

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Приближенные вычисления

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \quad \text{или} \quad \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \approx f'(x_0)$$

откуда $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$

например $\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0} \cdot \Delta x$

$$1) \quad \sqrt{4,01} = \sqrt{(4 + 0,01)} \approx \sqrt{4} + \frac{\sqrt{4}}{2 \cdot 4} \cdot 0,01 = 2,0025$$

$$2) \quad \sqrt[3]{27,03} = \sqrt[3]{(27 + 0,03)} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{\sqrt[3]{27}}{3 \cdot 27} \cdot 0,03 = 3,0011$$

$$\begin{aligned} 3) \sqrt[10]{1000} &= \sqrt[10]{2^{10} - 24} \approx \sqrt[10]{2^{10}} + \frac{\sqrt[10]{2^{10}}}{10 \cdot 2^{10}} \cdot (-24) = 2 + \frac{2 \cdot (-24)}{10240} \approx \\ &\approx 2 - \frac{3}{640} \approx 1,995 \end{aligned}$$

$$(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n \cdot \Delta x$$

$$1,001^{100} = (1 + 0,001)^{100} \approx 1 + 100 \cdot 0,001 = 1,1$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых

При $x \rightarrow 0$	$\sin x \sim x;$
	$\operatorname{tg} x \sim x;$
	$\arcsin x \sim x;$
	$\operatorname{arctg} x \sim x;$
	$\ln(1+x) \sim x;$
	$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a};$
	$(e^x - 1) \sim x;$
	$(a^x - 1) \sim x \cdot \ln a;$
	$((1+x)^\alpha - 1) \sim \alpha x \quad (\alpha \neq 1, 2, 3, \dots).$

Замечательные пределы

Название *замечательных пределов* в математическом анализе получили следующие два утверждения:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ – первый замечательный предел;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ – второй замечательный предел.

СЛЕДСТВИЯ ПЕРВОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2/2} = 1$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

СЛЕДСТВИЯ ВТОРОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x/\ln a} = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = 1$$

Замечание. Из формулы замены переменной \Rightarrow 1-й и 2-й замечательный пределы и их следствия остаются верными, если вместо x будет стоять любая б.м. функция $\alpha(x)$.

Примеры

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 5x^2 + x}{\sin(x^3 - 5x^2 + x)} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5x}{3}}{\sin \frac{5x}{3}} = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 - 3x + 5)}{x^2 - 3x + 5} = ?$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3 \cdot \frac{1}{7} \cdot 7x} = \frac{1}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{3}$$

Теорема Лопиталя

Если:

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ или ∞ ;
2. $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности a ;
3. $g'(x) \neq 0$ в окрестности a ;
4. существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

то существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Пределы также могут быть односторонними.

Примеры

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 5x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 5}{3} = \frac{5}{3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x^2 + 7x + 9}{x^3 + 3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 8x + 7}{3x^2 + 6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 8}{6x + 6} = \frac{6}{6} = 1$$