

Багдаринская средняя общеобразовательная школа

Реферат

Тема: «Замечательные теоремы планиметрии»

Выполнила: ученица 10-б класса
Матафонова Альбина

Проверила: учитель математики
Панькова В.А.

с. Багдарин 2005 г.

план

- Введение
- Биография великих математиков Чевы и Менелая
- Теорема Чевы
- Задачи к теореме Чевы
- Теорема Менелая
- Задача к теореме Менелая
- Литература

Введение

В курсе геометрии были рассмотрены важные и интересные свойства геометрических фигур на плоскости. Но многие удивительные соотношения и изящные геометрические факты не вошли в основной курс. Здесь мы рассмотрим еще несколько замечательных теорем планиметрии.

Мы знаем, что: медианы треугольника пересекаются в одной точке; биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке; высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

Поставим теперь более общий вопрос. Рассмотрим треугольник ABC и отметим на его сторонах BC, CA и AB (или их продолжениях) точки A_1, B_1 и C_1 . При каком расположении этих точек прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или будут лежать на одной прямой?

Эти вопросы были решены математиками Чевои и Менелаем.

- Джованни Чева (1648-1734) – итальянский математик. Основной заслугой Чевы является построение учения о секущих прямых, которое положило начало новой синтетической геометрии; оно изложено в сочинении «О взаимопересекающихся прямых» (1678 году).



- Менелай Александрийский, древнегреческий астролог и математик (I века). Автор работ по сферической тригонометрии: 6 книг о вычислении хорд и 3 книги «Сферики» (сохранились только в арабском переводе). Тригонометрия у Менелая отделена от астрологии и геометрии. Арабские авторы упоминают также о книге Менелая по гидростатике.

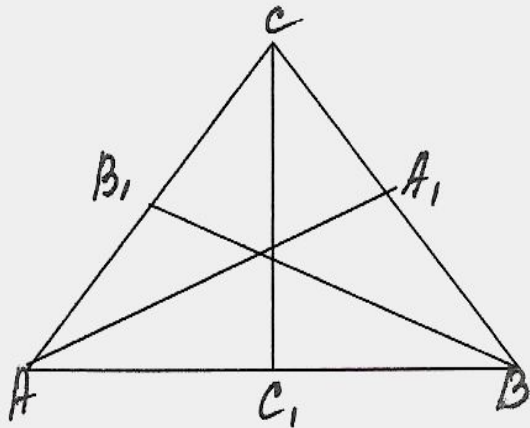


Теорема Чебы

Теорема: пусть в треугольнике ABC на сторонах BC , CA и AB (или их продолжениях) взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1 , не совпадают с вершинами треугольника. Тогда если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или попарно параллельны, то:

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1 \quad (1)$$

1.



Дано: треугольник ABC

высоты пересекаются в точке O

Доказать: прямые пересекаются в одной точке?

Доказательство:

1⁰ Допустим, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O .

$$\begin{aligned} \text{Имеем } S_{ABA_1} &= 1/2 BA_1 h & \frac{BA_1}{AC_1} &\geq \frac{S_{ABA_1}}{S_{AA_1C}} \text{, откуда } S_{ABA_1} &= \frac{BA_1}{A_1C} \cdot S_{AA_1C}. \\ S_{AA_1C} &= 1/2 A_1C h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Аналогично } S_{OBA_1} &= 1/2 BA_1 h & \frac{BA_1}{A_1C} &\geq \frac{S_{OBA_1}}{S_{OA_1C}} \text{, откуда } S_{OBA_1} &= \frac{BA_1}{A_1C} \cdot S_{OA_1C} \\ S_{OA_1C} &= 1/2 A_1C h \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \frac{S_{ABO}}{S_{AOC}} \geq \frac{S_{ABA_1} - S_{OBA_1}}{S_{AA_1C} - S_{OA_1C}} \geq \frac{BA_1}{A_1C} \frac{S_{AA_1C} - S_{OA_1C}}{S_{AA_1C} - S_{OA_1C}} \geq \frac{BA_1}{A_1C}$$

$$\text{Итак, } \frac{BA_1}{A_1C} \geq \frac{S_{ABO}}{S_{AOC}} \quad \text{аналогично} \quad \frac{CB_1}{B_1A} \geq \frac{S_{BCO}}{S_{BOA}} \quad \text{и} \quad \frac{AC_1}{C_1B} \geq \frac{S_{CAO}}{S_{COB}}.$$

Перемножим равенства и замечаем, что:

$$S_{ABO} = S_{BOA}, \quad S_{AOC} = S_{CAO}, \quad S_{BCO} = S_{COB}, \quad \text{получаем:}$$

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} \geq \frac{S_{BOA}}{S_{CAO}} \cdot \frac{S_{COB}}{S_{BOA}} \cdot \frac{S_{CAO}}{S_{COB}} = 1, \quad \text{т.е. равенство (1) справедливо.}$$

2⁰

Теорема обратная: *если выполнено равенство, то прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 либо пересекаются в одной точке, либо попарно параллельны.*

Допустим теперь, что выполнено равенство (1). Рассмотрим прямые AA_1 и BB_1 и предположим, что они пересекутся в некоторой точке O . Проведем прямую CO и обозначим через C_2 точку пересечения этой прямой с прямой AB . Согласно 1⁰

$$\frac{BA_1}{A_1C} \frac{CB_1}{B_1A} \frac{AC_2}{C_2B} = 1$$

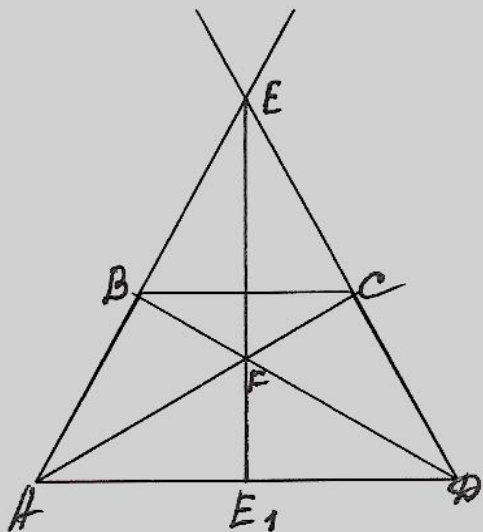
Из этого равенства и равенства (1) следует, что $\frac{AC_2}{C_2B} \frac{AC_1}{C_1B}$ Обозначив эти отношения буквой k , получаем $AC_2 = k C_2B$ и $AC_1 = k C_1B$. Вычтем одно равенство из другого: $AC_2 - AC_1 = k (C_2B - C_1B)$, или $C_1C_2 = k C_2C_1 = -k (C_1C_2)$.

Заметим теперь, что $k = 1$ (иначе получилось бы, что $AC_1 = -C_1B$, т.е. $C_1B = C_1A$, а этого не может быть, т.к. A и B не совпадают). Следовательно, $C_1C_2 = O$, т.е. точки C_1 и C_2 совпадают. Но это означает, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (точке O).

Аналогично доказывается, что если $AA_1 \parallel BB_1$, то и $CC_1 \parallel BB_1$. Теорема доказана.

Ответ: Теорема доказана.

Задачи к теореме Чебы



Дано: ABCD – трапеция
AC ∩ DB = F – диагонали
AB ∥ DC = E
Доказать: EF ∩ AD = E₁, что
AE₁ = E₁D

Доказательство:

1. Обозначим $\frac{BE}{BA} = m$

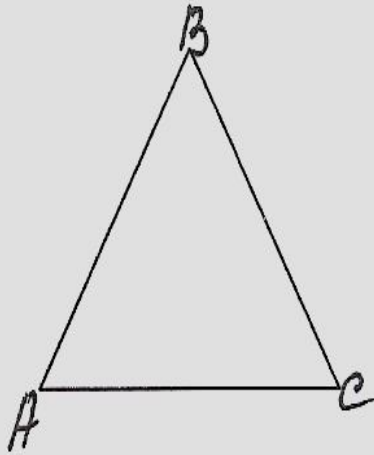
2. Тогда $\frac{EC}{CD} = m$ по теореме Фалеса.

3. E₁ = EF ∩ AD, тогда $\frac{AE_1}{E_1D} \cdot \frac{DC}{CE} \cdot \frac{EB}{BA} = 1$ * (по теореме Чебы: AC ∩ DB ∩ EE₁ = F). Но

$$\frac{BE}{BA} \cdot \frac{EC}{CD} = m \cdot \frac{1}{m} = 1, \text{ тогда из } * \frac{AE_1}{E_1D} = 1, \Rightarrow AE_1 = E_1D.$$

Ответ: EF ∩ AD = E₁ Доказали, что AE₁ = E₁D.

II.

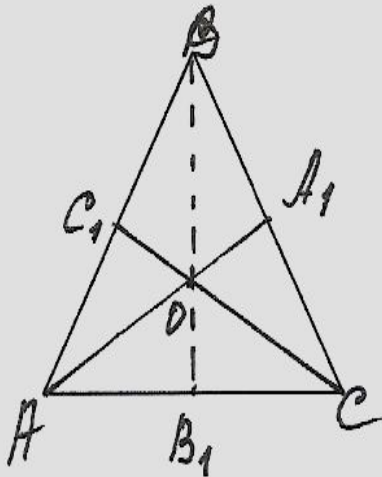


Дано: треугольники ABC.

Доказать: а) что медианы треугольника пересекаются в одной точке.
б) что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
в) что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство:

а)

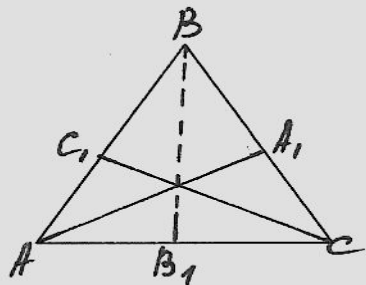


AA_1, BB_1, CC_1 - медианы.

$$\frac{AB_1}{B_1C} = 1, \quad \frac{CA_1}{A_1B} = 1, \quad \frac{BC_1}{C_1A} = 1, \quad \text{т.е.}$$

$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$, откуда на основании обратной теореме Чебы. $AA_1 \cap CC_1 \cap BB_1 = O$

б)



AA_1, BB_1, CC_1 - биссектрисы

Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части пропорциональные сторонам треугольника.

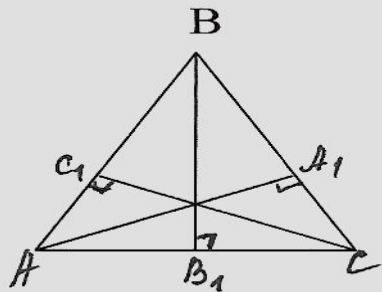
$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{CB}, \quad \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{AC}{AB}, \quad \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BC}{CA}$$

Пусть $AB = c, AC = b, BC = a$.

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{c}{a}, \quad \frac{CA_1}{A_1C} = \frac{b}{c}, \quad \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{a}{b}$$

Тогда: $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1C} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{b} = 1$, тогда по теореме обратной Чевы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

в)



AA_1, BB_1, CC_1 - высоты.

1. $AB = c, AC = b, BC = a$.

2. $\triangle ABC$: прямоугольный.

$$\frac{AB_1}{AB} = \cos A, \quad AB_1 = c \cdot \cos A$$

$$\frac{B_1C}{BC} = \cos C, \quad B_1C = a \cdot \cos C$$

$$\frac{CA_1}{AC} = \cos C, \quad C_1a = b \cdot \cos C$$

$$\frac{A_1B}{AB} = \cos B, \quad AB_1 = c \cdot \cos B$$

$$\frac{C_1A}{AC} = \cos A, \quad C_1A = b \cdot \cos A$$

$$\frac{BC_1}{BC} = \cos B, \quad BC_1 = a \cdot \cos B,$$

тогда: $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{c \cdot \cos A}{a \cdot \cos C} \cdot \frac{b \cdot \cos C}{c \cdot \cos B} \cdot \frac{a \cdot \cos B}{b \cdot \cos A} = 1$

(по теореме обратной Чеве: $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = O$)

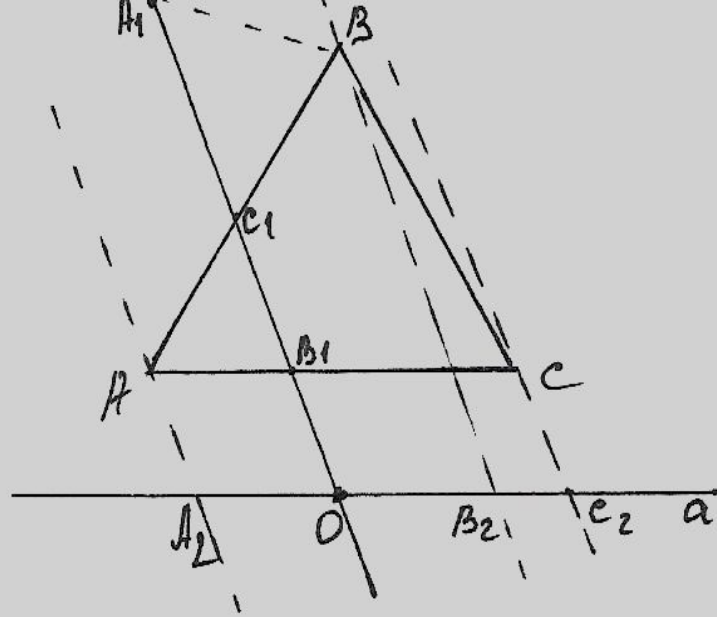
Ответ: обратная теорема Чевы доказана.

Теорема Менелая

Мы знаем при каком условии прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекутся в одной точке либо попарно параллельны (т. Чебы). А при каком условии точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой? Ответ на этот вопрос дает теорема Менелая.

Теорема: Пусть в треугольнике ABC на сторонах BC , CA и AB (или их продолжениях) взяты соответственно точки A_1 , B_1 и C_1 не совпадающие с вершинами треугольника. Тогда если точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой, то

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = -1 \quad (2)$$



Дано: треугольник ABC

Доказать: что лежат на одной прямой

Доказательство: Допустим, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой. Через какую-нибудь точку O этой прямой проведем произвольную прямую a , а через вершины треугольника – прямые, параллельные прямой A_1C_1 и пересекающие прямую a в точках A_2, B_2, C_2 .

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{B_2O}{OC_2}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{C_2O}{OA_2}, \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{A_2O}{OB_2}, \quad \text{или} \quad \frac{BA_1}{A_1C} = -\frac{OB_2}{OC_2}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = -\frac{OC_2}{OA_2}, \quad \frac{AC_1}{C_1B} = -\frac{OA_2}{OB_2}.$$

Перемножая эти равенства, получаем:

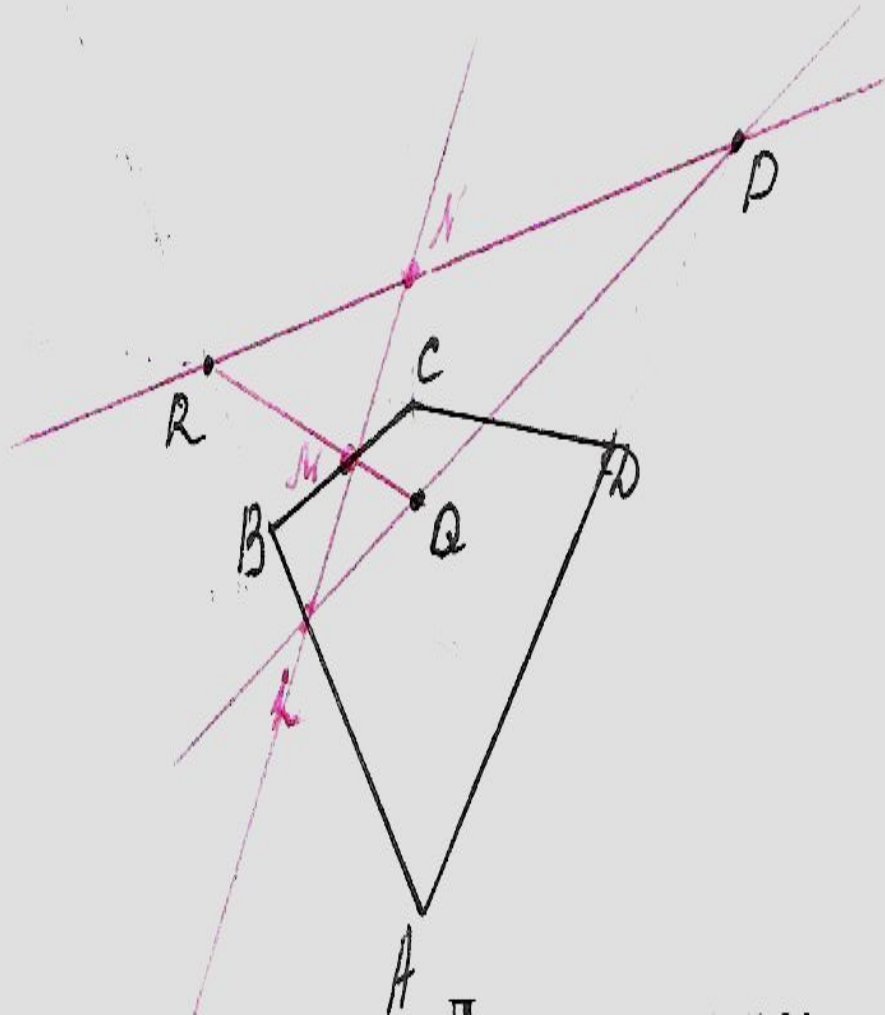
$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = -\frac{OB_2}{OC_2} \cdot \frac{OC_2}{OA_2} \cdot \frac{OA_2}{OB_2} = -1$$

Обратная теорема: Если выполнено равенство (1), то точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

Первая часть теоремы доказана. Вторая часть доказывается аналогично 2⁰ части теоремы Чебы.

Задача к теореме Менелая

III.



Дано: $ABCD$ – четырехугольник,
 R – точка пересечения BC и AD ,
 Q – точка пересечения CA и BD ,
 P – точка пересечения AB и CD .

Доказать: а) что точки пересечения BC и QR , CA и RP , AB и PQ и лежат на одной прямой.

б) Что точки $L, M, N \in l$.

Доказательство:

- 1) треугольник ABC : точки L, Q, P лежат на одной прямой, значит по теореме Менелая

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BQ}{QD} \cdot \frac{DP}{PA} = -1^*$$

- 2) треугольник BDC: точки Q, M, R лежат на одной прямой, значит:

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{DQ}{QB} \cdot \frac{CR}{RD} = -1^*$$

- 3) треугольник DCA : точки R, N, P на одной прямой, значит:

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{DR}{RC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1^*$$

Перемножим почленно:

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BQ}{QD} \cdot \frac{DP}{PA} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{DQ}{QB} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{AP}{PD} \cdot \frac{DR}{RC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1$$

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1 \quad \text{по теореме обратной теореме Менелая.}$$

Ответ: L, M, N – лежат на одной прямой.

Литература

1. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. Геометрия 7 - 9 . сред. шк. – 2-е изд. – М.: «Просвещение», 1991.
2. Математика в школе - №8, 2004.
3. Шарыгин И.Ф. Геометрия 9 – 11. – от учебной задачи и творческой – М.: « Дрофа», 1997.