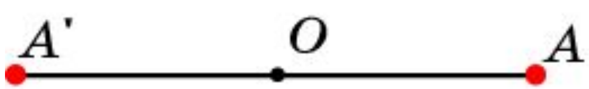
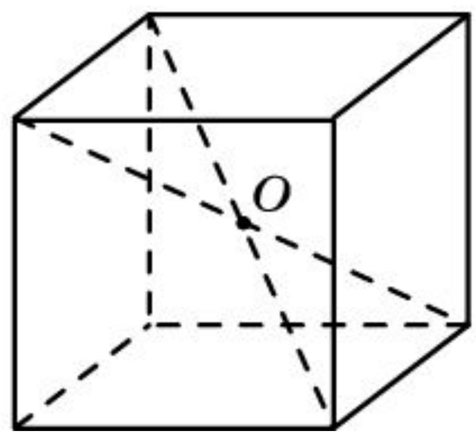
Центральная симметрия

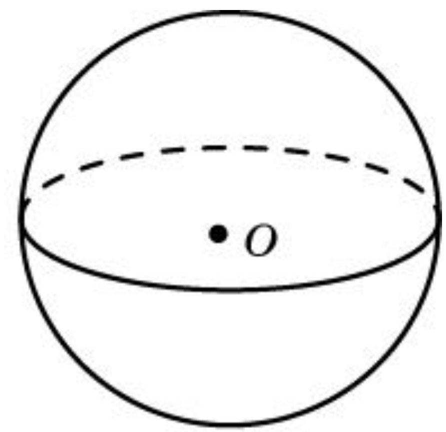
Точки A и A' пространства называются симметричными относительно точки O, называемой центром симметрии, если O является серединой отрезка AA'. Точка O считается симметричной сама себе.

Фигура Φ в пространстве называется центрально-симметричной относительно точки O, если каждая точка A фигуры Φ симметрична относительно точки O некоторой точке A' фигуры Φ.

Например, прямоугольный параллелепипед центрально-симметричен относительно точки пересечения его диагоналей. Шар центрально-симметричен относительно своего центра и т. д.





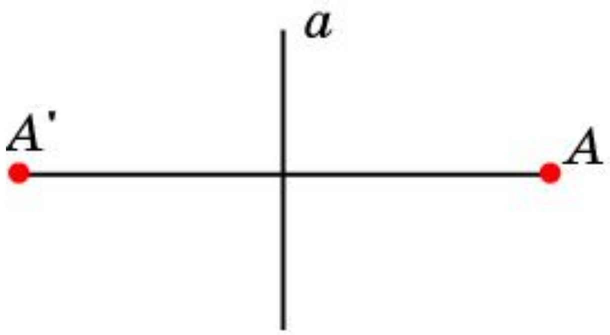


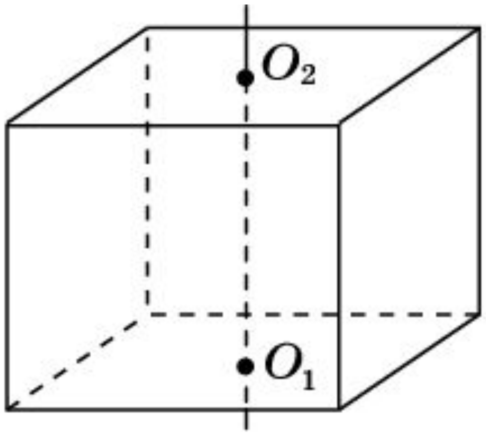
Осевая симметрия

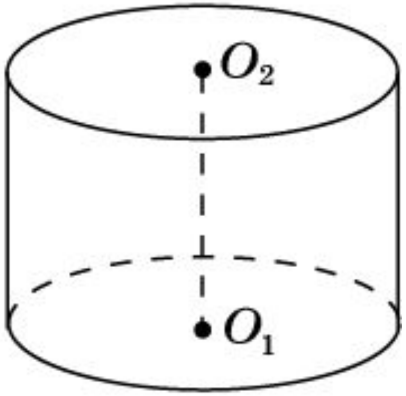
Точки A и A' пространства называются симметричными относительно прямой a, называемой осью симметрии, если прямая a проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна этому отрезку. Точки прямой a считаются симметричными сами себе.

Фигура Φ в пространстве называется симметричной относительно оси a, если каждая точка A фигуры Φ симметрична относительно этой оси некоторой точке A' фигуры Φ.

Например, прямоугольный параллелепипед симметричен относительно оси, проходящей через центры противоположных граней, прямой круговой цилиндр симметричен относительно своей оси и т. д.





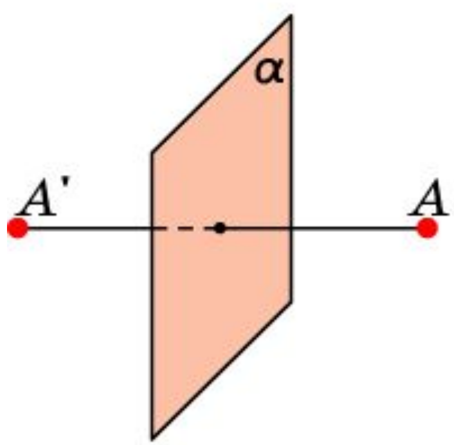


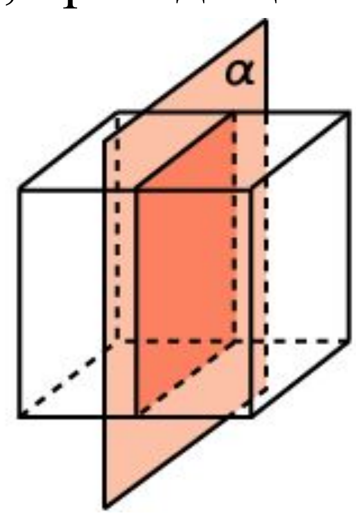
Зеркальная симметрия

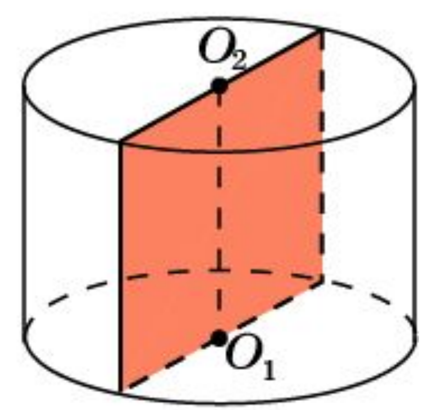
Точки *A* и *A'* в пространстве называются симметричными относительно плоскости α, называемой плоскостью симметрии, если эта плоскость проходит через середину отрезка *AA'* и перпендикулярна к нему. Точки плоскости α считаются симметричными сами себе. Симметрия относительно плоскости называется также зеркальной симметрией.

Фигура *Ф* в пространстве называется зеркально-симметричной относительно плоскости α, если каждая точка *A* фигуры *Ф* симметрична относительно этой плоскости некоторой точке *A'* фигуры *Ф*.

Например, прямоугольный параллелепипед зеркально-симметричен относительно плоскости, проходящей через ось симметрии и параллельной одной из граней. Цилиндр зеркально-симметричен относительно любой плоскости, проходящей через его ось и т. д.





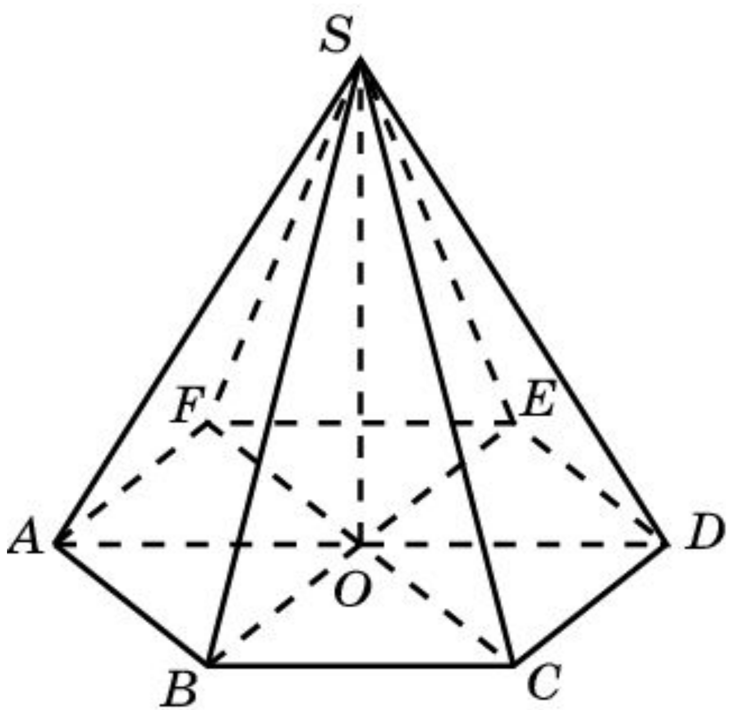


Симметрия *n*-го порядка

Прямая *a* называется осью симметрии *n*-го порядка фигуры *Ф*, если при повороте фигуры *Ф* на угол $\frac{360°}{n}$ вокруг прямой *a* фигура *Ф* совмещается сама с собой.

Ясно, что ось симметрии 2-го порядка является просто осью симметрии.

Например, в правильной *n*-угольной пирамиде прямая, проходящая через вершину и центр основания, является осью симметрии *n*-го порядка.



Упражнение 1

Приведите примеры центрально-симметричных и не центрально-симметричных фигур.

Ответ: Центрально-симметричные: куб, прямоугольный параллелепипед, шар и др.; не центрально-симметричные: пирамида, конус и др.

Упражнение 2

Может ли центр симметрии фигуры не принадлежать ей?

Ответ: Да.

Упражнение 3

Может ли фигура иметь более одного центра симметрии?

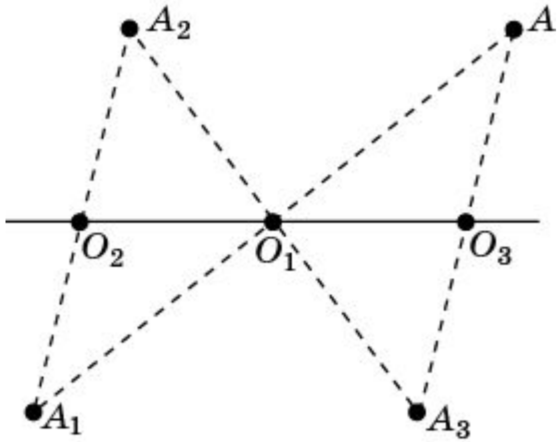
Ответ: Да, например, прямая, плоскость и т.д. имеют бесконечно много центров симметрии.

Упражнение 4

Может ли фигура иметь ровно два центра симметрии?

Ответ: Нет. Предположим, что фигура Ф имеет два центра симметрии O_1 и O_2, и докажем, что в этом случае точка O_3, симметричная точке O_2 относительно точки O_1, также будет центром симметрии фигуры Ф.

Пусть точка A принадлежит фигуре Ф. Тогда точка A_1, симметричная точке A относительно точки O_1, также принадлежит Ф. Аналогично, точка A_2, симметричная точке A_1 относительно точки O_2, принадлежит Ф. Наконец, точка A_3, симметричная точке A_2 относительно точки O_1, принадлежит Ф.

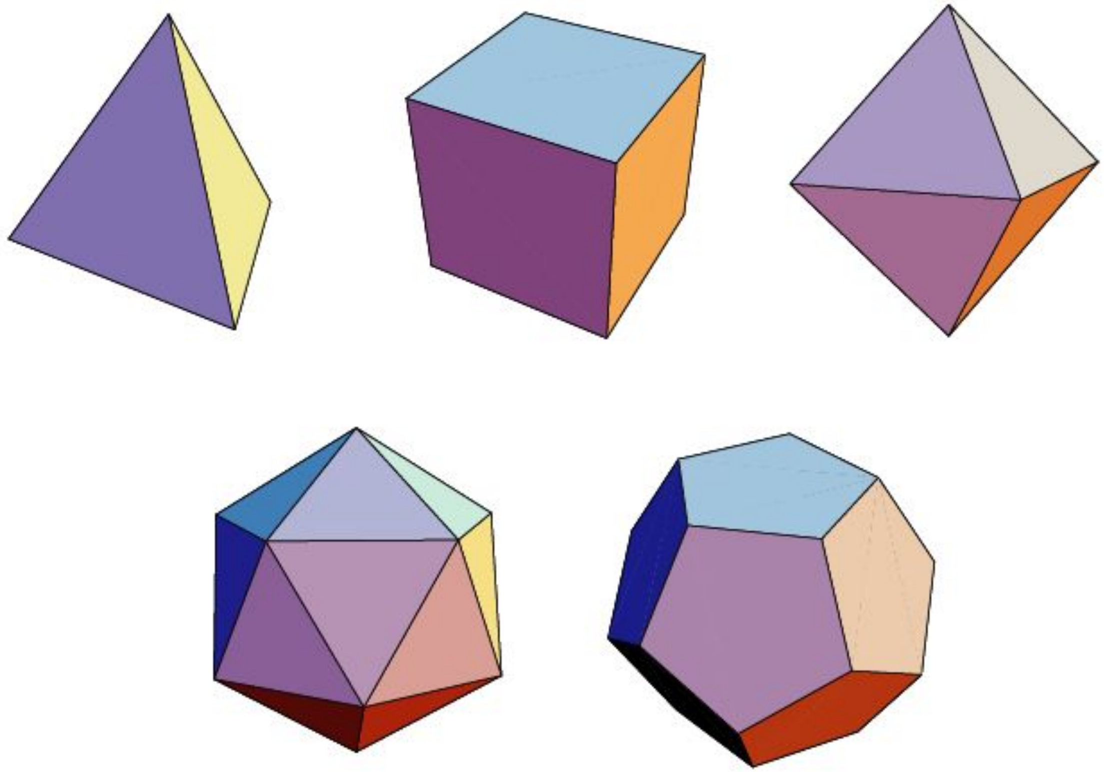


Симметрия относительно точки O_1 переводит точки A_1, A_2, O_2 соответственно в точки A, A_3, O_3. Следовательно, точка A_3 будет симметрична точке A относительно точки O. Значит, каждая точка A фигуры $Ф$ симметрична относительно точки O_3 некоторой точке A_3 фигуры $Ф$, т.е. O_3 является центром симметрии фигуры Ф.

Таким образом фигура не может иметь ровно два центра симметрии. Каждая фигура или не имеет центров симметрии, или имеет один центр симметрии, или имеет бесконечно много центров симметрии.

Упражнение 5

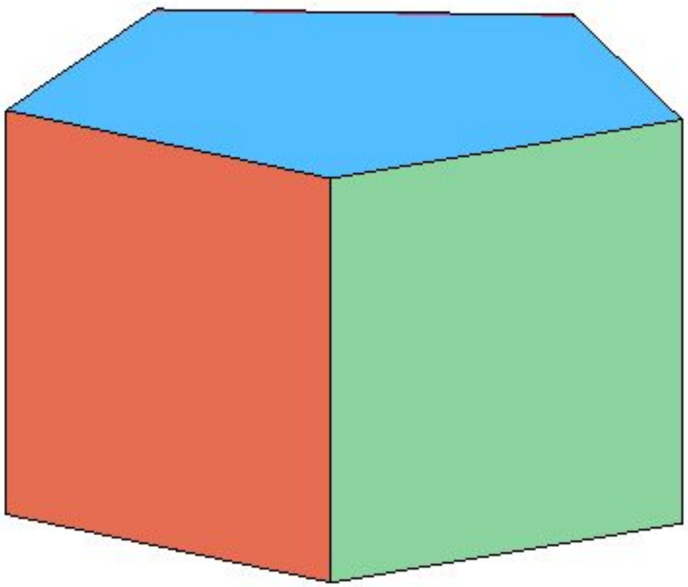
Имеет ли центр симметрии: а) правильный тетраэдр; б) куб; в) октаэдр; г) икосаэдр; д) додекаэдр?



Ответ: а) Нет;б) да; в) да; г) да; д) да.

Упражнение 6

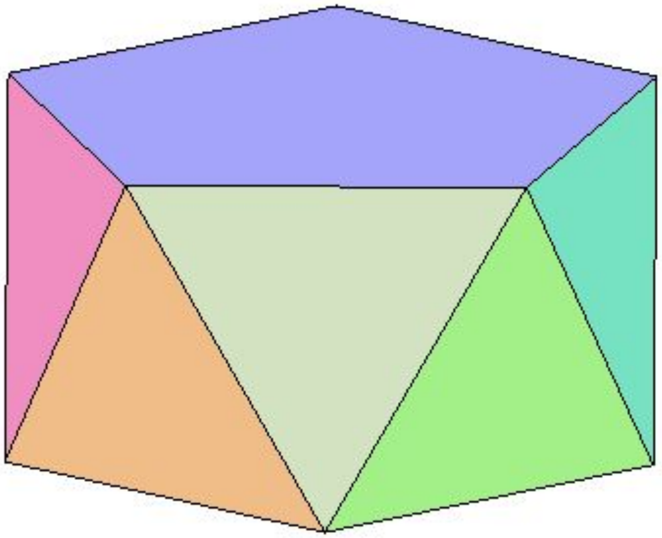
Имеет ли центр симметрии правильная пятиугольная призма?



Ответ: Нет.

Упражнение 7

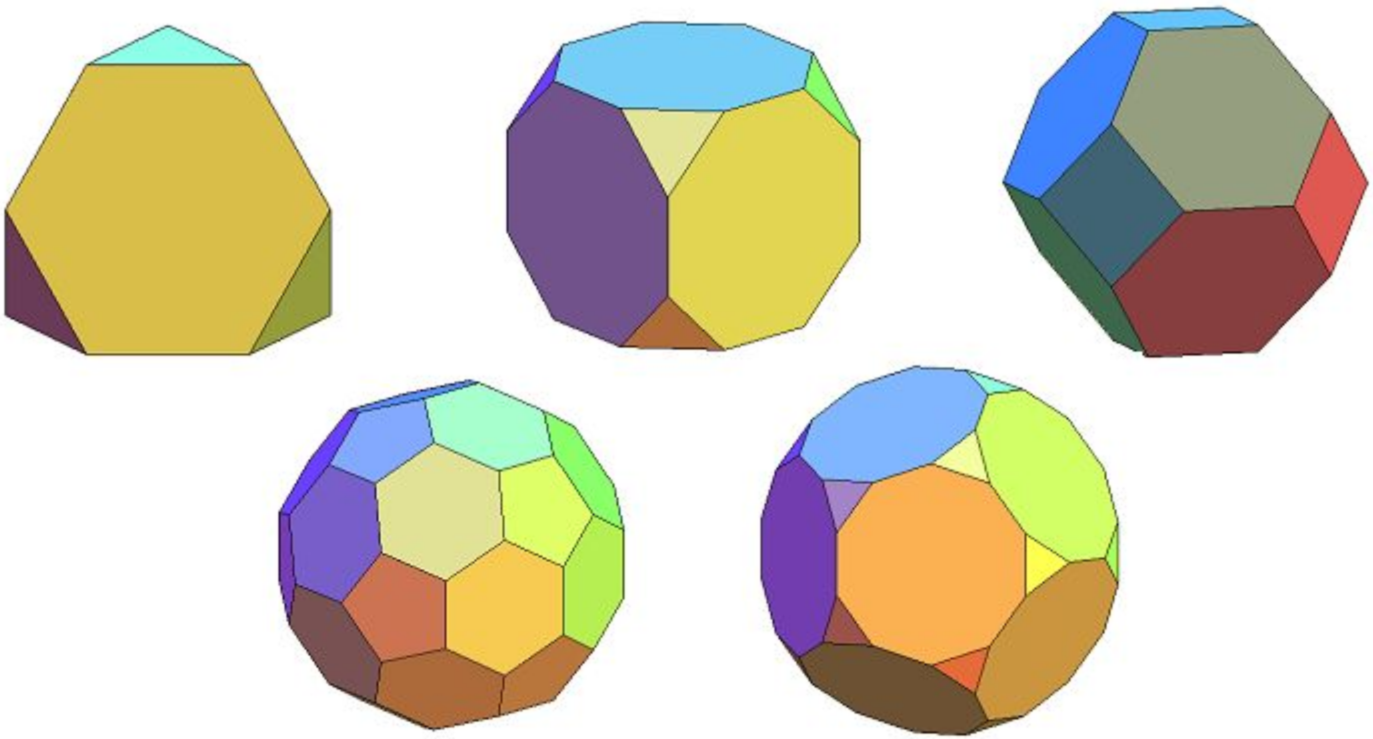
Имеет ли центр симметрии правильная пятиугольная антипризма?



Ответ: Да.

Упражнение 8

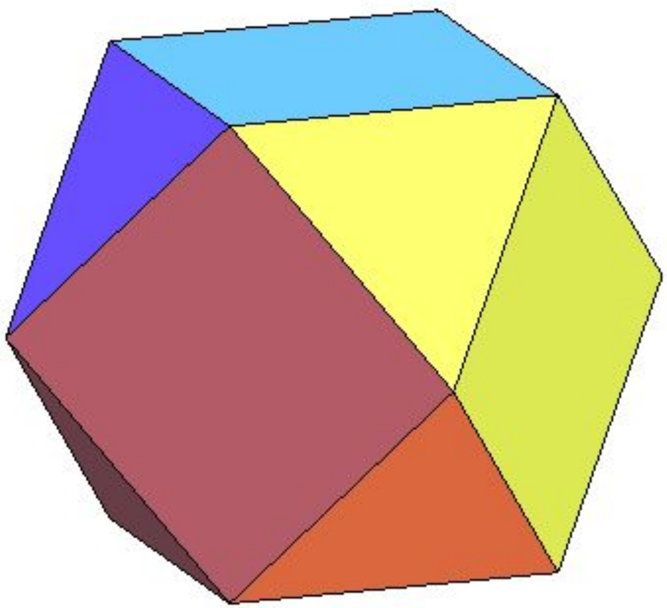
Имеет ли центр симметрии: а) усеченный тетраэдр; б) усеченный куб; в) усеченный октаэдр; г) усеченный икосаэдр; д) усеченный додекаэдр?

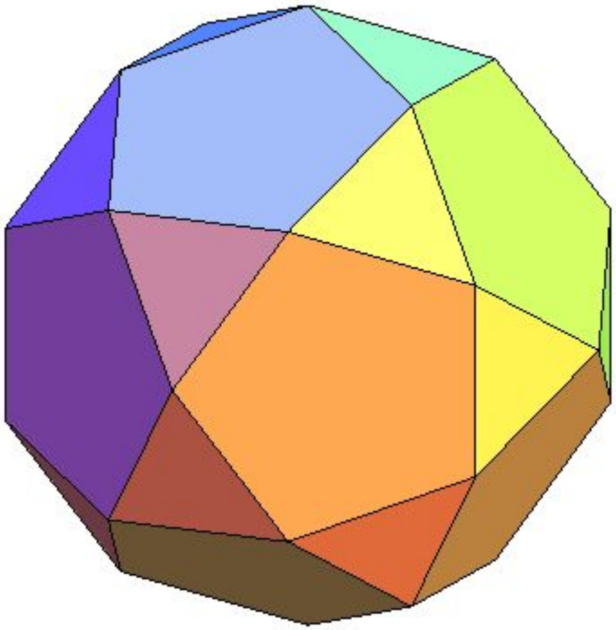


Ответ: а) Нет;б) да; в) да; г) да; д) да.

Упражнение 9

Имеет ли центр симметрии: а) кубооктаэдр; б) икосододекаэдр?

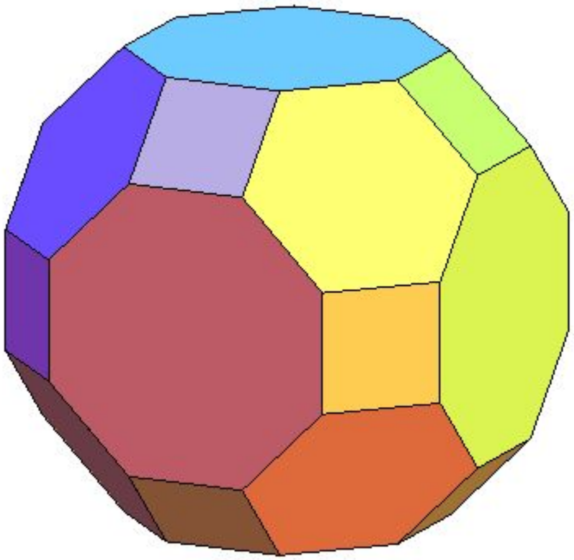


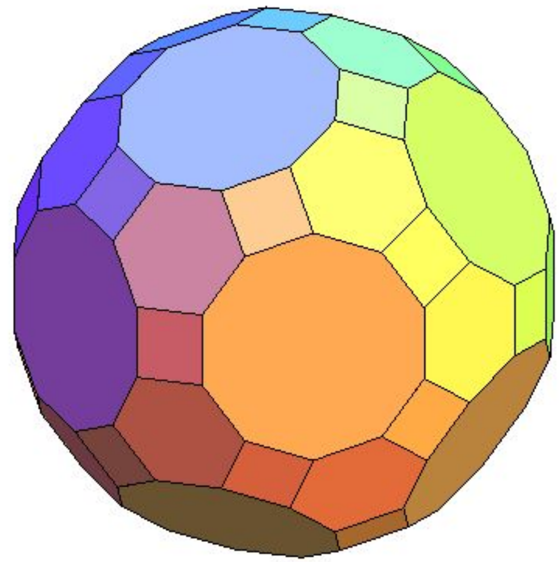


Ответ: а) Да; б) да.

Упражнение 10

Имеет ли центр симметрии: а) усеченный кубооктаэдр; б) усеченный икосододекаэдр?

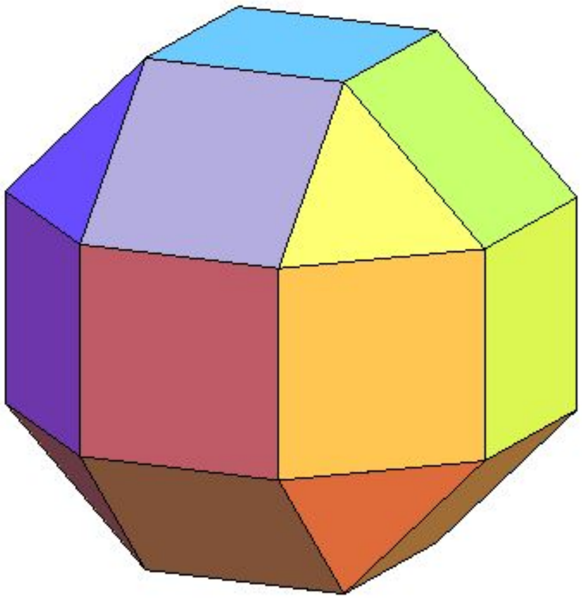


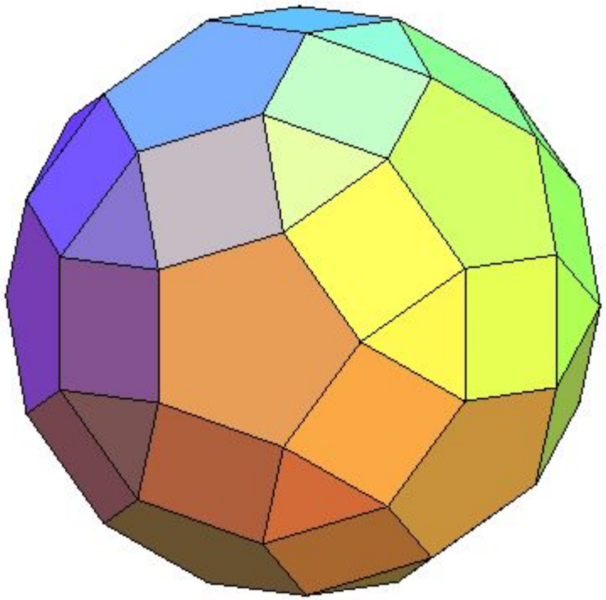


Ответ: а) Да; б) да.

Упражнение 11

Имеет ли центр симметрии: а) ромбокубооктаэдр; б) ромбоикосододекаэдр?

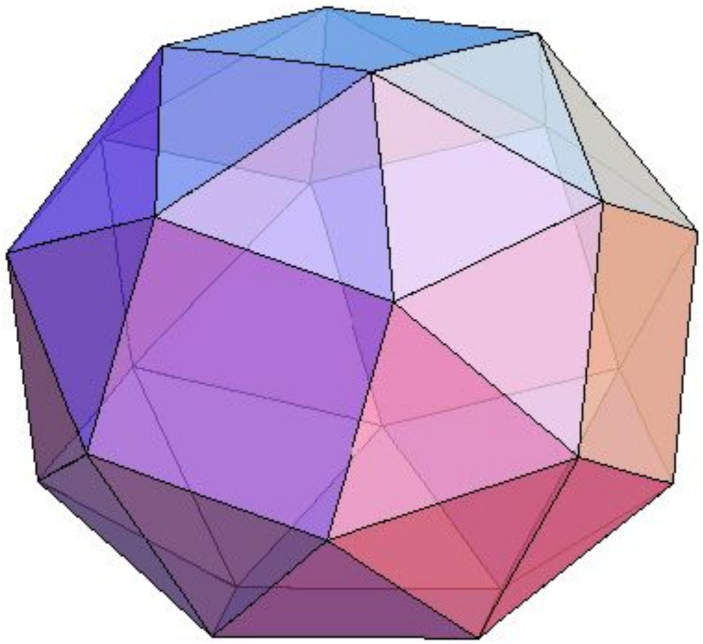


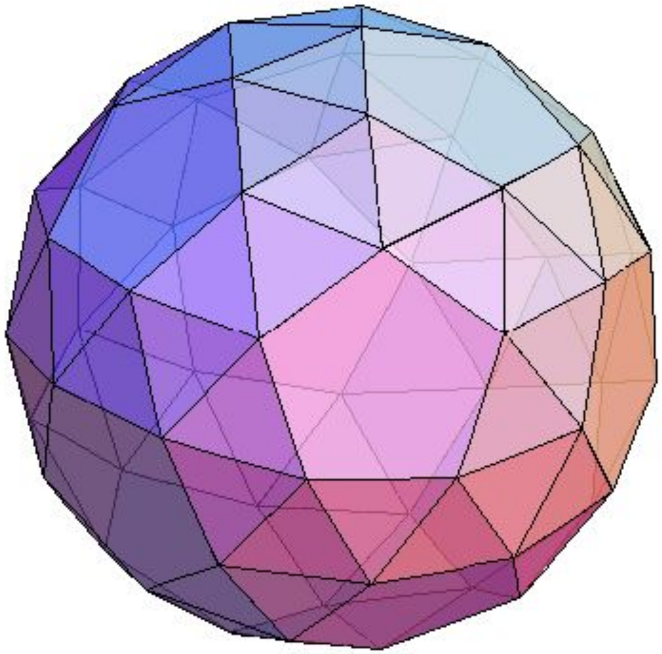


Ответ: а) Да; б) да.

Упражнение 12

Имеет ли центр симметрии: а) курносый куб; б) курносый додекаэдр?

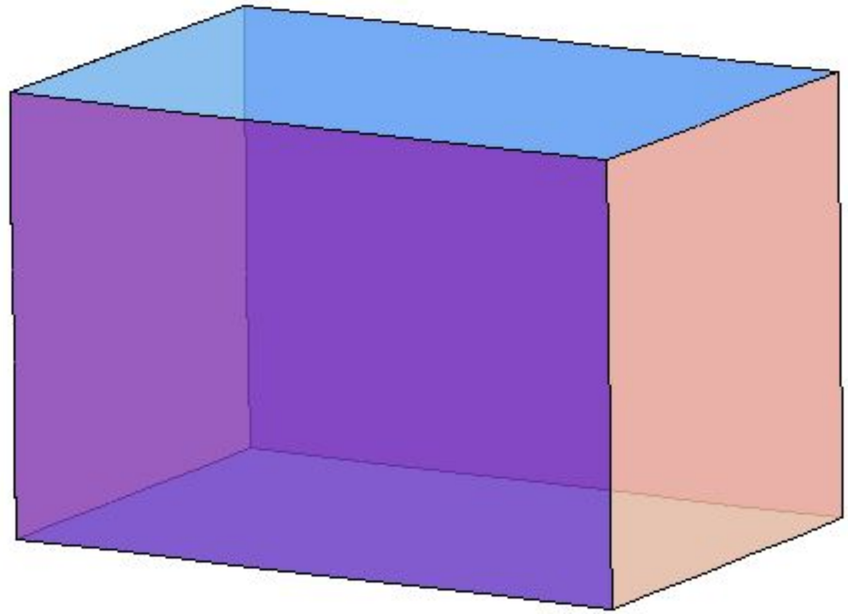




Ответ: а) Нет;б) нет.

Упражнение 13

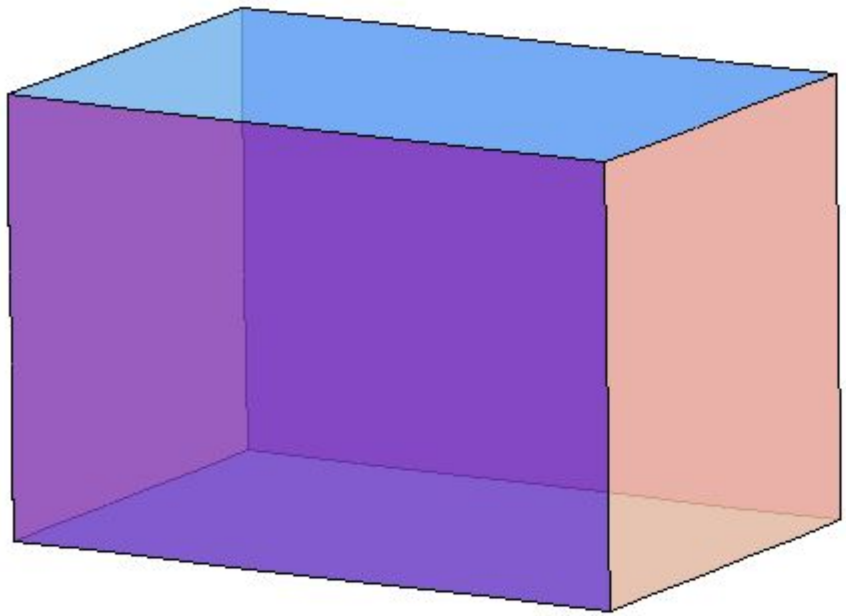
Сколько осей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед, гранями которого не являются квадраты?



Ответ: 3.

Упражнение 14

Сколько осей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед, две грани которого являются квадратами?



Ответ: 5.

Упражнение 15

Сколько осей симметрии имеет шар?

Ответ: Бесконечно много.

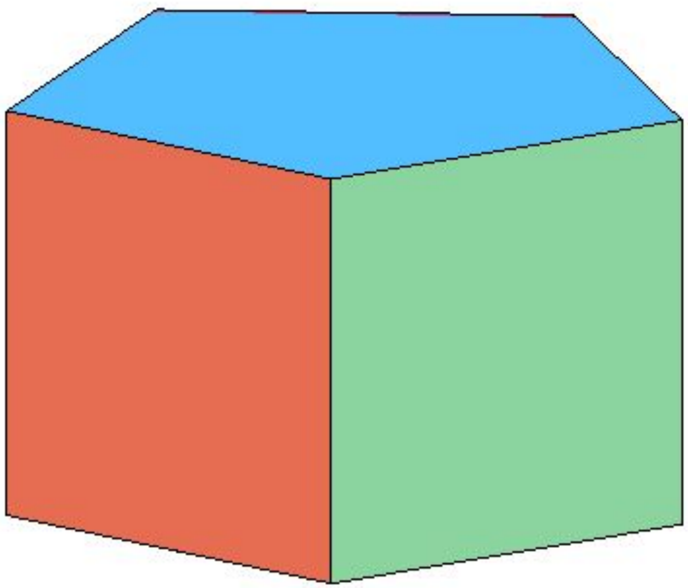
Упражнение 16

Приведите примеры пространственных фигур с осями симметрии 3-го, 4-го и т. д. порядков.

Ответ: Правильные 3-угольные, 4-угольные пирамиды.

Упражнение 17

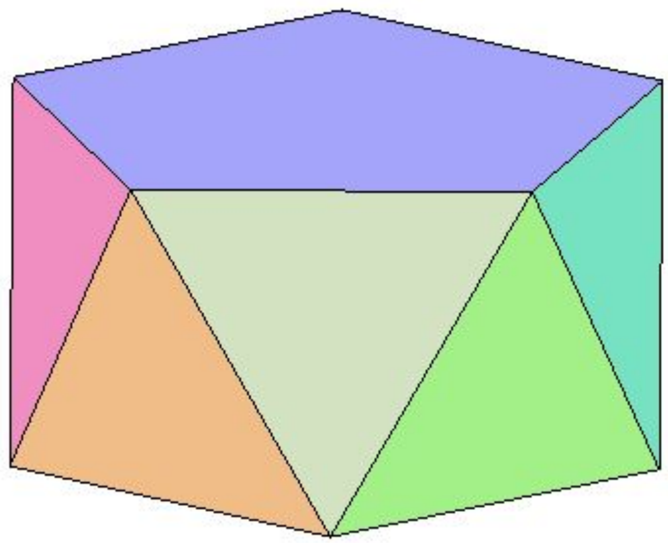
Какие оси симметрии имеет правильная пятиугольная призма?



Ответ: Пять осей симметрии второго порядка и одну ось симметрии пятого порядка.

Упражнение 18

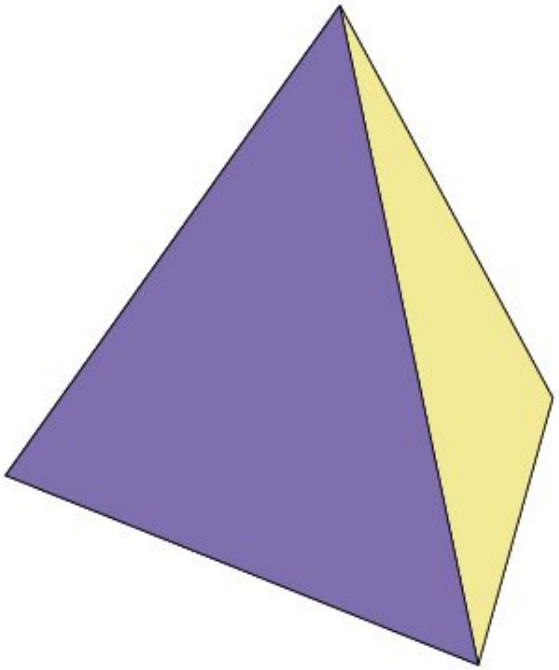
Какие оси симметрии имеет правильная пятиугольная антипризма?



Ответ: Нет.

Упражнение 19

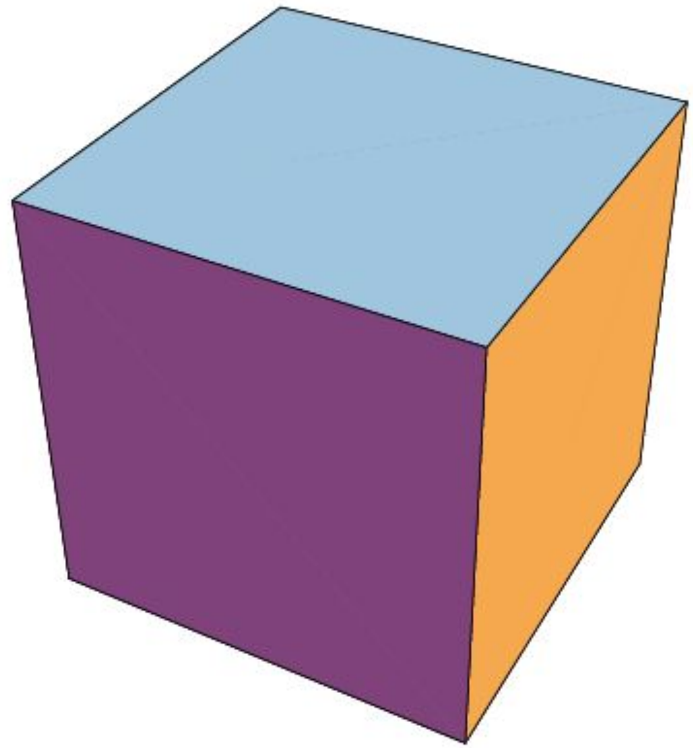
Какие оси симметрии имеет тетраэдр?



Ответ: 4 оси симметрии третьего порядка, проходящих через вершины и центры противоположных граней; 3 оси симметрии, проходящих через середины противоположных ребер.

Упражнение 20

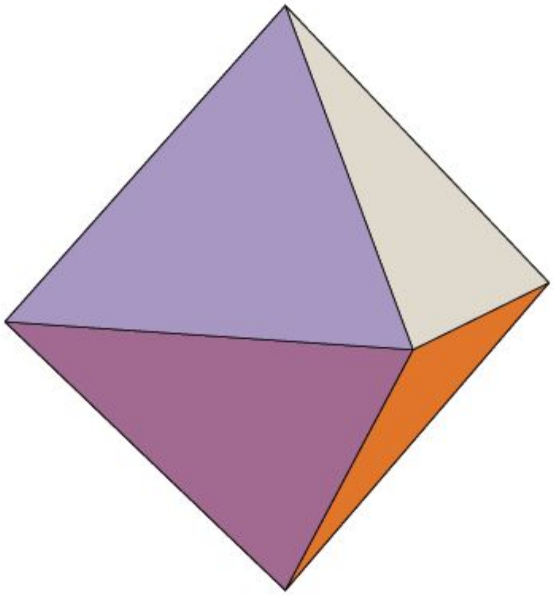
Какие оси симметрии имеет куб?



Ответ: 4 оси симметрии третьего порядка, проходящих через противоположные вершины; 6 осей симметрии, проходящих через середины противоположных ребер; 3 оси симметрии четвертого порядка, проходящих через центры противоположных граней.

Упражнение 21

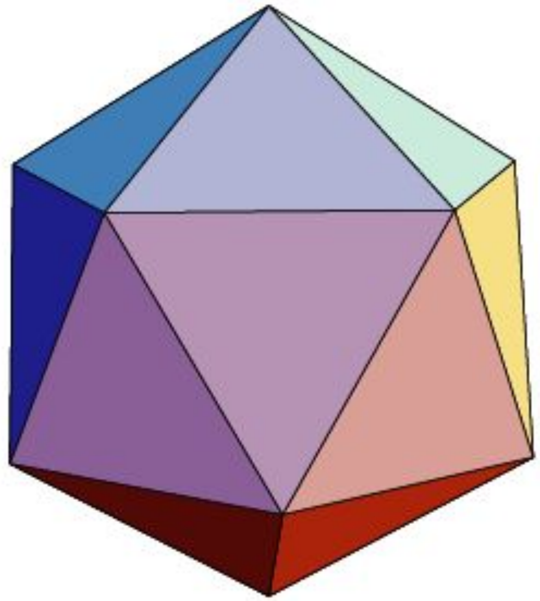
Какие оси симметрии имеет октаэдр?



Ответ: 3 оси симметрии четвертого порядка, проходящих через противоположные вершины; 6 осей симметрии, проходящих через середины противоположных ребер; 4 оси симметрии третьего порядка, проходящих через центры противоположных граней.

Упражнение 22

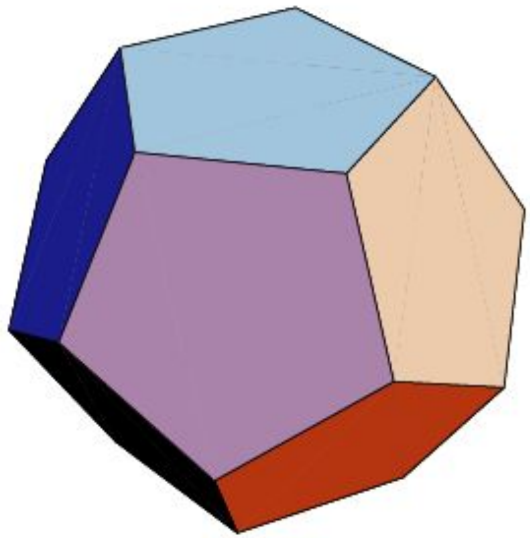
Какие оси симметрии имеет икосаэдр?



Ответ: 6 осей симметрии пятого порядка, проходящих через противоположные вершины; 15 осей симметрии, проходящих через середины противоположных ребер; 10 осей симметрии третьего порядка, проходящих через центры противоположных граней.

Упражнение 23

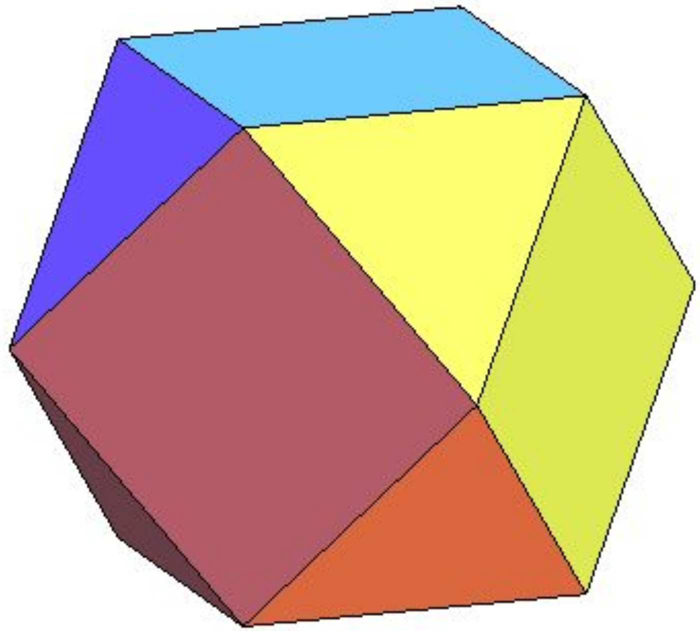
Какие оси симметрии имеет додекаэдр?



Ответ: 10 осей симметрии третьего порядка, проходящих через противоположные вершины; 15 осей симметрии, проходящих через середины противоположных ребер; 6 осей симметрии пятого порядка, проходящих через центры противоположных граней.

Упражнение 24

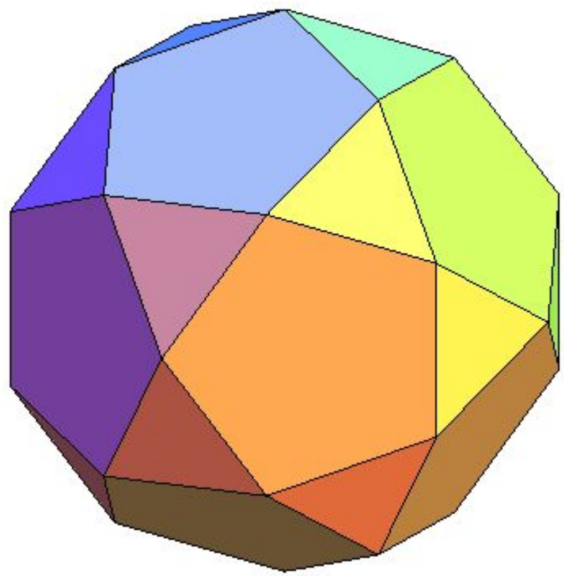
Какие оси симметрии имеет кубооктаэдр?



Ответ: 6 осей симметрии, проходящих через противоположные вершины; 4 оси симметрии третьего порядка, проходящих через центры противоположных треугольных граней; 3 оси симметрии четвертого порядка, проходящих через центры противоположных квадратных граней.

Упражнение 25

Какие оси симметрии имеет икосододекаэдр?



Ответ: 15 осей симметрии, проходящих через противоположные вершины; 10 осей симметрии третьего порядка, проходящих через центры противоположных треугольных граней; 6 осей симметрии пятого порядка, проходящих через центры противоположных пятиугольных граней.

Упражнение 26

Приведите пример фигуры, имеющей центр симметрии, но не имеющей оси симметрии.

Ответ: Наклонный параллелепипед.

Упражнение 27

Приведите пример фигуры, имеющей ось симметрии, но не имеющей центра симметрии.

Ответ: Правильная четырехугольная пирамида.

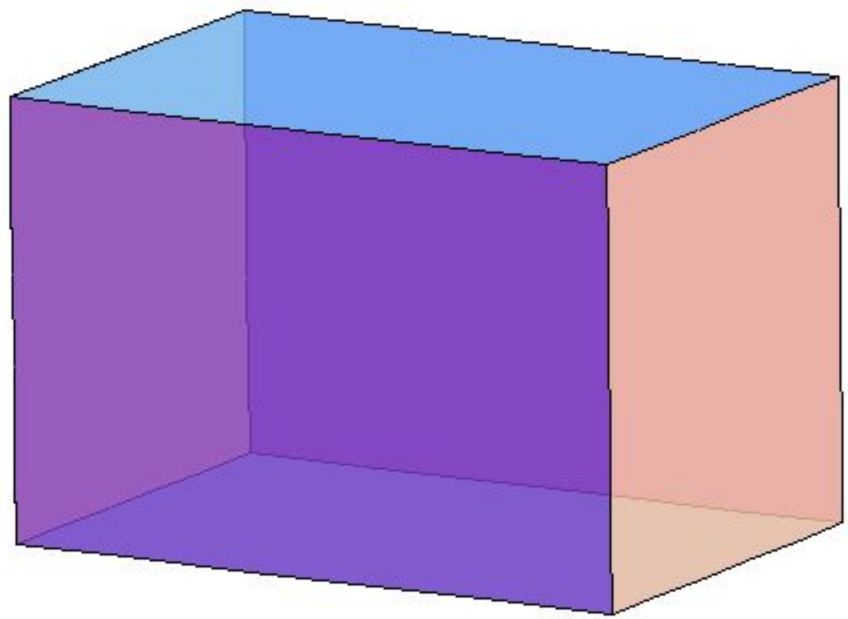
Упражнение 28

Укажите центр, оси и плоскости симметрии фигуры, состоящей из двух пересекающихся прямых.

Ответ: Центр симметрии – точка пересечения данных прямых. Оси симметрии – две прямые, содержащие биссектрисы углов, образованные данными прямыми, и прямая, проходящая через точку пересечения данных прямых и перпендикулярная их плоскости. Если данные прямые перпендикулярны, то сами они также являются осями симметрии. Плоскости симметрии: плоскость данных прямых и две плоскости, проходящие через биссектрисы углов, образованные данными прямыми и перпендикулярные их плоскости.

Упражнение 29

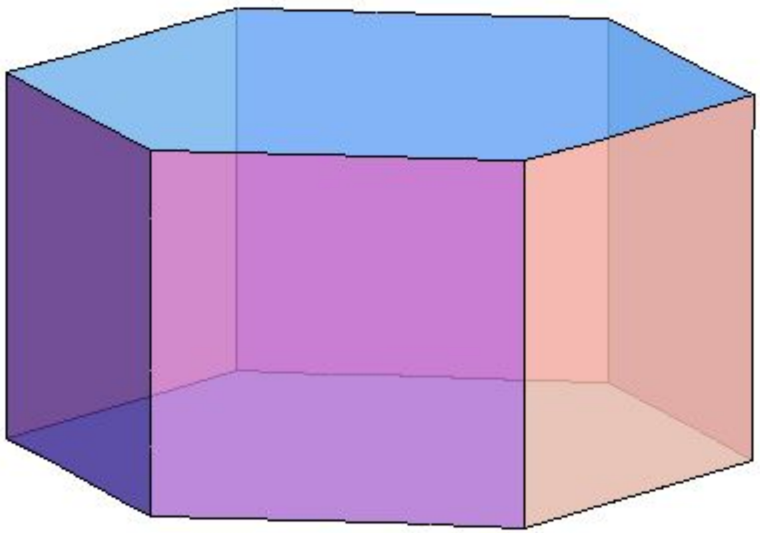
Сколько плоскостей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед, гранями которого не являются квадраты?



Ответ: 3.

Упражнение 30

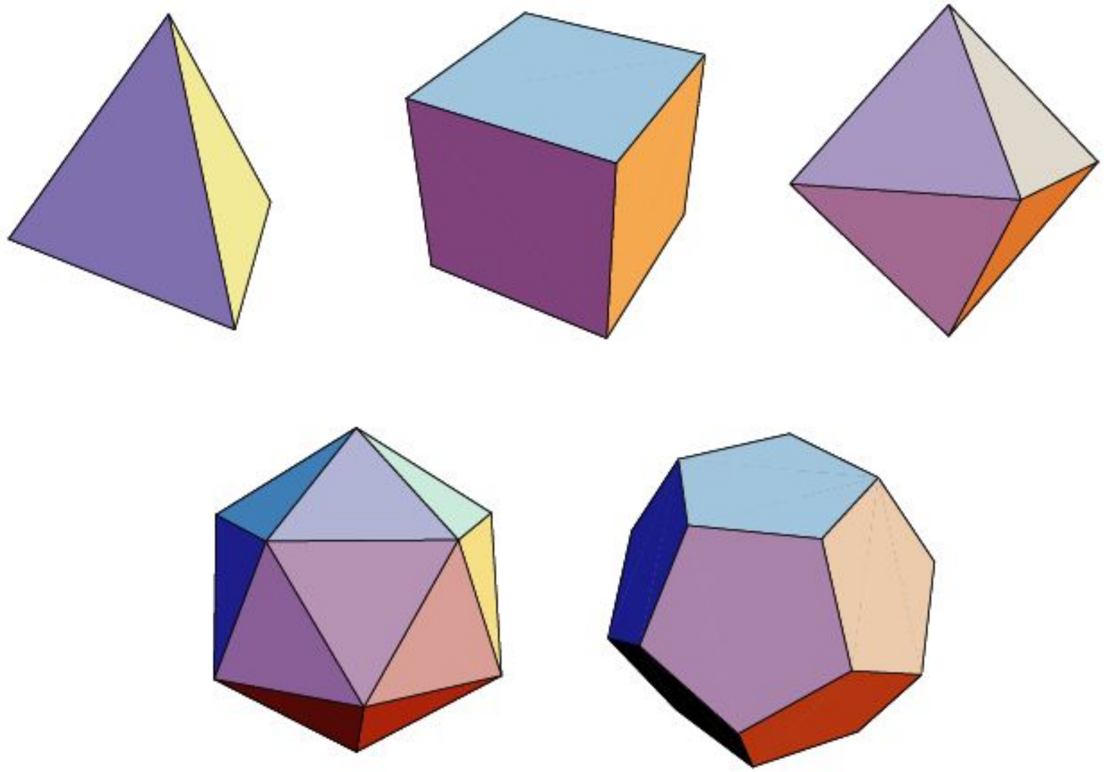
Сколько плоскостей симметрии имеет правильная шестиугольная призма?



Ответ: 7.

Упражнение 31

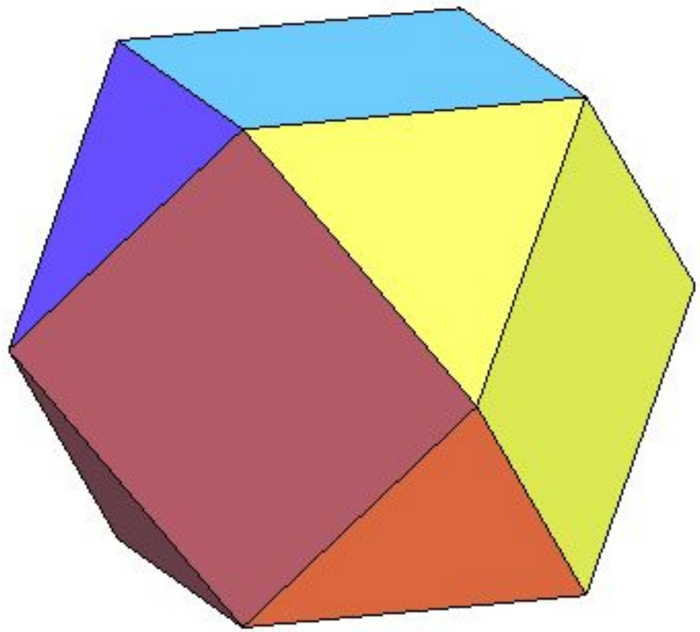
Сколько плоскостей симметрии имеет: а) правильный тетраэдр; б) куб; в) октаэдр; г) икосаэдр; д) додекаэдр?



Ответ: а) 6; б) 9; в) 9; г) 15; д) 15.

Упражнение 32

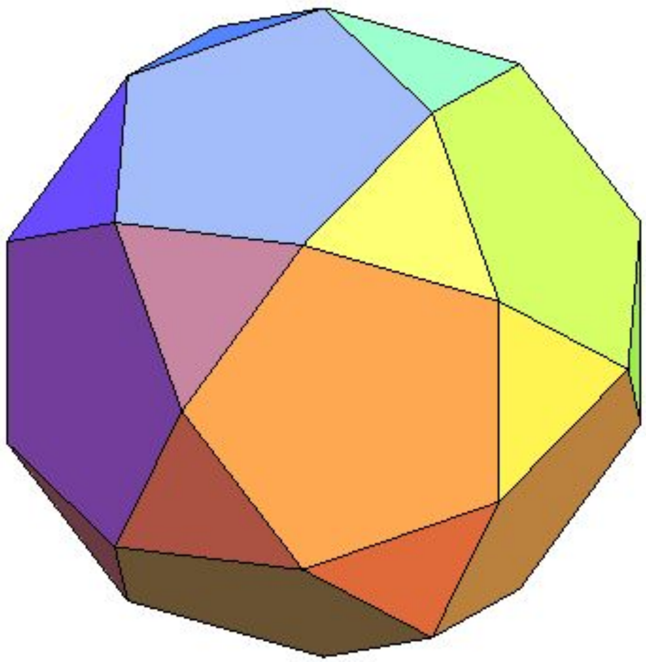
Сколько плоскостей симметрии имеет кубооктаэдр?



Ответ: 9.

Упражнение 33

Сколько плоскостей симметрии имеет икосододекаэдр?



Ответ: 15.

Упражнение 34

Приведите примеры пространственных фигур, у которых есть ось симметрии, но нет плоскости симметрии и, наоборот, есть плоскость симметрии, но нет оси симметрии.

Ответ: Пирамида, в основании которой параллелограмм, может иметь ось симметрии, но не имеет плоскости симметрии. Правильная треугольная пирамида имеет плоскости симметрии, но не имеет осей симметрии.