ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Приближенные вычисления

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \quad \text{или} \quad \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \approx f'(x_0)$$

$$\text{откуда} \quad f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x$$

$$\text{например} \quad \sqrt[n]{(x_0+\Delta x)} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\cdot\Delta x$$

$$1) \quad \sqrt{4{,}01} = \sqrt{(4+0{,}01)} \approx \sqrt{4} + \frac{\sqrt{4}}{2\cdot 4}\cdot 0{,}01 = 2{,}0025$$

$$2) \quad \sqrt[3]{27{,}03} = \sqrt[3]{(27+0{,}03)} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{\sqrt[3]{27}}{3\cdot 27}\cdot 0{,}03 = 3{,}0011$$

$$3)\ \sqrt[10]{1000}=\sqrt[10]{2^{10}-24}\approx\sqrt[10]{2^{10}}+\frac{\sqrt[10]{2^{10}}}{10\cdot 2^{10}}\cdot(-24)=2+\frac{2\cdot(-24)}{10240}\approx$$

$$\approx 2-\frac{3}{640}\approx 1{,}995$$

$$\left(1+\Delta x\right)^{n} \approx 1+n\cdot\Delta x$$

$$1{,}001^{100} = \left(1+0{,}001\right)^{100} \approx 1+100\cdot 0{,}001 = 1{,}1$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых

При $x \to 0$

$$\sin x \sim x;$$

$$tg\, x \sim x;$$

$$\arcsin x \sim x;$$

$$arctg\, x \sim x;$$

$$\ln(1+x) \sim x;$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a};$$

$$(e^x - 1) \sim x;$$

$$(a^x - 1) \sim x \cdot \ln a;$$

$$((1+x)^\alpha - 1) \sim \alpha x \quad (\alpha \neq 1,2,3,\ldots).$$

Замечательные пределы

Название ***замечательных пределов*** в математическом анализе получили следующие два утверждения:

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$ – первый замечательный предел;

2) $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$ – второй замечательный предел.

СЛЕДСТВИЯ ПЕРВОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2}=1$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$$

СЛЕДСТВИЯ ВТОРОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x/\ln a} = 1$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x \ln a} = 1$

Замечание. Из формулы замены переменной $\Rightarrow$ 1-й и 2-й замечательный пределы и их следствия остаются верными, если вместо x будет стоять любая б.м. функция $\alpha(x)$.

Примеры

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-5x^2+x}{\sin(x^3-5x^2+x)}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{5x}{3}}{\sin\frac{5x}{3}}=1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2-3x+5)}{x^2-3x+5}=?$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\dfrac{1}{\frac{3}{7}}=\dfrac{7}{3}$

Теорема Лопиталя

Если:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ или ∞;
2. $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности a;
3. $g'(x) \neq 0$ в окрестности a;
4. существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

то существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Пределы также могут быть односторонними.

Примеры

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+5x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+5}{3}=\frac{5}{3}$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x^2+7x+9}{x^3+3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+8x+7}{3x^2+6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+8}{6x+6}=\frac{6}{6}=1$$