

Городское управление образования г.Полысаево  
Информационно-методический центр  
Муниципальное общеобразовательное учреждение  
«Средняя общеобразовательная школа № 35»

# Загадочное число $\pi$

Работа на городскую научно-исследовательскую конференцию «Шаг в будущее»



Выполнил:  
Олейник Юлия,  
ученица 10 А класса  
Руководитель:  
Третьякова Галина  
Валерьяновна,  
учитель математики,  
Луцык Наталья Анатольевна,  
учитель информатики

Полысаево, 2008

Цель:

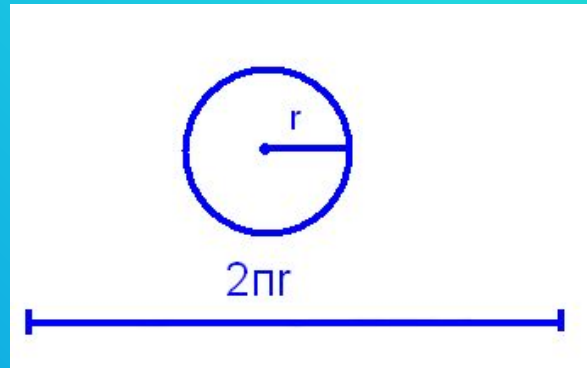
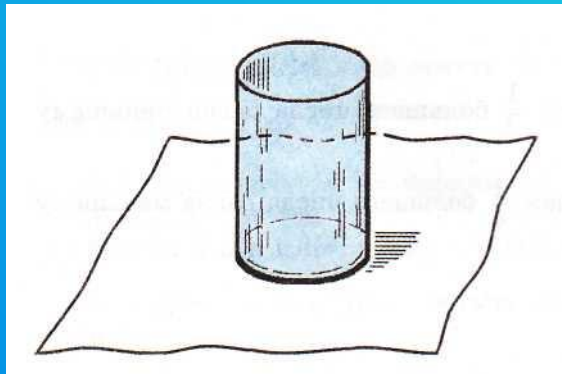
Исследование  
природы числа  $\pi$  и  
выявление его роли в  
окружающем нас  
мире.

# Задачи:

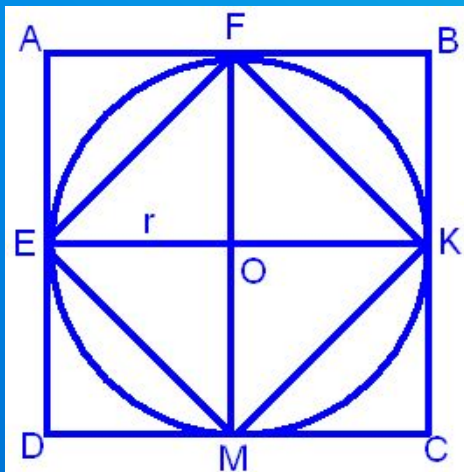
1. Рассмотреть:
  - ситуации возникновения числа  $\pi$ .
  - трансцендентность числа  $\pi$ .
  - некоторые способы вычисления числа  $\pi$ .
  - проблему квадратуры круга.
2. Провести собственный опыт исследования по вычислению числа  $\pi$ .
3. Раскрыть загадочность числа  $\pi$ .

# Первое знакомство с числом $\pi$

6 класс



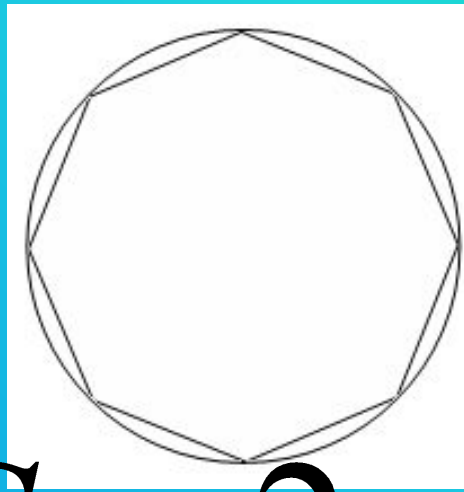
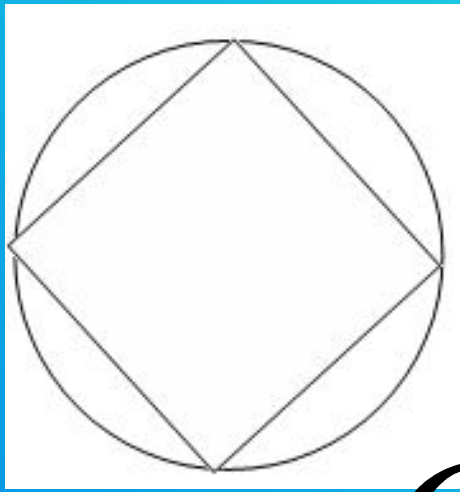
Длина окружности:  $C = 2 \cdot \pi \cdot r$



Площадь круга

$$S = \pi \cdot r^2$$

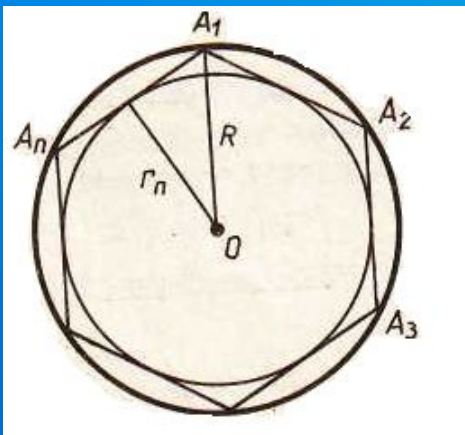
# 9 класс



$$C = 2\pi R$$

«Периметр любого правильного вписанного в окружность многоугольника является приближённым значением длины окружности.

Чем больше число сторон такого многоугольника, тем точнее это приближённое значение, так как многоугольник при увеличении числа сторон всё ближе и ближе «прилегает» к окружности



$$S = \pi R^2$$

# 10 класс

Особое значение число  $\pi$  имеет в курсе «Алгебры и начала анализа» в 10 классе для измерения угла в радианах, при изучении темы «Тригонометрические функции».



# Математический ребус на тему числа ПИ

*Разгадав ребус, вы узнаете имя древнегреческого философа и математика, которому приписывают открытие важнейших теорем геометрии.*



*Ответ: Пифагор.*

На этом школьная жизнь числа  $\pi$  не заканчивается. В старших классах мы встречаемся с этим удивительным числом в курсе физики на таких темах как:

## 1. Движение тела по окружности:

$$V = \frac{2\pi R}{T} \quad \text{- линейная скорость;}$$

$$W = 2\pi n \quad \text{- угловая скорость, } n \text{ – частота вращения}$$

## 2. Механическое напряжение:

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \text{- } S \text{ – площадь сечения (круга) } S = \pi R^2$$

## 3. Период колебания математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{e}{g}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{- период колебания груза на пружине}$$

## 4. Закон Кулона:

$$F = \frac{k|q_1||q_2|}{r^2} \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{- коэффициент пропорциональности}$$

## 5. Формула Томсона

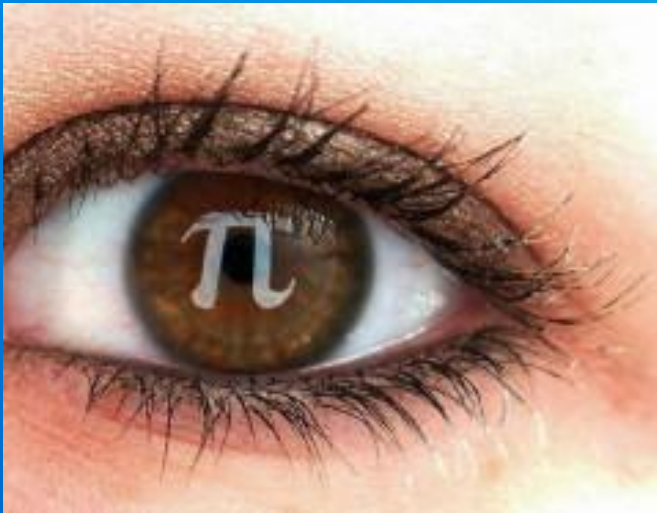
$$T = 2\pi \sqrt{LC} \quad \text{- период колебаний в колеблющемся контуре}$$



# Возникновение числа ПИ

1. Рассмотрим множество положительных чисел. Если у них случайным образом выбрать два числа, то какова вероятность того, что выбранные числа не будут иметь общего делителя? Ответ неожидан: искомая вероятность равна:

$$\frac{6}{\pi^2}$$



2. Когда-то немецкий математик Лейбниц (1646-1716) заинтересовался, сколько получится в пределе, если последовательно будем складывать такие числа:

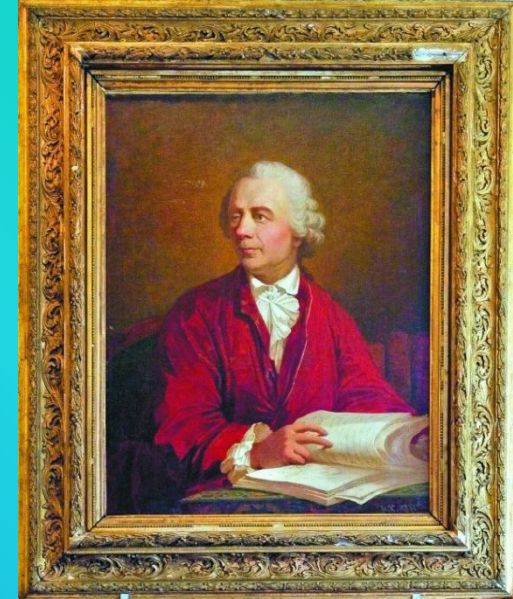
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Оказалось, что в пределе мы получим  $\frac{\pi}{4}$ . (Для доказательства Лейбниц пользовался приёмами высшей математики).



3. Аналогичный вопрос поставил перед собой Леонард Эйлер. Его интересовала «сумма чисел: ».

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi}{6^2}$$



Число  $\pi$  участвует и в известной формуле Эйлера

$$e^{2\pi i} = 1$$

из которой ещё глубже выясняется природа числа  $\pi$ .

Полученные формулы для числа  $\pi$  позволяют вычислить это число с большой точностью, не обращаясь к окружности и правильным многоугольникам, и при этом значительно легче и быстрее.

4. Было найдено и много других формул, где неожиданно появляется число  $\pi$ . Вот формула английского математика

Джона Валлиса: 
$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \dots$$

5. Удобнее для вычислений ряд, получаемый разложением

$$\arctg(x) \quad \text{при} \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^3} + \dots \right)$$

Наилучшую формулу для вычисления числа  $\pi$  получил Дж. Мэчан, пользуясь также разложением в ряды  $\arctg(x)$ . Он вычислил  $\arctg(x)$  с точностью до 100 десятичных знаков.

6. Число  $\arctg(x)$  встречается и в некоторых формулах неевклидовой геометрии, где оно, конечно, не является отношением длины окружности к её диаметру, а определяется числом аналитически.

# Трансцендентность числа $\pi$

*По определению*

*трансцендентным называют число,*

*которое не является*

*корнем никакого*

*алгебраического уравнения*

*с рациональными*

*коэффициентами.*

# Вычисления значений числа ПИ

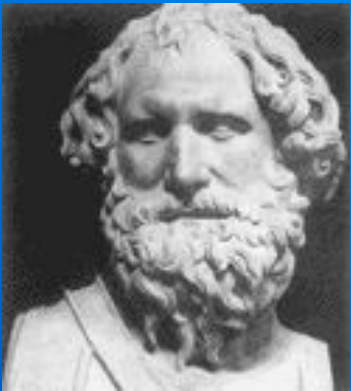
1. В Древнем Египте при вычислении площади круга для  $\pi$  использовали

значение  $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,16049$

2. Древнеримский архитектор Витрувий принимал  $\pi = 3\frac{1}{8}$

3. Архимед нашёл более точное приближение для числа  $\pi$ .

Он показал, что  $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{3}$  так что  $\pi \approx 3\frac{1}{7}$



# Числовой фокус китайского астронома Цю Шунь-Ши

Напишем по два раза три нечётных числа:

1, 1, 3, 3, 5, 5.

Три последних числа сделаем числителем, а три первых – знаменателем дроби .

$$\frac{355}{113}$$

Эта дробь позволяет вычислить  $\pi$  с точностью до седьмого знака.

Чтобы вычислить приближенно число  $\pi$ , в течение многих столетий поступали так: в окружность с диаметром, равным единице, мысленно вписывали правильный многоугольник с большим числом сторон и вычисляли периметр этого многоугольника, привлекая «формулу удвоения». Периметр такого многоугольника и принимался равным числу  $\pi$ . Для оценки погрешности такого приближения приходилось рассматривать также периметры правильных описанных многоугольников



# Проблема квадратуры круга

**Можно ли, пользуясь**

**только циркулем и**

**линейкой, построить**

**квадрат, площадь**

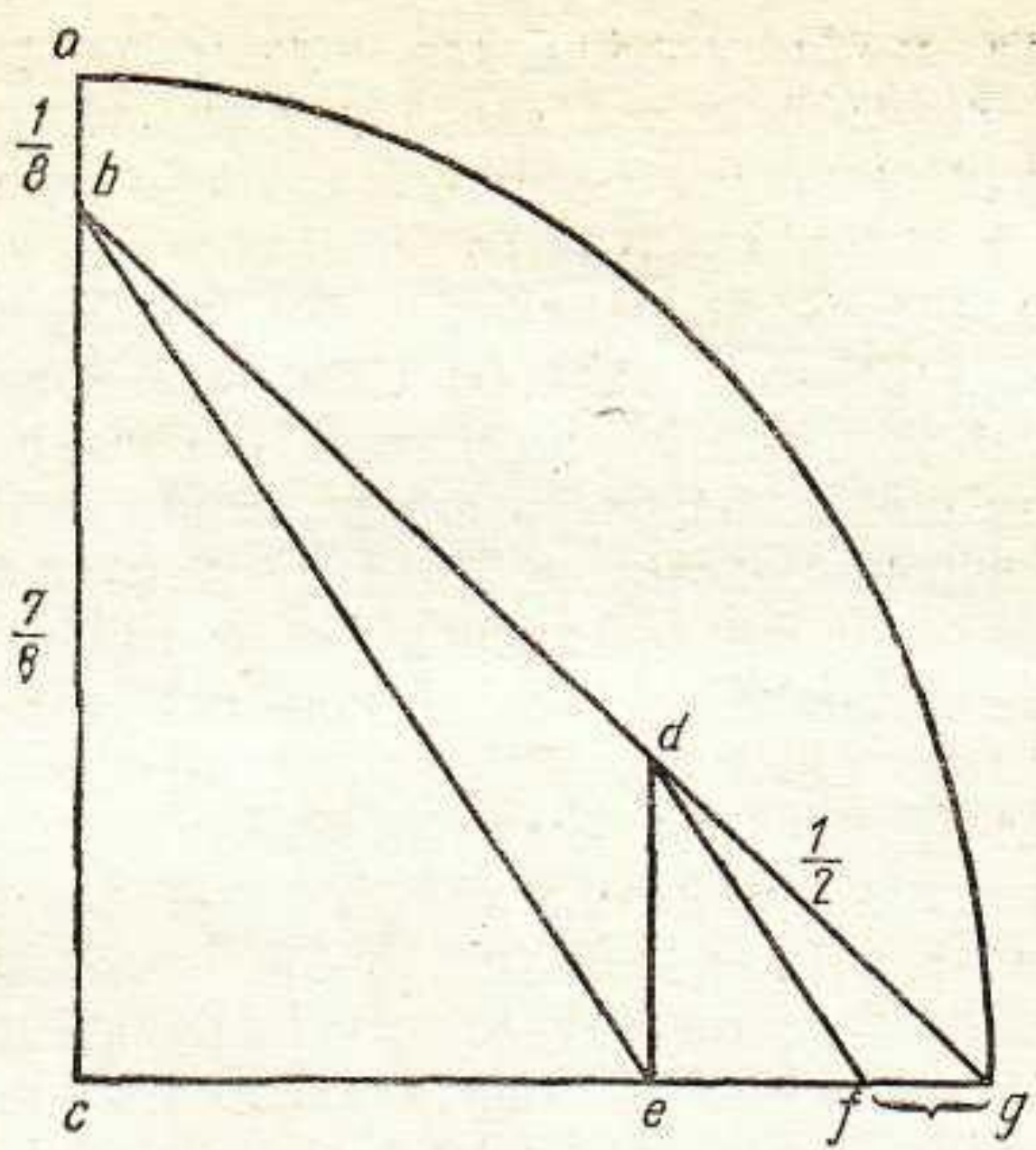
**которого была бы в**

**точности равна**

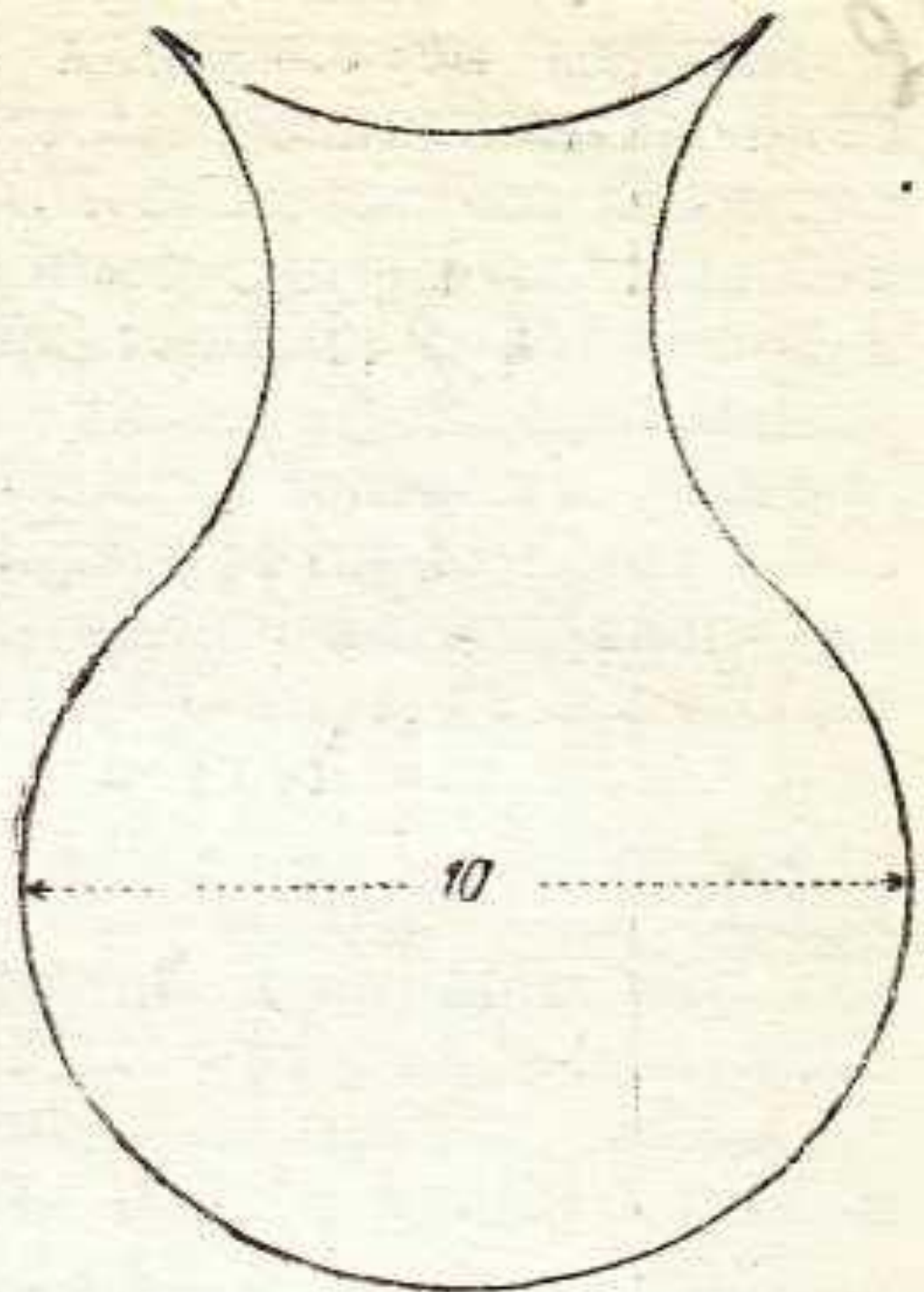
**площади данного круга?**

Проведём в четверти единичного круга несколько линий так, чтобы отрезок  $bc$  был равен  $7/8$  радиуса,  $dg - 1/2$ , отрезок  $de$  был параллелен отрезку  $ac$ , а  $df$  — параллелен отрезку  $be$ . Тогда, как легко видеть, расстояние  $fg$  равно  $\frac{16}{113}$  или  $0,1415929\dots$

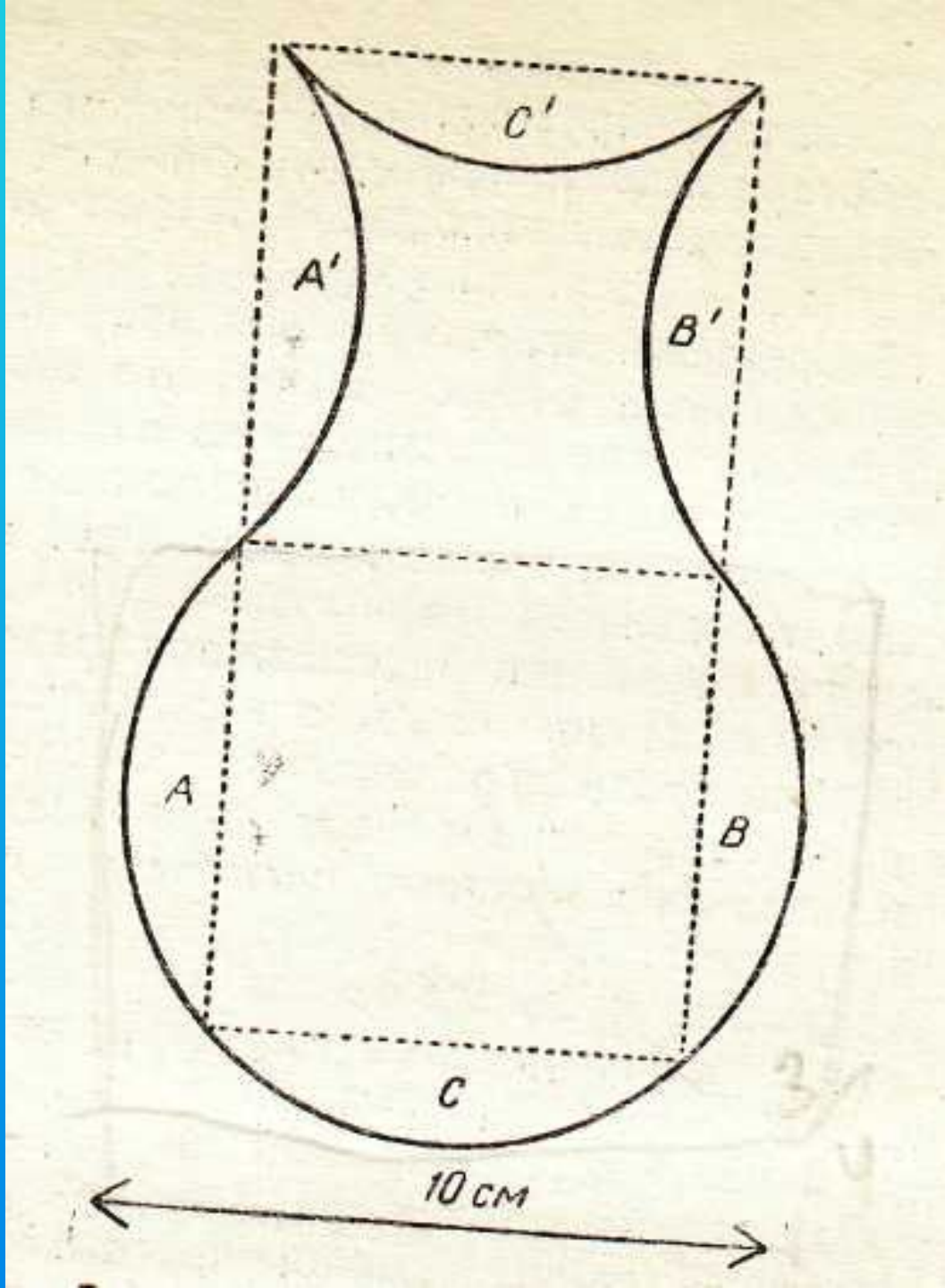
Поскольку  $\pi$  отложим отрезок втрое длиннее радиуса, продолжим его на расстояние  $fg$  и получим новый отрезок, длина которого отличается от  $\pi$  меньше чем на одну миллионную.



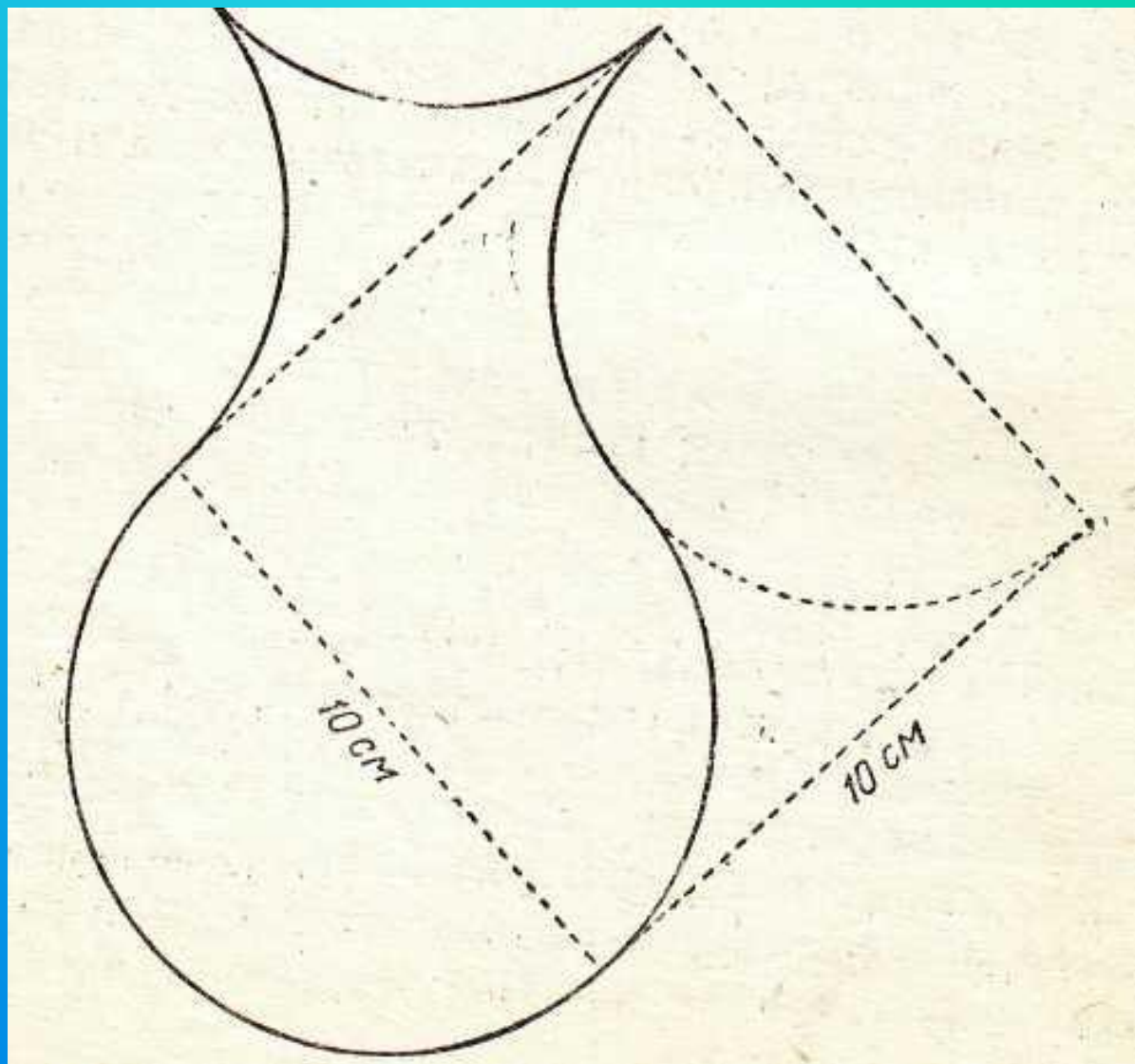
Контур нижней части этой вазы образован дугой в  $\frac{3}{4}$  окружности диаметром 10 см. Верхняя половина ограничена тремя четвертушками той же окружности. Как быстро можно назвать с точностью до последнего десятичного знака длину стороны квадрата, имеющего площадь, равную площади этой фигуры?



**Ответ:** сторона квадрата также равна 10 см. Если пунктирные линии провести так, как показано на рисунке, то станет видно, что сегментами А, В, и С можно заполнить «лунки» А', В', и С', при этом образуются два квадрата общей площадью 100 см<sup>2</sup>.

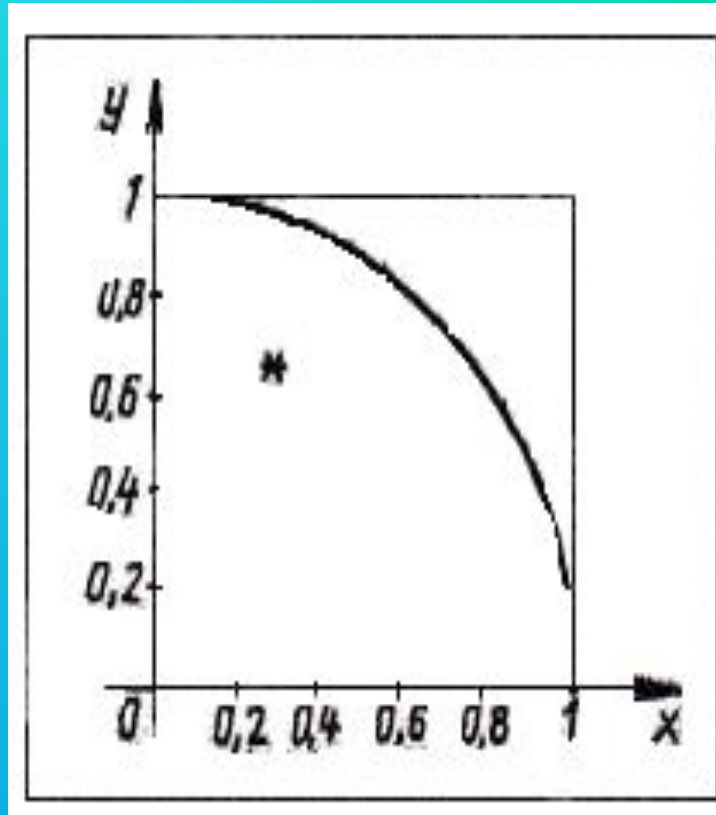


На рисунке  
показано, как  
разрезать вазу  
всего лишь на  
три части так,  
чтобы из них  
можно было  
сложить  
квадрат  $10 \times 10$   
см.



# Метод Монте-Карло

```
PROGRAM METHOD1;
USES CRT;
VAR
X,Y,P: REAL;
I,NKV,NKR: INTEGER;
BEGIN
CLRSCR;
TEXTBACKGROUND(2);
TEXTCOLOR(7);
RANDOMIZE;
WRITELN('    ***ВЫЧИСЛЕНИЕ пи***');
WRITELN;
WRITELN('    *** МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО ***');
WRITELN;
WRITE ('ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО КАПЕЛЬ В КВАДРАТЕ?');
READLN(NKV);
WRITELN;
NKR:=0;
FOR I:=0 TO NKV DO
    BEGIN
        X:=RANDOM;
        Y:=RANDOM;
        IF X*X+Y*Y<=1 THEN NKR:=NKR+1;
        END;
P:=4*NKR/NKV;
WRITELN('ЗНАЧЕНИЕ ЧИСЛА Pi РАВНО: ',P:7:6);
READLN;
END.
```

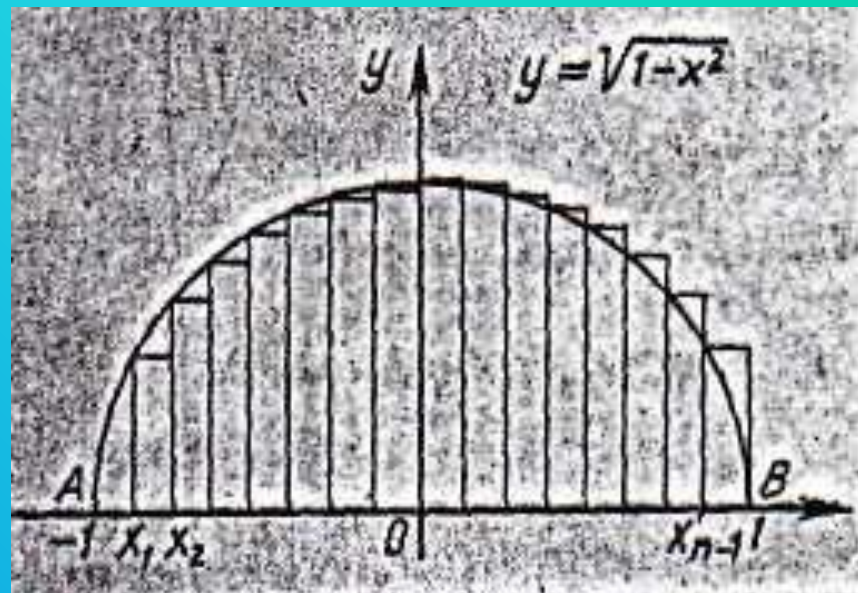


$$\pi \approx 4 \cdot \frac{N_{\text{круга}}}{N_{\text{квадрата}}} \approx 4 \cdot \frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{квадрата}}}$$

**Результат**

# Метод Прямоугольников

```
PROGRAM METHOD2;
USES CRT;
VAR
F, DX, P, X, A: REAL;
I, N: INTEGER;
BEGIN
CLRSCR;
TEXTBACKGROUND(2);
TEXTCOLOR(7);
Writeln('    ***ВЫЧИСЛЕНИЕ пи***');
Writeln;
Writeln('    *** МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ***');
Writeln;
WRITE ('ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ТОЧЕК ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА? ');
READLN(N);
Writeln;
DX:=1/N;
FOR I:=0 TO N-1 DO
    BEGIN
        F:=SQRT(1-SQR(X));
        X:=X+DX;
        A:=A+F;
    END;
P:=4*DX*A;
Writeln('ЗНАЧЕНИЕ ЧИСЛА Pi РАВНО: ',P:7:6);
READLN;
END.
```



Результат

# Метод Тейлора

```
PROGRAM METHOD3;
USES CRT;
VAR
S, P, F: REAL;
I, N: INTEGER;
BEGIN
CLRSCR;
TEXTBACKGROUND(2);
TEXTCOLOR(7);
WRITELN(' ***ВЫЧИСЛЕНИЕ пи***');
WRITELN;
WRITELN (' *** МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ***');
WRITELN;
WRITE ('ВВЕДИТЕ КОЛИЧЕСТВО ЧЛЕНОВ РЯДА ТЕЙЛОРА? ');
READLN(N);
WRITELN;
S:=1;
FOR I:=1 TO N DO
    BEGIN
        F:=1/(2*I+1);
        IF I MOD 2=0 THEN F:=F ELSE F:=-F;
        S:=S+F;
        END;
P:=4*S;
WRITELN('ЗНАЧЕНИЕ ЧИСЛА Pi РАВНО: ',P:7:6);
READLN;
END.
```

$$\pi = 4 \cdot \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right)$$

Результат



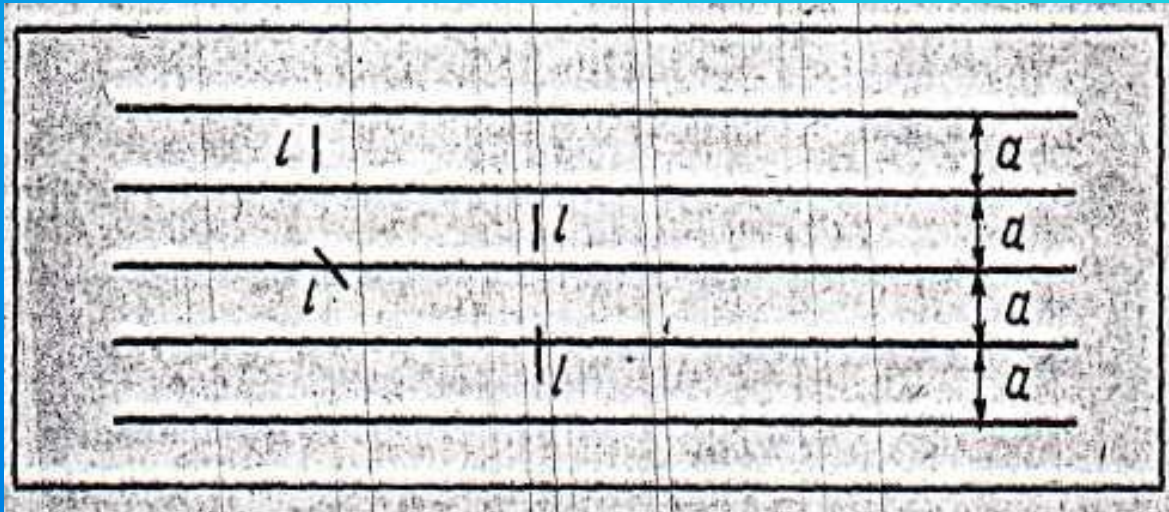
**Свои данные исследования я занесла в следующую таблицу:**

<b>Значение N</b>	<b>10</b>	<b>25</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>200</b>	<b>500</b>	<b>1000</b>	<b>2000</b>	<b>5000</b>	<b>10000</b>
<b>Метод Тейлора</b>	3,232316	3,103145	3,161199	3,151493	3,146568	3,143589	3,142592	3,142092	3,141793	3,141693
<b>Метод Монте-Карло</b>	3,200000	3,520000	3,360000	3,280000	3,340000	3,232000	3,100000	3,190000	3,139200	3,135600
<b>Метод Прямоугольников</b>	3,304518	3,212196	3,178269	3,160417	3,151177	3,145487	3,143555	3,142580	3,141989	3,141791

**Вывод: во всех методах вычисления - чем больше значение  $N$  (либо – количество капель в квадрате, либо – количество членов ряда Тейлора, либо – количество точек деления отрезка), тем более точнее вычисляется приближённое значение числа  $\pi$ . Из всех трёх методов более точнее работает метод Тейлора**

# Метод "Падающей иглки"

Я взяла обыкновенную швейную иглку и лист бумаги. На листе провела несколько параллельных прямых так, чтобы расстояние между ними были равны и совпадали с длиной иглки. Чертёж должен быть достаточно большим, чтобы случайно брошенная игла не упала за его пределами.



На этот лист я бросала сверху иглу и подсчитывала, сколько раз при данном числе бросаний игла пересечёт одну из параллелей (безразлично какую).

**Свои результаты я занесла в таблицу:**

<b>№ опыта</b>	<b>Число бросания иглы (n)</b>	<b>Количество пересечений линий иглой (m)</b>	<b>Результат отношения <math>\frac{m}{n}</math></b>
1	20	15	0,75
2	30	22	0,733333
3	40	27	0,675
4	50	33	0,66
5	60	45	0,75
6	70	51	0,72857
7	80	53	0,6625
8	90	58	0,644444
9	100	67	0,67
10	120	77	0,641667

**Вывод:** оказалось, что при большем числе бросаний (n)  $\frac{m}{n} \approx \frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi} \approx 0,63662$   
дробь

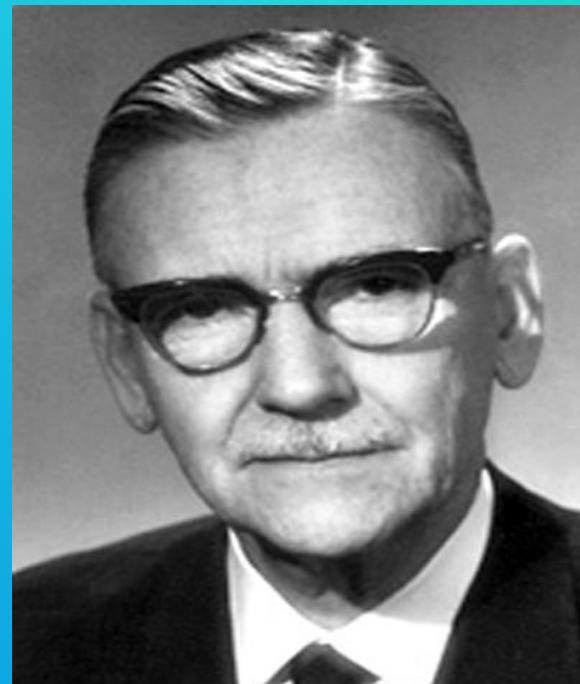
и это равенство будет тем точнее, чем больше будет число бросаний.



# Число ПИ - разумно

Идеальная  
дата рождения  
числа ПИ

14 марта 1592 года  
(3,141592)

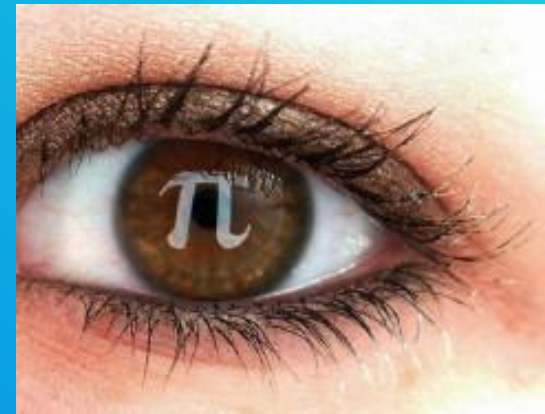


Альберт Эйнштейн

14 марта 1879 года

# Вадим Косоогооров:

«Почему, зная о нежелании числа  $\pi$  быть опознанным в качестве разумного, я не побоялся прийти сюда и вам всё это рассказать? Да потому, что для меня это и был единственный способ выжить. Теперь-то  $\pi$  придётся или убить всех вас, или смириться с тем, что его тайна раскрыта. Будем надеяться, что Оно поступит разумно»



СПАСИБО

за внимание!

