

$$\boxed{I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} I_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}}$$

А л г о р и т м

На языке предмета | **На математическом языке**

	На языке предмета	На математическом языке
1)	$\Delta t = t - t_0$	$\Delta x = x - x_0$
2)	$\Delta q = q(t_1) - q(t_0)$	$\Delta f = f(x) - f(x_0)$
3)	• $\dfrac{\Delta q}{\Delta t} = \dfrac{q(t_1) - q(t_0)}{t - t_0}$	$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x - x_0}$
4)	• $I(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} I_{cp} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$	$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

Экономические задачи

Рассмотрим ситуацию: пусть y - издержки производства, а x - количество продукции, тогда Δx- прирост продукции, а Δy - приращение издержек производства.

В этом случае производная $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает предельные

издержки производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство дополнительной

единицы продукции $MC = \frac{dTC}{dQ}$,где МС – предельные

издержки (marginal costs); ТС – общие издержки (total costs); Q - количество.C(t)CC

Экономические задачи

Аналогичным образом могут быть определены и многие другие экономические величины, имеющие предельный характер.

Другой пример - категория предельной выручки

(MR— marginal revenue) — это дополнительный доход, полученный при переходе от производства n-ной к (n+1)-ой единице продукта.

Она представляет собой первую производную от выручки:

$$MR = \frac{dR}{dQ}$$

При этом R= PQ, где R–выручка (revenue); P–цена (price).

Таким образом $\frac{d(PQ)}{dQ} = P, \Rightarrow$ MR= P.

Экономические задачи

Пусть функция *u(t)* выражает количество произведенной продукции за время *t*. Найдем производительность труда в момент t_0.

За период от t_0 до $t_0 + t$ количество продукции изменится от $u(t_0)$ до $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$. Тогда средняя производительность труда за этот период $z = \frac{\Delta u}{\Delta t}$

поэтому производительность труда в момент t_0

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

Рост численности населения

Вывести формулу для вычисления численности населения на ограниченной территории в момент времени t.

Пусть $y=y(t)$- численность населения.

Рассмотрим прирост населения за $\Delta t = t - t_0$

$\Delta y=k \cdot y \cdot \Delta t$, где $к = к_р – к_с$ –коэффициент прироста ($к_р$ – коэффициент рождаемости,

$к_с$ – коэффициент смертности)

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y$$

получим $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'$$

Выводы

Различные задачи привели в процессе решения к одной и той же математической модели – пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Значит, эту математическую модель надо специально изучить, т.е.:

1) **Присвоить ей новый термин.**

2) **Ввести для неё обозначение.**

3) **Исследовать свойства новой модели.**

4) **Определить возможности применения нового понятия - производная**

Определение производной

Производной функции *f(x)* в точке *x* называется предел отношения приращения функции в точке *x* к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, если этот предел существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Возвращаясь к рассмотренным задачам, важно подчеркнуть следующее:

а) **мгновенная скорость** неравномерного движения есть производная от пути по времени;

б) **угловой коэффициент касательной** к графику функции в точке $(x_0; f(x))$ есть производная функции $f(x)$ в точке $x = x_0$;

в) **мгновенная сила тока** $I(t)$ в момент t есть производная от количества электричества $q(t)$ по времени;

г) **теплоёмкость** $C(\tau)$ при температуре τ есть производная от количества тепла $Q(\tau)$, получаемого телом;

д) **скорость химической реакции** в данный момент времени t есть производная от количества вещества $y(t)$, участвующего в реакции, по времени t.

А это значит:

«…нет ни одной области в математике, которая когда-либо не окажется применимой к явлениям действительного мира…»   Н.И. Лобачевский

- Аппарат производной можно использовать при решении геометрических задач, задач из естественных и гуманитарных наук, экономических задач оптимизационного характера.
- И, конечно, не обойтись без производной при исследовании функции и построении графиков, решении уравнений и неравенств

У нас впереди огромные возможности для исследовательской работы в новых проектах!

Авторы:

Учащиеся 10 класса

Амбарцумян Ануш,
Дешевых Андрей,

Рындин Вячеслав,
Макаровская Ирина

Леликова Евгения,
Морохов Александр.