Багдаринская средняя общеобразовательная школа

Реферат

Тема: «Замечательные теоремы планиметрии»

Выполнила: ученица 10-б класса
Матафонова Альбина
Проверила: учитель математики
Панькова В.А.

с. Багдарин 2005 г.

план

- Введение
- Биография великих математиков Чевы и Менелая
- Теорема Чевы
- Задачи к теореме Чевы
- Теорема Менелая
- Задача к теореме Менелая
- Литература

Введение

В курсе геометрии были рассмотрены важные и интересные свойства геометрических фигур на плоскости. Но многие удивительные соотношения и изящные геометрические факты не вошли в основной курс. Здесь мы рассмотрим еще несколько замечательных теорем планиметрии.

Мы знаем, что: медианы треугольника пересекаются в одной точки; биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке; высоты треугольника (или их продолжениях) пересекаются в одной точке.

Поставим теперь более общий вопрос. Рассмотрим треугольник ABC и отметим на его сторонах BC,CA и AB (или их продолжениях) точки A1,B1 и C1. При каком расположении этих точек прямые AA1, BB1 и CC1 пересекаются в одной точке или будут лежать на одной прямой?

Эти вопросы были решены математиками Чевой и Менелаем.

- Джованни Чева (1648-1734) – итальянский математик. Основной заслугой Чевы является построение учения о секущих прямых, которое положило начало новой синтетической геометрии; оно изложено в сочинении «О взаимопересекающихся прямых» (1678 году).

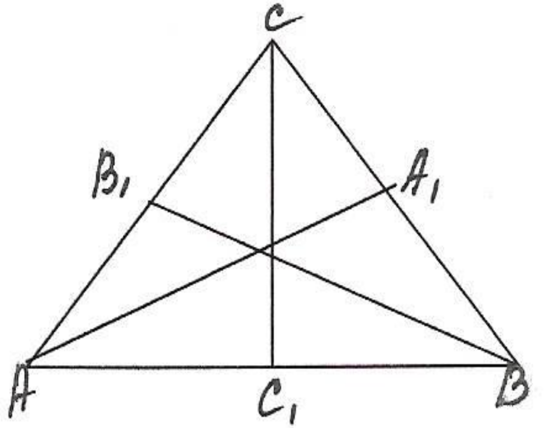
- Менелай Александрийский, древнегреческий астролог и математик (I века). Автор работ по сферической тригонометрии: 6 книг о вычислении хорд и 3 книги «Сферики»   (сохранились только в арабском переводе). Тригонометрия у Менелая отделена от астрологии и геометрии. Арабские авторы упоминают также о книге Менелая по гидростатике.

Теорема Чевы

Теорема: *пусть в треугольнике ABC на сторонах BC, CA и AB (или их продолжениях) взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1, не совпадают с вершинами треугольника. Тогда если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или попарно параллельны, то:*

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1 \qquad (1)$$

1.



Дано: треугольник ABC
высоты пересекаются в точке O

Доказать: прямые пересекаются в одной точке?

Доказательство:

1^0 Допустим, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O.

Имеем $S_{ABA_1}=1/2\ BA_1\ h$ $\quad \dfrac{BA_1}{AC_1}=\dfrac{S_{ABA_1}}{S_{AA_1C}}$, откуда $S_{ABA_1}=\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot S_{AA_1C}$.

$S_{AA_1C}=1/2\ A_1C\ h$

Аналогично $S_{OBA_1}=1/2\ BA_1\ h$ $\quad \dfrac{BA_1}{A_1C}=\dfrac{S_{OBA_1}}{S_{OA_1C}}$, откуда $S_{OBA_1}=\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot S_{OA_1C}$

$S_{OA_1C}=1/2\ A_1C\ h$

Следовательно, $\dfrac{S_{ABO}}{S_{AOC}}=\dfrac{S_{ABA_1}-S_{OBA_1}}{S_{AA_1C}-S_{OA_1C}}=\dfrac{BA_1}{A_1C}\ \dfrac{S_{AA_1C}-S_{OA_1C}}{S_{AA_1C}-S_{OA_1C}}=\dfrac{BA_1}{A_1C}$

Итак, $\dfrac{BA_1}{A_1C}=\dfrac{S_{ABO}}{S_{AOC}}$ аналогично $\dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{S_{BCO}}{S_{BOA}}$ и $\dfrac{AC_1}{C_1B}=\dfrac{S_{CAO}}{S_{COB}}$.

Перемножим равенства и замечаем, что:

$S_{ABO}=S_{BOA}$, $S_{AOC}=S_{CAO}$, $S_{BCO}=S_{COB}$, получаем:

$\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}\cdot\dfrac{AC_1}{C_1B}=\dfrac{S_{BOA}}{S_{CAO}}\cdot\dfrac{S_{COB}}{S_{BOA}}\cdot\dfrac{S_{CAO}}{S_{COB}}=1$, т.е.равенство (1) справедливо.

2^0

Теорема обратная: ***если выполнено равенство, то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 либо пересекается в одной точке, либо попарно параллельны.***

Допустим теперь, что выполнено равенство (1). Рассмотрим прямые AA_1 и BB_1 и предположим, что они пересекутся в некоторой точке O. Проведем прямую CO и обозначим через C_2 точку пересечения этой прямой с прямой AB. Согласно 1^0

$$\frac{BA_1}{A_1C}\,\frac{CB_1}{B_1A}\,\frac{AC_2}{C_2B}=1$$

Из этого равенства и равенства (1) следует, что $\frac{AC_2}{C_2B}=\frac{AC_1}{C_1B}$ Обозначив эти отношения буквой k, получаем $AC_2 = k\,C_2B$ и $AC_1 = k\,C_1B$. Вычтем одно равенство из другого: $AC_2 - AC_1 = k\,(C_2B - C_1B)$, или $C_1C_2 = k\,C_2C_1 = -\,k\,(C_1C_2)$.

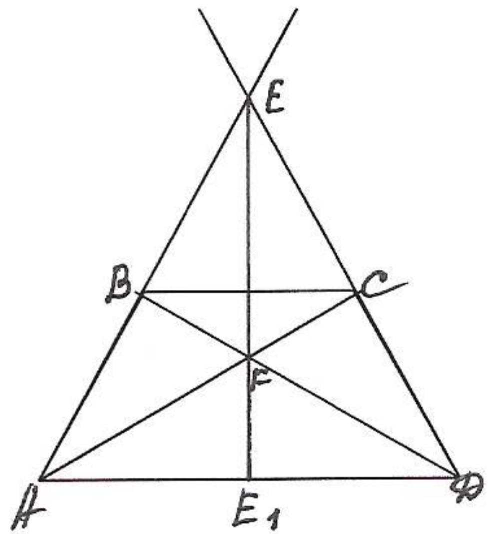
Заметим теперь, что $k = 1$ (иначе получилось бы, что $AC_1 = -\,C_1B$, т.е. $C_1B = C_1A$, а этого не может быть, т.к. A и B не совпадают). Следовательно, $C_1C_2 = O$, т.е. точки C_1 и C_2 совпадают. Но это означает, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (точке O).

Аналогично доказывается, что если $AA_1 \parallel BB_1$, то и $CC_1 \parallel BB_1$. Теорема доказана.

Ответ: Теорема доказана.

Задачи к теореме Чевы

I.



Дано: ABCD – трапеция

$AC \cap DB = F$ – диагонали

$AB \cap DC = E$

Доказать: $EF \cap AD = E_1$, что

$AE_1 = E_1D$

Доказательство:

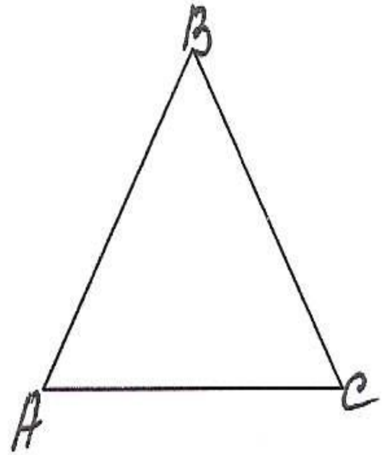
1. Обозначим $\dfrac{BE}{BA} = m$

2. Тогда $\dfrac{EC}{CD} = m$ по теореме Фалеса.

3. $E_1 = EF \cap AD$, тогда $\dfrac{AE_1}{E_1D} \cdot \dfrac{DC}{CE} \cdot \dfrac{EB}{BA} = 1$ * (по теореме Чевы: $AC \cap DB \cap EE_1 = F$). Но $\dfrac{BE}{BA} \cdot \dfrac{EC}{CD} = m \cdot \dfrac{1}{m} = 1$, тогда из * $\dfrac{AE_1}{E_1D} = 1, \Rightarrow$ $AE_1 = E_1D$.

Ответ: $EF \cap AD = E_1$ Доказали, что $AE_1 = E_1D$.

II.



Дано: треугольники ABC.

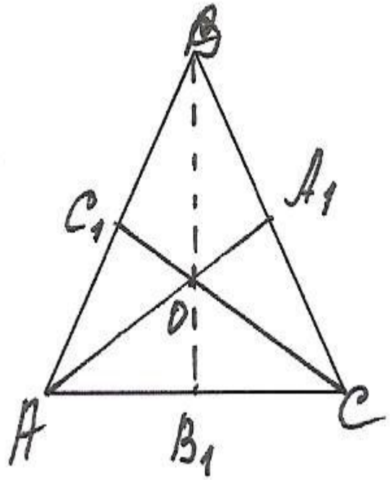
Доказать: а) что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

б) что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

в) что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство:

а)

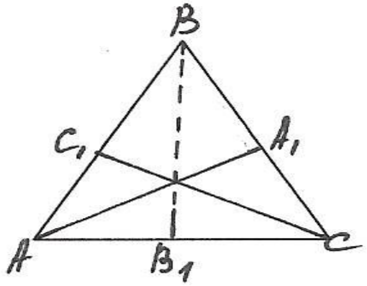


AA_1, BB_1, CC_1- медианы.

$\frac{AB_1}{B_1C}=1$, $\frac{CA_1}{A_1B}=1$, $\frac{BC_1}{C_1A}=1$, т.е.

$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$, откуда на основании обратной теореме Чевы. $AA_1 \cap CC_1 \cap BB_1 = O$

б)



AA_1, BB_1, CC_1 - биссектрисы

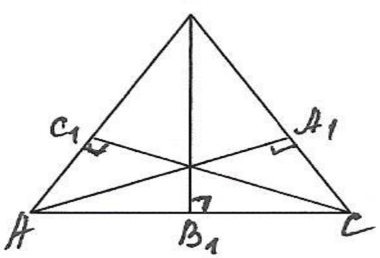
Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части пропорциональные сторонам треугольника.

$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{CB}$, $\quad \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{AC}{AB}$, $\quad \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BC}{CA}$

Пусть $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{c}{a}$, $\frac{CA_1}{A_1C} = \frac{b}{c}$, $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{a}{b}$ Тогда: $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1C} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{b} = 1$, тогда по теореме обратной Чевы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

в)



AA_1, BB_1, CC_1- высоты.

1. $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.
2. ABC: прямоугольный.

$\frac{AB_1}{AB} = \cos A$, $AB_1 = c \cos A$

$\frac{B_1C}{BC} = \cos C$, $B_1C = a \cdot \cos C$

$\frac{CA_1}{AC} = \cos C$, $C_1a = b \cdot \cos C$

$\frac{A_1B}{AB} = \cos B$, $AB^1 = c \cdot \cos B$

$\frac{C_1A}{AC} = \cos A$, $C_1A = b \cdot \cos A$

$\frac{BC_1}{BC} = \cos B$, $BC_1 = a \cdot \cos B$,

тогда: $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{\cancel{c} \cdot \cancel{\cos A}}{\cancel{a} \cdot \cancel{\cos C}} \cdot \frac{\cancel{b} \cdot \cancel{\cos C}}{\cancel{c} \cdot \cancel{\cos B}} \cdot \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{\cos B}}{\cancel{b} \cdot \cancel{\cos A}} = 1$

(по теореме обратной Чеве: $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = O$)

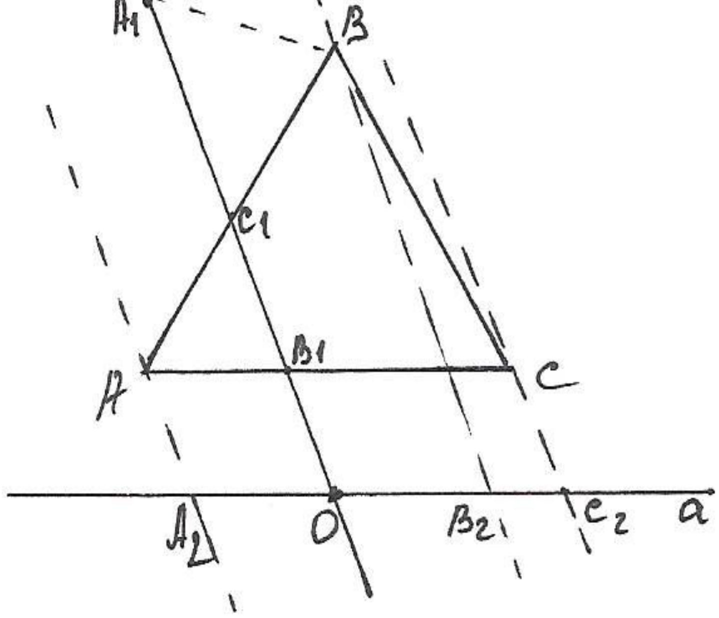
Ответ: обратная теорема Чевы доказана.

Теорема Менелая

Мы знаем при каком условии прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекутся в одной точке либо попарно параллельны (т. Чевы). А при каком условии точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой? Ответ на этот вопрос дает теорема Менелая.

Теорема: *Пусть в треугольнике ABC на сторонах BC, CA и AB (или их продолжениях)взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1 не совпадают с вершинами треугольника. Тогда если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, то*

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = -1 \qquad (2)$$



Дано: треугольник ABC

Доказать: что лежат на одной прямой

Доказательство: Допустим, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой. Через какую-нибудь точку O этой прямой проведем произвольную прямую **a**, а через вершины треугольника – прямые, параллельные прямой A_1C_1 и пересекающие прямую **a** в точках A_2, B_2, C_2.

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{B_2O}{OC_2},\quad \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{C_2O}{OA_2},\quad \frac{AC_1}{C_1B}=\frac{A_2O}{OB_2},\quad \text{или}\quad \frac{BA_1}{A_1C}=-\frac{OB_2}{OC_2},\quad \frac{CB_1}{B_1A}=-\frac{OC_2}{OA_2},\quad \frac{AC_1}{C_1B}=-\frac{OA_2}{OB_2}.$$

Перемножая эти равенства, получаем:

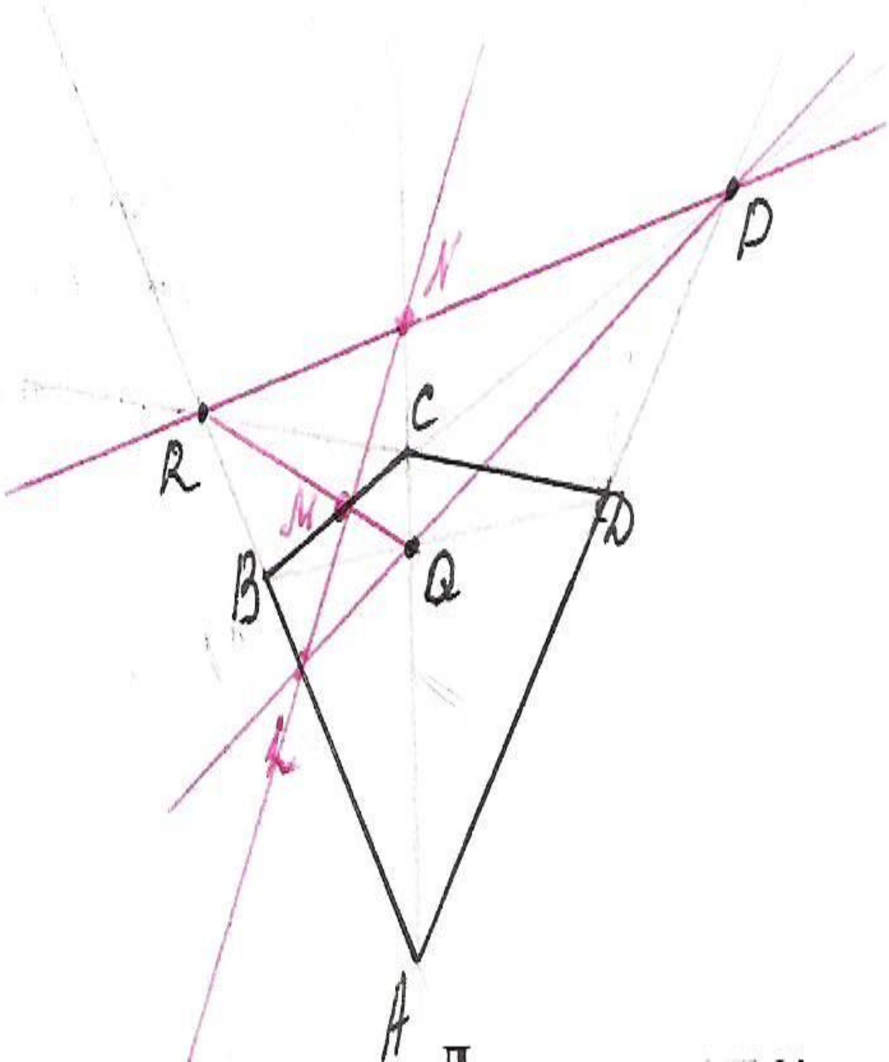
$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=-\frac{OB_2}{OC_2}\cdot\frac{OC_2}{OA_2}\cdot\frac{OA_2}{OB_2}=-1$$

Обратная теорема: ***Если выполнено равенство (1), то точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.***

Первая часть теоремы доказана. Вторая часть доказывается аналогично 2^0 части теоремы Чевы.

Задача к теореме Менелая

III.



Дано: ABCD – четырехугольник,
P – точка пересечения BC и AD,
Q – точка пересечения CA и BD,
R – точка пересечения AB и CD.

Доказать: а)что точки пересечения BC и QR, CA и RP, AB и PQ и лежат на одной прямой.

б) Что точки L, M, N ∈ l.

Доказательство:

1) треугольник ABC : точки L, Q, P лежат на одной прямой, значит по теореме Менелая

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BQ}{QD} \cdot \frac{DP}{PA} = -1 \quad *$$

2) треугольник BDC: точки Q, M, R лежат на одной прямой, значит:

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{DQ}{QB} \cdot \frac{CR}{RD} = -1 \quad *$$

3) треугольник DCA : точки R, N, P на одной прямой, значит:

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{DR}{RC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1 \quad *$$

Перемножим почленно:*

$$\frac{AL}{LB} \cdot \cancel{\frac{BQ}{QD}} \cdot \cancel{\frac{DP}{PA}} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \cancel{\frac{DQ}{QB}} \cdot \cancel{\frac{CR}{RD}} \cdot \cancel{\frac{AP}{PD}} \cdot \cancel{\frac{DR}{RC}} \cdot \frac{CN}{NA} = -1$$

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1$$ по теореме обратной теореме Менелая.

Ответ: L, M , N – лежат на одной прямой.

Литература

1.Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. Геометрия 7 - 9 . сред. шк. – 2-е изд. – М.: «Просвещение», 1991.
2.Математика в школе - №8, 2004.
3.Шарыгин И.Ф. Геометрия 9 – 11. – от учебной задачи и творческой – М.: « Дрофа», 1997.