Задания типа С5

8. Найти все значения *a*, при каждом из которых уравнение $1=|x-3|-|2x+a|$ имеет единственное решение.

Решение:

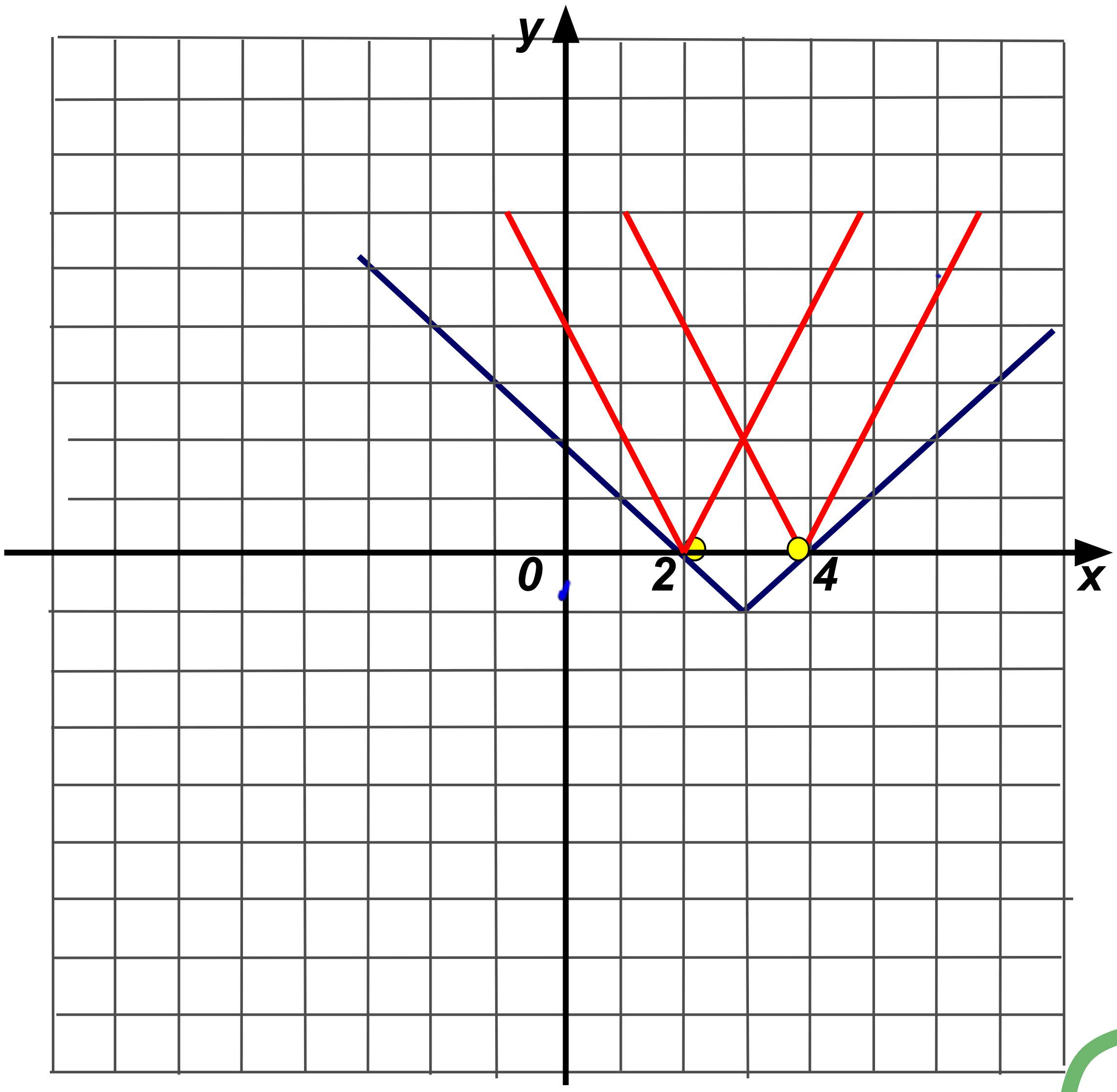
Перепишем уравнение:

$|2x+a| = |x-3| - 1$.

Построим графики функций:

$y = |x-3| - 1$ и

$y = |2x+a|$.



Очевидно, что данное уравнение будет иметь единственное решение, если вершина движущегося «уголка» попадет в точку с координатами ***(2; 0)*** или ***(4; 0).*** Следовательно, координаты этих точек удовлетворяют уравнению $y = |2x + a|$. Значит,

$0 = |4 + a|$ или $0 = |8 + a|$

$a = -4$ $a = -8.$

Ответ: ***- 8 или – 4***.

ПАМЯТКА

Пользоваться определением модуля

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

А так же

$|x| < a \rightarrow -a < x < a$

$|x| > a \rightarrow x < -a$ **и** $x > a$

Знать и строить: уравнение, *линию*, *алгоритм построения*:

$y = kx + b$ – линейная, прямая — ***надо иметь, хотя бы, 2 точки***

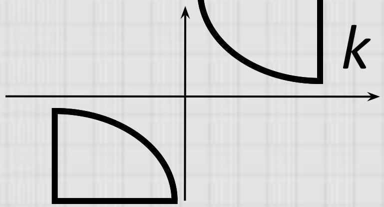
$y = ax^2 + bx + c$ – квадратная, парабола

- ****направление ветвей***
- ****пересечение с OX***
- ****$x_0 = -b/2a$ – абсцисса вершины – ось симметрии***
- ****выделять полный квадрат***

$x^2 + y^2 = R^2$ – окружность, Центр (0;0), R - радиус

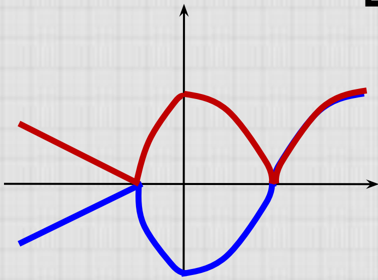
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ – окружность, Центр (a; b), R - радиус

$y = \frac{k}{x}$ - гипербола



k > 0

y = f(x) график



y = |f(x)| график

линии выше OX ***оставляем***

точки оси OX

линии ниже OX ***симметрично в верхнюю полуплоскость***

Преобразования	графики

$y = |kf(\underline{mx + c}) + b|$

$y = |kf(m(x + a)) + b|$

Контрольный вопрос

Как построить график …

1. $y = f(x)$ — ***исходная по точкам***

2. $y = f(mx)$ — $m = 1/3$ ***растянуть в 3 раза вдоль оси ОХ***

а, если $m = -2$?

3. $y = f(m(x + a))$ — $a = -2$ ***сдвинуть на 2 вправо***

а, если $a = 2$?

4. $y = kf(m(x + a))$ — $k = 2$ ***растянуть в 2 раза вдоль оси ОY***

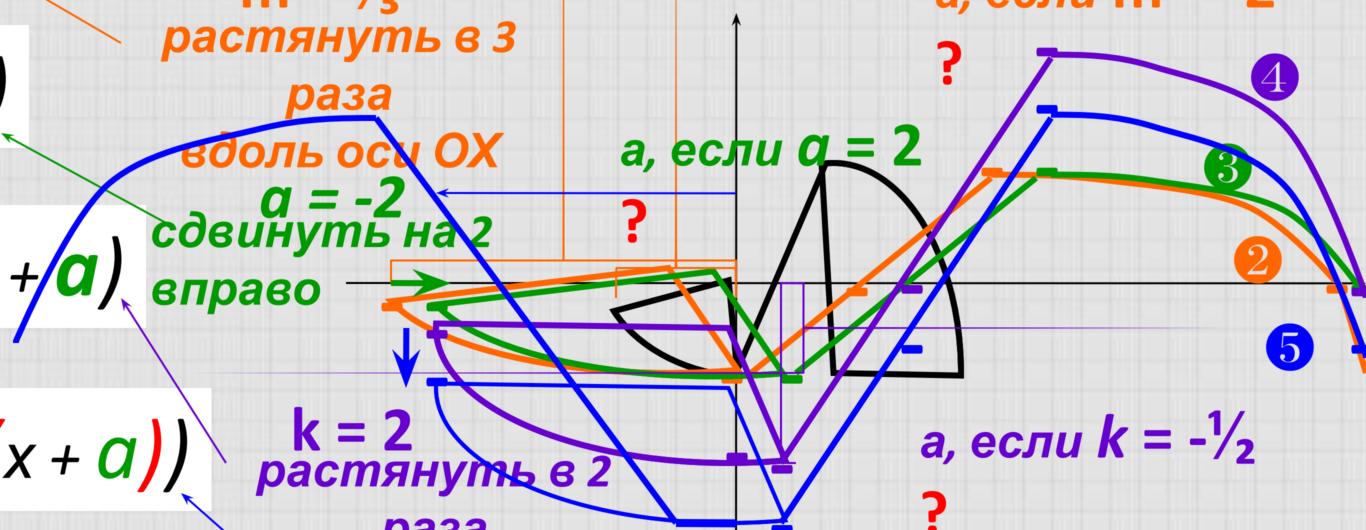
а, если $k = -1/2$?

сжать и (-) влево

5. $y = kf(m(x + a)) + b$ — $b = -2$ ***сдвинуть на 2 вниз***

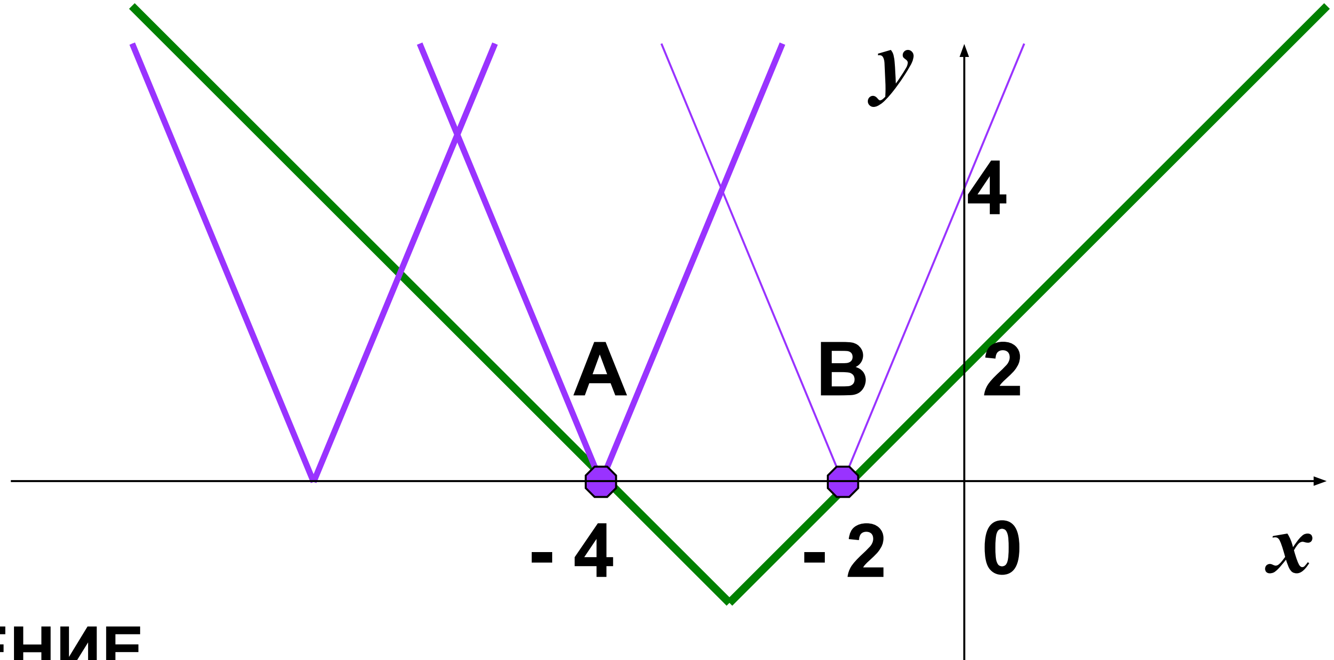
сжать и (-) вверх ?

а, если $b = 1/2$?



6. $y = kf(m(\underline{|x|} + a)) + b$ — ***Линия при $x \geq 0$ и симметричная ей при $x \leq 0$ относительно оси ОУ***

9 Найдите все значения параметра *а*, при которых уравнение $|2x-a|=|x+3|-1$ имеет единственное решение.



РЕШЕНИЕ.

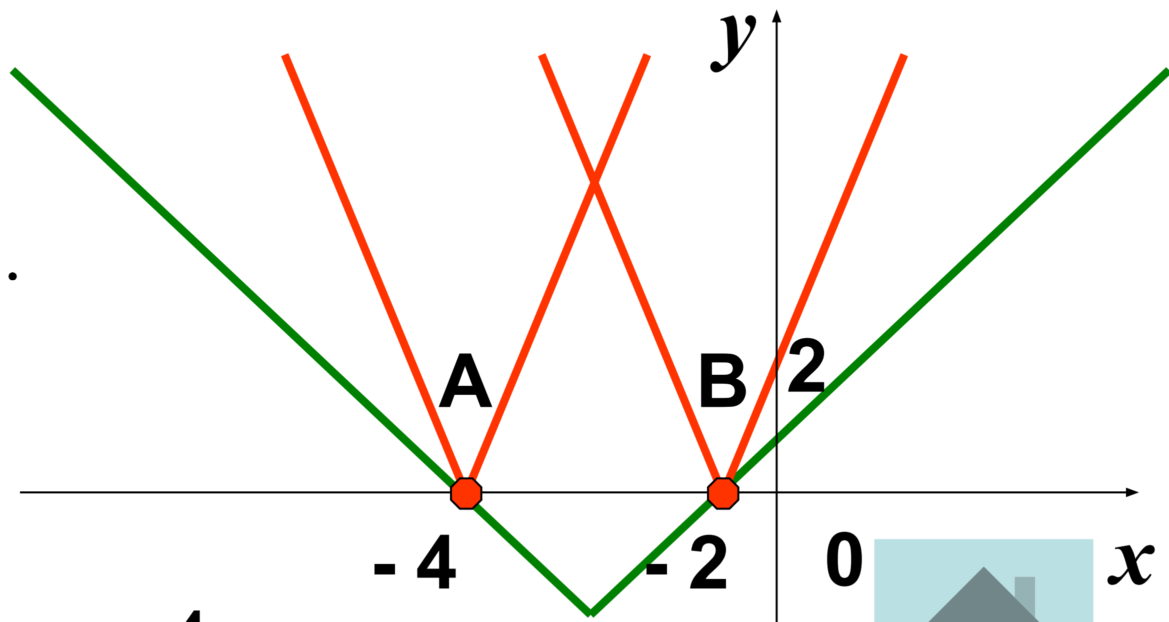
Правая часть этого уравнения задает неподвижный «уголок», левая – «уголок», вершина которого двигается по оси абсцисс.

Очевидно, что данное уравнение будет иметь единственное решение, если вершина движущегося «уголка» попадет в точку А, или точку В. Имеем,

$$|x+3|-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-4, \quad x=-2,$$

тогда А(-4; 0), В(-2; 0) и координаты этих точек удовлетворяют уравнению $y=|2x-a|$.

$$\left[\begin{array}{l} |-8-a|=0 \\ |-4-a|=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-8 \\ a=-4 \end{array}\right. .$$



Ответ: $a=-8, \quad a=-4$

Задача 2. Найдите все значения ***a***, при каждом из которых функция $f(x)=x^2-2|x-a^2|-8x$ имеет более двух точек экстремума.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x \geq a^2 : f(x)=x^2-10x+2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=5$;

б) при $x \leq a^2 : f(x)=x^2-6x-2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=3$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

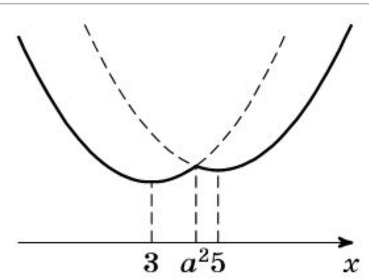


Рис. 1

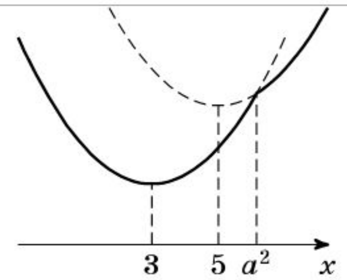


Рис. 2

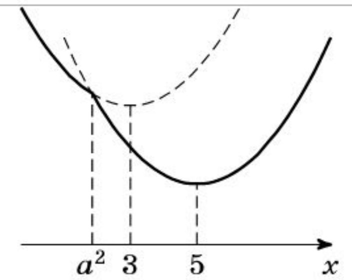


Рис. 3

Задача 2. Найдите все значения ***a***, при каждом из которых функция

$f(x)=x^2-2\left|x-a^2\right|-8x$ имеет более двух точек экстремума.

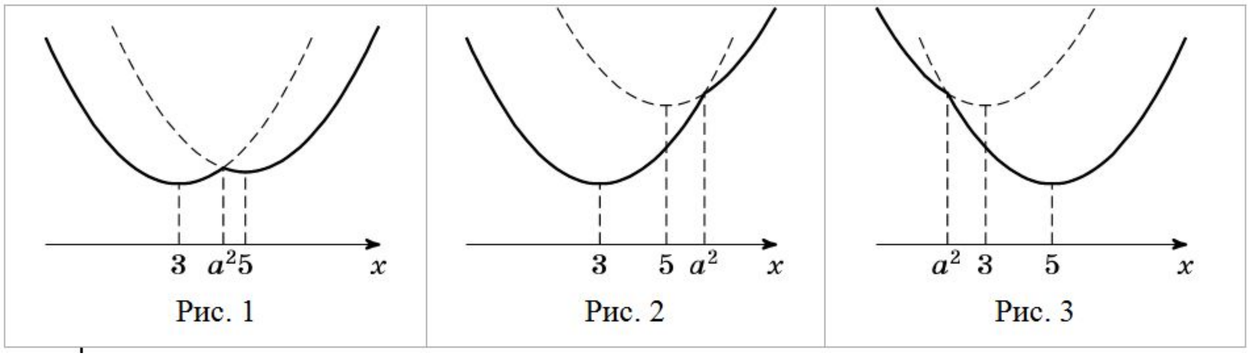


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

$-\sqrt{5}<$

2) График обеих квадратичных функций проходят через точку (a^2;$f(a^2)$) .

3) Функция $y=f(x)$имеет более двух точек экстремума, а именно – три, в единственном случае (рис. 1):

$$3<a^2<5 \quad \Leftrightarrow \sqrt{3}<|a|<\sqrt{5}.$$

Ответ: $-\sqrt{5}<a<-\sqrt{3};\quad \sqrt{3}<a<\sqrt{5}.$

С5.Найдите все положительные значения а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x|-9)^2+(y-5)^2=9, \\ (x+3)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

По определению модуля:

$$|x|-9 = \begin{cases} x-9, \text{ если } x \ge 0 \\ -x-9, \text{ если } x<0 \end{cases}$$

Заметим: x^2 $(-x)^2 = (-1\cdot x)^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2$

$(-x-9)^2 = (-(x+9))^2 = (-1)^2 \cdot (x+9)^2 = (x+9)^2$

$x \ge 0$ $(x-9)^2+(y-5)^2=9$ $(x+9)^2+(y-5)^2=9$ $x<0$

График уравнения - совокупность двух окружностей.

центры **(9; 5)** **R = 3** **(-9; 5)**

Второе уравнение системы:

$$\left(|x|-9\right)^2+\left(y-5\right)^2=9$$

$(x + 9)^2 + (y - 5)^2 = 9$

$(x - 9)^2 + (y - 5)^2 = 9$

Центр (-9; 5)

Центр (9; 5)

$BC^2 = 61$

$AC = 13$

$R=\sqrt{61}-3$

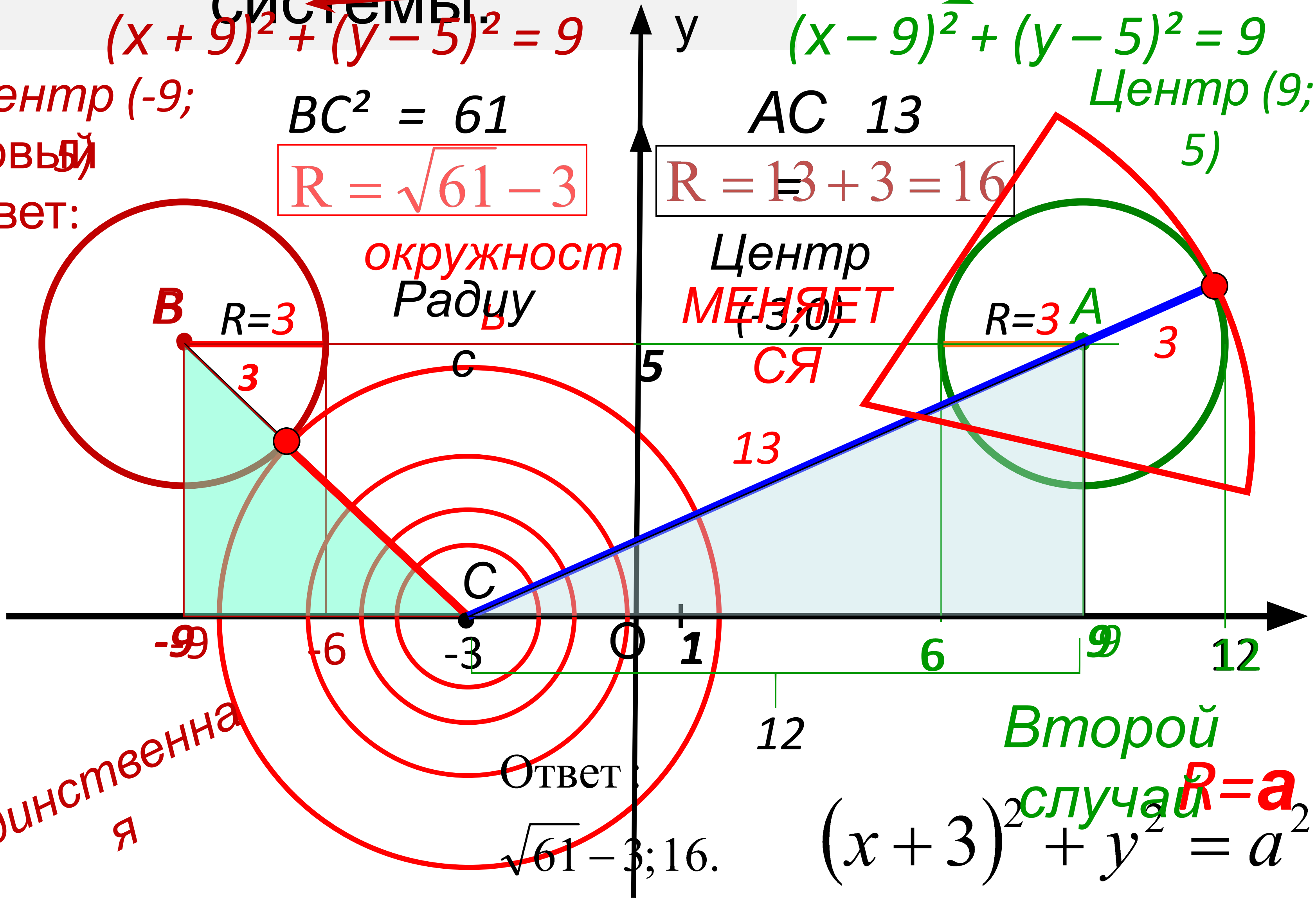
$R=13+3=16$

первый ответ: единственная окружность

Радиус

Центр (-3;0)

МЕНЯЕТСЯ



Второй случай

R=a

$$(x+3)^2+y^2=a^2$$

Ответ: $\sqrt{61}-3;16.$

Найти значения a, при которых уравнение $\frac{2}{x+1} = a|x-5|$ **на** $[0; +\infty)$ **имеет более двух корней.**

Корни - абсциссы точек пересечения *f(x)* *g(x)*

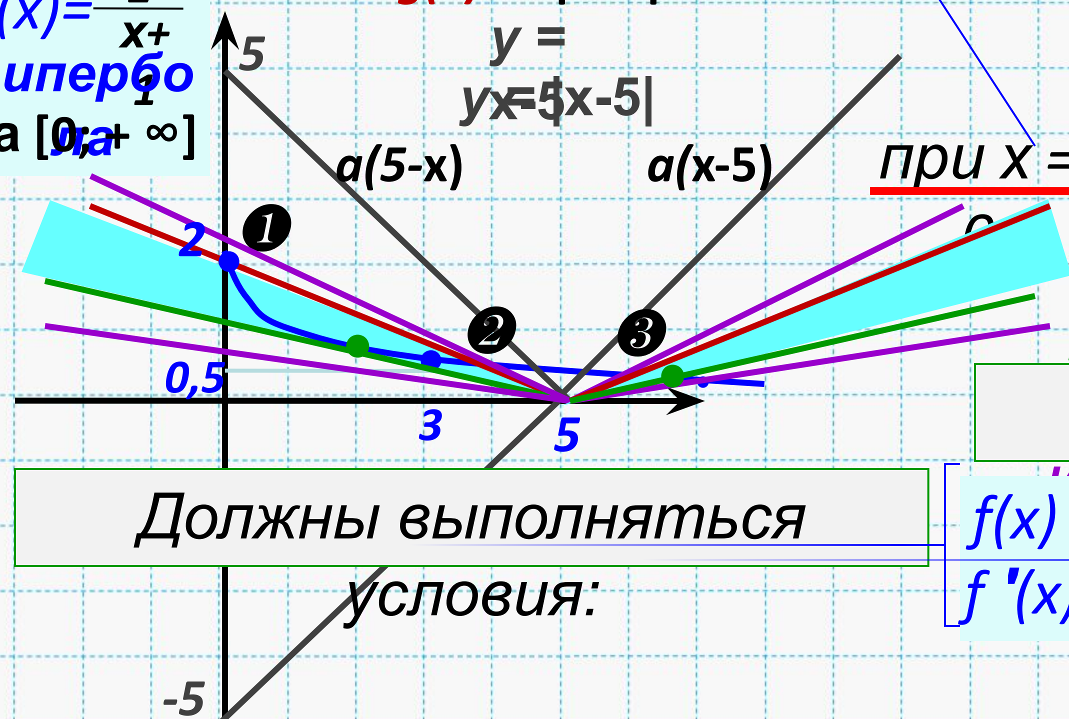
$f(x)=\frac{2}{x+1}$ *гипербола* на $[0; +\infty]$

$g(x) = a|x-5|$

$y = x-5$

$y = |x-5|$

$a(5-x)$ $a(x-5)$



величина «УГОЛКА» зависит от модуля a

при x = 0 → $a = ^2/_5$ 3 корня

2 корня

левый луч «УГОЛКА»

Определим точку касания корня

Должны выполняться условия:

$f(x) = g(x)$
$f'(x) = g'(x)$

$\frac{2}{x+1} = a(5-x)$ – левый луч

$-\frac{2}{(x+1)^2} = -a$

$$\frac{2}{x+1} = \frac{2(5-x)}{(x+1)^2} \quad \Big| \cdot \frac{x+1}{2} \qquad 1 = \frac{5-x}{x+1}$$

x = 2 в точке касания $a = ^2/_9$ (2 корня)

Ответ: $a \in (^2/_5; ^2/_9]$

лучи «УГОЛКА»

ЕГЭ. 07.06.12.

ЗАДАЧИ ИЗ КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ И ДЕМОНСТРАЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Пример 1. **Найдите сумму целых значений параметра a, при которых уравнение** $\left(a+2x-x^2+19\right)\left(a-3-|x-4|\right)=0$ **имеет три корня.**

Решение.

Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений: $\left[\begin{array}{l} a=x^2-2x-19 \\ a=|x-4|+3, \end{array}\right.$

График этой совокупности — объединение «уголка» и параболы.

Подвижная прямая $a=a_0$ пересекает график совокупности в трёх точках, если $a=a_1$, $a=a_2$, $a=a_3$.

1) $a=a_1 \Rightarrow$ **$a = 3$**.

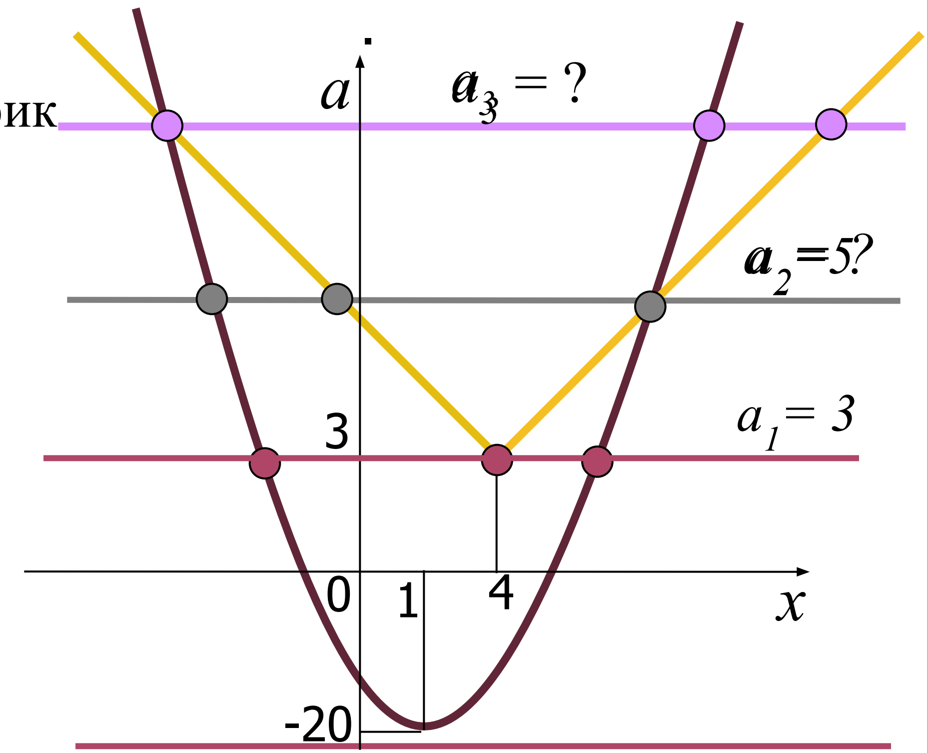
2) При $x>4$ $\quad x^2-2x-19=x-4+3,$

$x^2-3x-18=0$, $x_1=-3$, $x_2=6$. Число -3 не удовлетворяет условию $x>4$.

$a(6) = 6-4+3 = 5 \Rightarrow$ **$a_2 = 5$**.

3) При $x<4$ $\quad x^2-2x-19=-(\quad -4)+3,$

$x^2-x-26=0, x_{1,2}\notin Z \Rightarrow a_3 \notin Z.$



Ответ: 8.

ЗАДАЧИ ИЗ КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ И ДЕМОНСТРАЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

<u>Пример 1.</u> Найдите сумму целых значений параметра а, при которых уравнение $\left(a+2x-x^2+19\right)\left(a-3-|x-4|\right)=0$ **имеет три корня.**

Решение.

Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений: $\left[\begin{array}{l} a=x^2-2x-19 \\ a=|x-4|+3, \end{array}\right.$

График этой совокупности — объединение «уголка» и параболы.

Подвижная прямая $a=a_0$ пересекает график совокупности в трёх точках, если $a=a_1$, $a=a_2$, $a=a_3$.

1) $a=a_1 \Rightarrow$ **$a = 3$**.

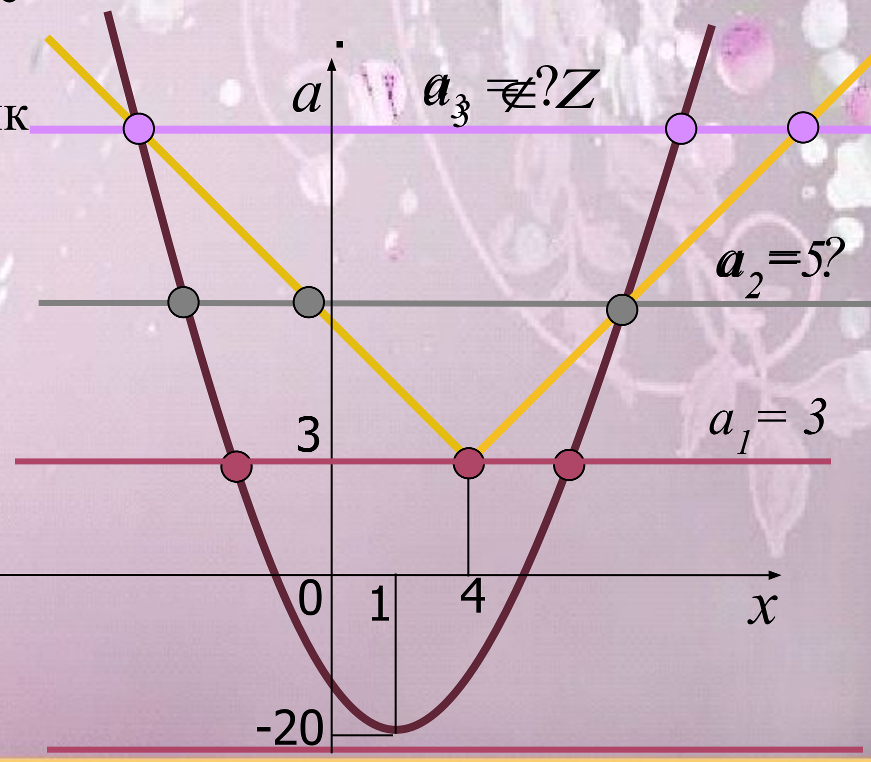
2) При $x>4$ $\quad x^2-2x-19=x-4+3$,

$x^2-3x-18=0$, $x_1=-3$, $x_2=6$. Число -3 не удовлетворяет условию $x>4$.

$a(6) = 6-4+3 = 5 \Rightarrow$ **$a_2= 5$**.

3) При $x<4$ $\quad x^2-2x-19=-(\quad -4)+3$,

$x^2-x-26=0, x_{1,2}\notin Z \Rightarrow a_3 \notin Z.$



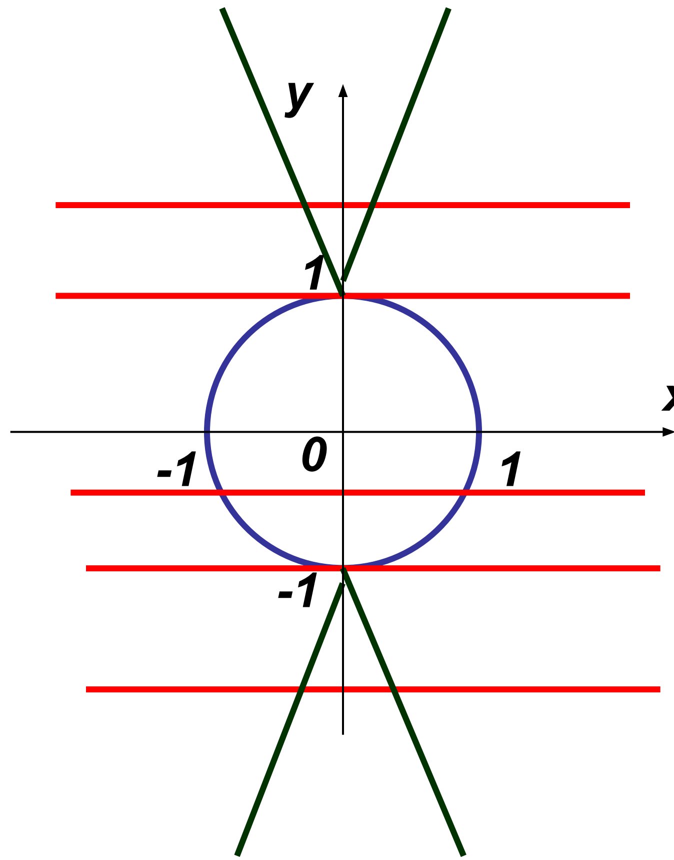
Ответ: ***8.***

10. Найдите все значения p, при каждом из которых найдётся q такое, что система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = q\,|\,x\,| + p \end{cases}$$

Решение:

Графиком функции $x^2 + y^2 = 0$ является окружность с центром (0; 0) и R = 1.



1) **q = 0, y = p; p = 1 или p = -1.**
2) **q > 0, y = q | x | + p; p = 1.**
3) **q < 0, y = q | x | + p; p = -1.**

Ответ: **p = 1 или p = -1.**

С5. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} 4|y-3| = 12 - 3|x|, \\ y^2 - a^2 = 3(2y-3) - x^2. \end{cases}$$
имеет ровно 4 решения.

<u>Решение.</u> Преобразуем данную систему:

$$\begin{cases} 3|x| + 4|y-3| = 12, \\ y^2 - 6y + 9 + x^2 = a^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3|x| + 4|y-3| = 12, \\ (y-3)^2 + x^2 = a^2. \end{cases}$$

Пусть t = y – 3, тогда система примет вид:

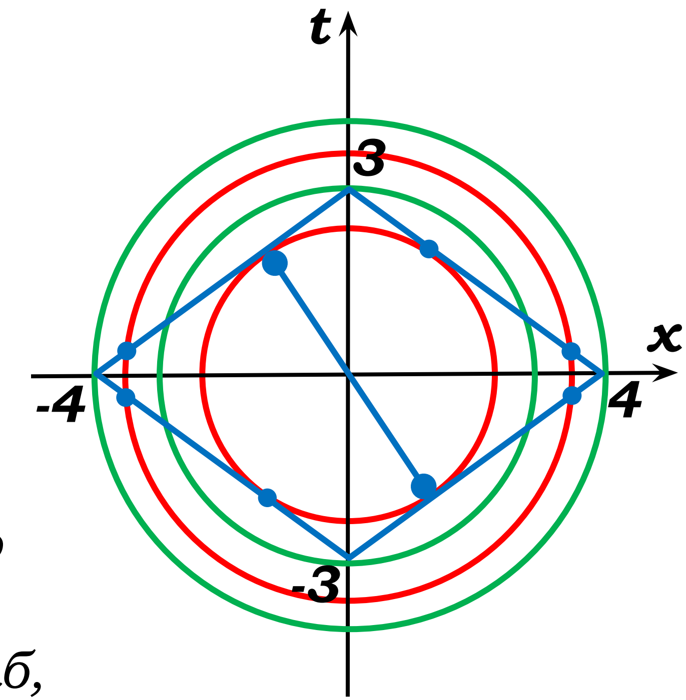
$$\begin{cases} 3|x| + 4|t| = 12, & (1) \\ t^2 + x^2 = a^2. & (2) \end{cases}$$

Заметим, что количество решений полученной системы совпадает с количеством решений исходной системы. Построим графики уравнений (1) и (2) в системе координат Oxt.

C5.

График первого уравнения – ромб, диагонали которого, равные 8 *и* 6, *лежат на осях Ox и Ot, а графиком второго уравнения является окружность с центром в начале координат и радиусом* $r = |a|$. *Графики уравнений системы имеют ровно четыре общих точки, и, следовательно, система имеет ровно* 4 *решения, тогда и только тогда, когда окружность либо вписана в ромб, либо ее радиус удовлетворяет условию*

$$3 < r < 4.$$



В первом случае радиус окружности является высотой прямоугольного треугольника с катетами 3 *и* 4, *откуда*

$$r = |a| = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4; \quad a = \pm 2,4.$$

В втором случае получаем $3 < |a| < 4$, *откуда* $-4 < a < -3$; $3 < a < 4$.

<u>*Ответ:*</u> $a = \pm\, 2,4$; $-4 < a < -3$; $3 < a < 4$.