ЗАДАНИЯ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ С5.

Макарова Татьяна Павловна, учитель математики
ГБОУ СОШ №618 г. Москвы

Подготовка к ЕГЭ.

Задача 1. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\cos\sqrt{a^2-x^2}=1$ имеет ровно 8 решений.

Решение.

1. Преобразуем уравнение

$$\cos\sqrt{a^2-x^2}=2\pi n,\ n\in Z \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-x^2=(2\pi n)^2 \\ n\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{a^2-(2\pi n)^2} \\ n=0,1,2,k \end{cases}$$

2. Если $a^2-(2\pi n)^2>0$, то уравнение имеет два корня, отличающихся знаком.

Если $a^2-(2\pi n)^2=0$, то имеется ровно один корень .

Если $a^2-(2\pi n)^2<0$, то корней нет. Поэтому для выполнения условия задачи, необходимо и достаточно, чтобы было $a^2-(2\pi n)^2$

положительно при $n=0,1,2,3$ и отрицательно при $n=4,5,k$

3. Получаем систему неравенств: $\begin{cases} a^2-(2\pi\cdot 3)^2>0, \\ a^2-(2\pi\cdot 4)^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|>2\pi\cdot 3 \\ |a|<2\pi\cdot 4 \end{cases}$

Ответ: $-8\pi<a<-6\pi,\quad 6\pi<a<8\pi.$

Алгоритм решения задач с параметром графическим методом

1. Преобразовываем исходное условие задачи к системе неравенств, в которых неизвестное выражается через параметр, или, наоборот, параметр выражается через неизвестное.
2. Вводим систему координат $(a;x)$, если мы неизвестное выражали через параметр, или $(x;a)$, если, наоборот, параметр выражали через неизвестное.
3. Изображаем в выбранной координатной плоскости фигуру, которая задается множеством решений системы неравенств.
4. «Сканируем» эту фигуру, двигаясь вдоль оси параметра и определяем, при каких значениях параметра выполняются заданные в задаче условия.
5. Записываем ответ.

Задача 2. Найдите все значения ***a***, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2\left|x - a^2\right| - 8x$ имеет более двух точек экстремума.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x \geq a^2 : f(x) = x^2 - 10x + 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=5$;

б) при $x \leq a^2 : f(x) = x^2 - 6x - 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=3$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

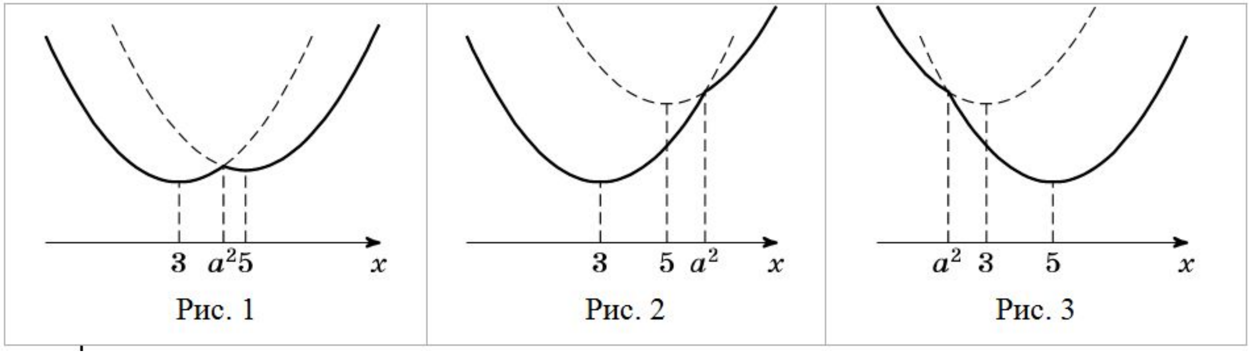


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

Задача 2. Найдите все значения ***a***, при каждом из которых функция $f(x)=x^2-2|x-a^2|-8x$ имеет более двух точек экстремума.

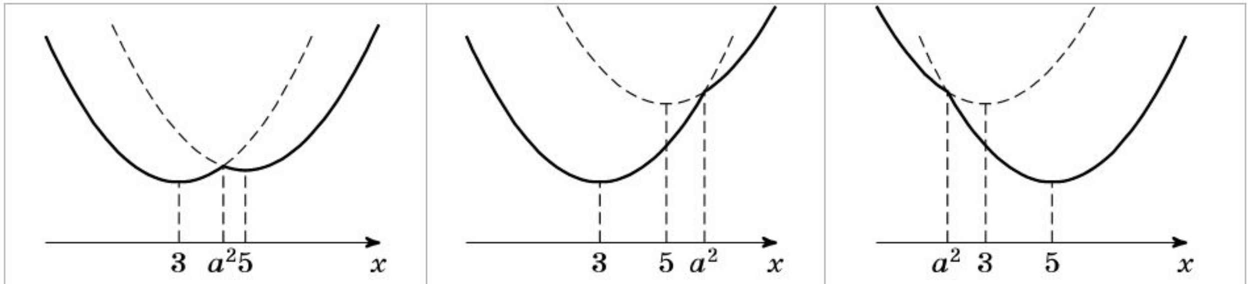


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

$-\sqrt{5}<$

2) График обеих квадратичных функций проходят через точку $(a^2;f(a^2))$.

3) Функция $y=f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно – три, в единственном случае (рис. 1): $3<a^2<5 \quad \Leftrightarrow \sqrt{3}<|a|<\sqrt{5}.$

Ответ: $-\sqrt{5}<a<-\sqrt{3}; \quad \sqrt{3}<a<\sqrt{5}.$

Задача 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} y^2+xy-4x-9y+20=0, \\ y=ax+1, \\ x>2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

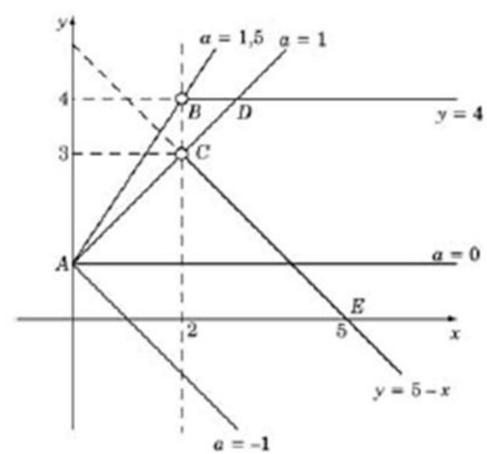
Решение. Преобразуем исходную систему

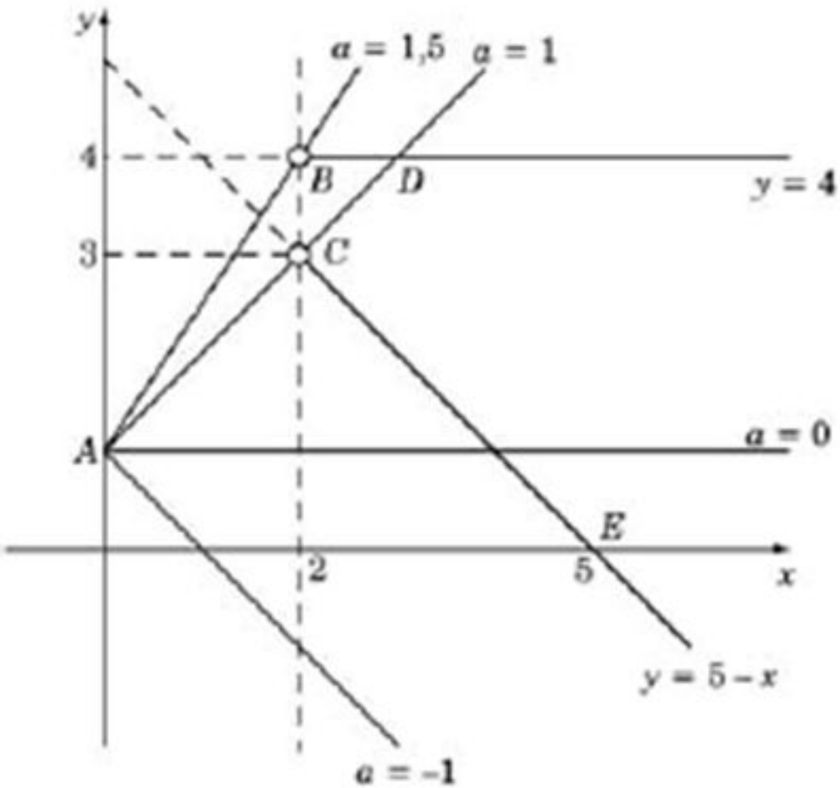
$$\begin{cases} (y-4)x+y^2-9y+20=0, \\ y=ax+1, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-4)x+(y-4)(y-5)=0, \\ y=ax+1, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-4)(x+y-5)=0, \\ y=ax+1, \\ x>2 \end{cases}$$

Уравнение *(y-4)(x+y-5)=0* задает пару пересекающихся прямых *y=4* и *y=5-x*.

Система $\begin{cases} x>2, \\ (y-4)(x+y-5)=0 \end{cases}$

задает части этих прямых, расположенные правее прямой *x=2,* т.е. лучи BD и CE (без точек *B* и *C*), см. рис.





Уравнение $y=ax+1$ задает прямую m с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $A(0;1)$. Следует найти все значения $\boldsymbol{a}$, при каждом из которых прямая m имеет единственную общую точку с объединением лучей BD и CE.

а) Прямая AB задается уравнением $y=1,5x+1$. Поэтому при $a \geq 1,5$ прямая m не пересечет ни луч BD, ни луч CE.

б) Прямая AC задается уравнением $y=x+1$ Поэтому при $1 \leq a < 1,5$ прямая m пересечет луч BD, но не пересечет луч CE.

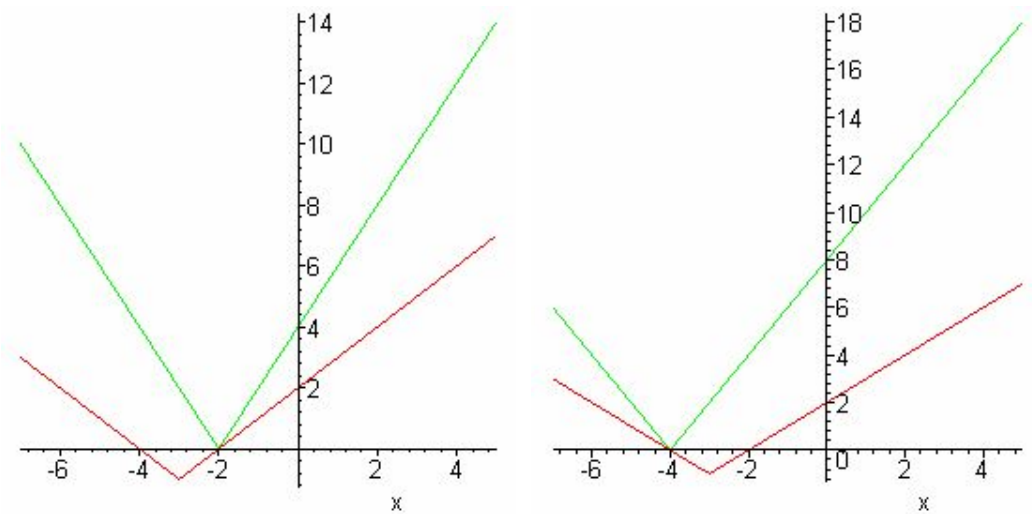
в) При $0<a<1$ прямая m пересечет и луч BD, и луч CE.

г) При $-1 < a \leq 0$ прямая m пересечет только луч CE, а при $a \leq -1$ она не пересечет ни луч BD, и ни луч CE.

Ответ. $-1 < a \leq 0, \quad 1 \leq a < 1,5.$

Задача 4. Найдите все значения а, такие, что уравнение $|x+3| - 1=|2x - a|$ имеет единственное решение.

Решение. Решим с помощью графиков.



Для выполнения условия задачи вершина графика правой части уравнения должна находиться в точке x = -2 или x = -4.

Т.е. $\left[\begin{array}{l} -4-a=0, \\ -8-a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-8, \\ a=-4. \end{array}\right.$

Ответ: - 8 и – 4.

Задача 5. Найдите все значения *a*, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 + 4x + |x^2 - 1,5x - 1|$ принимает только неотрицательные значения.

Решение. $x^2 - 1,5x - 1 = 0$, $x = 2; -0,5.$

1) $x \in (-\infty; -0,5) \cup (2; \infty)$ $f(x) = 2x^2 + 2,5x - 1 - a$

Т.к. ветви параболы *f(x)* направлены вверх, вершина $y = -5/8$ для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы

$$f\left(-\frac{5}{8}\right) \ge 0 \to \frac{25}{32} - \frac{25}{16} - 1 - a \ge 0 \to -\frac{57}{32} - a \ge 0 \to a \le -\frac{57}{32}.$$

2) $x \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ $f(x) = \frac{11}{2}x + 1 - a$

График функции *f(x)* – возрастающая прямая, таким образом, для выполнения Условия задачи необходимо и достаточно, чтобы $f(-0,5) \ge 0$

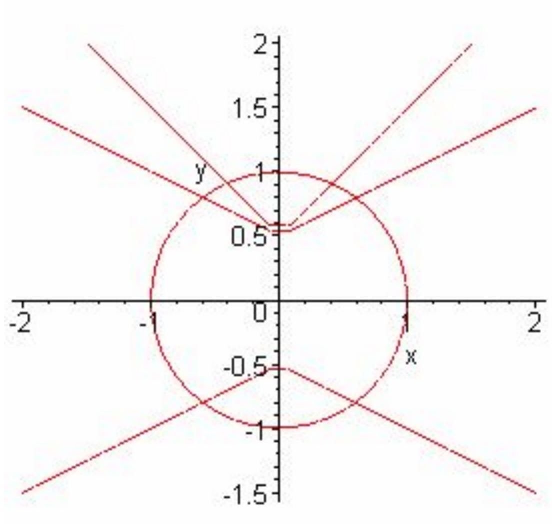
$$-\frac{11}{4} + 1 - a \ge 0 \quad \to \quad a \le -\frac{7}{4}.$$

$$Ответ: \quad a \le -\frac{57}{32}.$$

Задача 6. Найдите все значения p, при каждом из которых для любого q система $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y=q|x|+p \end{cases}$ имеет решения.

Решение.

График функции, заданной первым уравнением – окружность радиуса 1 с центром в начале координат. График функции, заданной вторым уравнением должен пересекать эту окружность при любом *q,* т.е. при любом угле наклона прямых этой ломаной.



Нетрудно видеть, что это условие для любого угла наклона выполняется при сдвиге вершины ломаной по оси *y* не более чем на единицу вниз или вверх .

Ответ: $-1 \le p \le 1.$

Задачи для самостоятельного решения:

1. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(|x|-9)^2+(y-5)^2=9,\\(x+3)^2+y^2=a^2\end{cases}$$

имеет единственное значение

2. При каких a уравнение $\cos\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)=1$ имеет ровно 8 корней?
Ответ: $a\in(-8\pi;-6\pi)\cup(6\pi;8\pi).$
3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение
$3x + |2x + |a-x|| = 7|x+2|$ имеет хотя бы один корень.
Ответ: $a\in(-\infty;-12]\cup[8;\infty).$

4. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение 4x - $|3x - |x+a|| = 9|x-3|$ имеет два корня.

Для успешного решения задач типа С5 необходимо:

- Уметь решать уравнения и неравенства
- Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы
- Решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков; использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод
- Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы

Источники:

1. http://alexlarin.narod.ru
2. http://www.akipkro.ru/
3. http://4ege.ru/matematika/
4. http://www.ctege.info/content/
5. http://seklib.ru/
6. http://mathege.info/category/zadaniya-ege/c5-zadanie-ege/
7. ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания. Под ред. Семенова А.Л., Ященко И.В., М.: Экзамен, 2011.(сборник 1)
8. ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания. Под ред. Семенова А.Л., Ященко И.В., М.: Экзамен, 2011.(сборник 2)
9. ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания. Под ред. Семенова А.Л., Ященко И.В., М.: Экзамен, 2011.(сборник 3)

11. Математика. Диагностические работы в формате ЕГЭ., М.: МЦНМО, 2011 - 36 с.